NÚMEROS NEGATIVOS TÊM LOGARITMOS?[1]

DO THE NEGATIVE NUMBERS HAVE LOGARITHM?

Flávia Regina Oliveira do Prado[2]
José Pedro Pereira de Carvalho [3]

RESUMO

Este estudo foi realizado com o propósito de pesquisar uma das inúmeras contribuições que o notável Leonard Euler deixou para a matemática. Ao se falar em logaritmos, é natural definir sua existência somente para números positivos. As primeiras dúvidas de um número negativo possuir logaritmos surgiram no século XVIII, e foram discutidas, inicialmente, pelos matemáticos Jean Bernoulli e Leibniz sem êxito algum. Euler, usando os conhecimentos da trigonometria, números complexos e mantendo as principais propriedades dos logaritmos e exponenciais, criou uma teoria esclarecendo definitivamente a questão. Euler mostrou que um único número real negativo tem uma infinidade de logaritmos e nenhum deles é real.

Palavras-chave: logaritmo, série de Taylor, função de Euler.

ABSTRACT

This study was made with the purpose of reserching one the countless contributions that great Leonard Euler left for mathematics. When mentioning logarithms, it is natural to define its existence only to the positive numbers. The fisrt doubts of a negative number having a logarithm came in the XVIII century, discussed at first, by the mathematicians Jean Bernoulli and Leibniz, without any success. Euler, using trigonometry knowledge, complex numbers and keeping the main proprieties of logarithms and exponentials, created a theory explaining definitely the point. Euler showed that one negative real number has infinity of logarithms and none of them is real.

Key words: logarithm, series of Taylor, function of Euler

INTRODUÇÃO

Quando se fala em logaritmos, é natural definir-se o seu campo de existência somente para números reais positivos. Surge uma pergunta: Existe logaritmo de um número real negativo?

---

[1] Trabalho Final de Graduação.
[2] Curso de Matemática - Licenciatura Plena. UNIFRA.
[3] Orientador.

Foi baseado na trigonometria, números complexos e mantendo as principais propriedades dos logaritmos e exponenciais, que o notável matemático Leonard Euler criou uma teoria para provar a existência de logaritmos para números reais negativos. Euler mostrou que um único número real negativo tem uma infinidade de logaritmos e nenhum deles é real. “Para a teoria dos logaritmos Euler contribuiu não só com a definição em termos de expoentes que usamos hoje, mas com a idéia correta quanto aos logaritmos de números negativos” (BOYER, 1974, p.329).

O propósito que se tem então, no presente trabalho,é pesquisar mais uma das maravilhosas contribuições que Euler deixou para a Matemática.

NÚMEROS NEGATIVOS TÊM LOGARITMO?

Os logaritmos surgiram no início do século XVII com a finalidade de facilitar as operações aritméticas, consideradas muito complexas. Segundo LIMA (1991), Jobst Bürgi (1552-1632), um suíço fabricante de instrumentos astronômicos e inventor, foi o matemático que teve as primeiras idéias sobre logaritmos. Mas a enunciação da descoberta foi pelo escocês, teólogo e matemático John Napier (1550-1617), o qual obteve maior influência no desenvolvimento dos logaritmos, sendo considerado por muitos autores, o único matemático a descobrir os logaritmos.

> Ficou sugerido, até agora, que a invenção dos logaritmos foi obra de um só homem, mas tal impressão não deve permanecer. Napier foi de fato o primeiro a publicar uma obra sobre logaritmos, mas idéias muito semelhantes foram desenvolvidas independentemente na Suíça por Jobst Bürgi mais ou menos ao mesmo tempo. Na verdade, é possível que a idéia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, o que seria meia dúzia de anos antes de Napier começar a trabalhar na mesma direção. Porém Bürgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier publicar sua Descriptio (BOYER, 1974, p.230).

Na primeira metade do século XVIII, surgiram os primeiros questionamentos sobre logaritmos de um número negativo. Os matemáticos Jean Bernoulli e Leibniz tentaram criar uma teoria que explicasse essa questão, porém, ambos ficaram sem uma definição concreta.

Para BOYER (1974), o resultado da teoria dos logaritmos de números negativos deveria ter sido claro para Bernoulli e outros matemáticos, pois já tinham conhecimento da fórmula $e^{i\phi} = cos(\phi) + i\ sen(\phi)$ mesmo antes de Euler enunciá-la. Porém, em 1749, Leonard Euler formulou uma teoria provando a existência de logaritmo para números reais negativos.

Leibniz era de opinião que um número negativo não tinha logaritmo real porque toda potência de expoente real de um número positivo a, é um número positivo; isto é, $a^x = y$ onde $a > 0$ e $x \in IR$. Bernoulli afirmava que números negativos têm logaritmo real, e ainda, que $log(-x) = log\, x$ (Lima, 1991).

A função exponencial $f(x) = a^x$ definida por $f: IR \rightarrow IR_+^*$,tem sentido apenas para $a > 0$ e $a \neq 1$, isso mostra coerência na afirmação de Leibniz. Mas Leibniz olhava o logaritmo de x na base a como o expoente y, ou seja, $log_a x = y$, o que só é compatível para logaritmos de números positivos. Se a função exponencial assume somente valores positivos e, como ela é a função inversa da função logarítmica, não teria sentido a existência de logaritmo real para um número negativo. Isto também estava em contradição com a expectativa de Bernoulli.

Em uma função logarítmica definida por $g(y)=log\, y,$ onde $g: IR_+^* \rightarrow IR$, sendo g a inversa da função exponencial, então:

$x=log_a y \Leftrightarrow a^x=y$, assim, $a^{log_a y}=y$, por definição.

Para que a afirmativa de Bernoulli estivesse correta, era necessário obter uma função φ contínua ou monótona, de forma que $\varphi(a)=1$ e $\varphi(x.y)= \varphi(x)+\varphi(y)$, conforme as propriedades dos logaritmos reais. Tomando-se $\varphi(x)=log\, x$, com $x > 0$, e $\varphi(y)= 0$, obtém-se das propriedades dos logaritmos reais $\varphi(x.0)= \varphi(x)+\varphi(0)$, isto é, $\varphi(0)=\varphi(x)+\varphi(0)$. Logo, $\varphi(x)= 0$. Isto contradiz a condição $\varphi(a)= 1$.

Daí, $\varphi(y)\neq 0$ ser definida por $\varphi: IR^* \rightarrow IR,$ e $\varphi(x)= log\, |x|$. Como $log(1)= 0$, então $0= log\, 1= \varphi(1)=\varphi((-1)(-1))=\varphi(-1) +\varphi(-1)= 2\varphi(-1)$, logo, $\varphi(1)= 0$.

Assim, $\varphi(-y)= \varphi((-1)(y))= \varphi(-1) + \varphi(y)= \varphi(y)= log\, y= log\, |-y|$, $\forall y,$ isto evidencia a teoria de Bernoulli, mas a igualdade $a^{log_a x} = x$, não mais valeria, passaria a $a^{log_a x} = |x|$.

Mas na verdade, nem Leibniz nem Bernoulli obtiveram êxito em suas teorias, pois nada concluíram, e ainda, elas pareciam um tanto antagônicas.

Euler então partiu dos pontos de vista de Leibniz e Bernoulli e esclareceu definitivamente a questão com seu trabalho: "Da controvérsia entre os senhores Leibniz e Bernoulli sobre os logaritmos dos números negativos e imaginários" (LIMA, 1991).

Para provar a existência de logaritmos de números negativos, Euler partiu do princípio de que o número e é base para todos os logaritmos e exponenciais, a fim de facilitar a demonstração da teoria.

O número e, segundo GUIDORIZZI (1994), é definido como o $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ou seja, é uma seqüência crescente de termo geral a_n para a qual, $\forall n \geq 1$, existe $n > 0$ tal que $a_n < n$. Conforme GUIDORIZZI (1994), pelo teorema de Taylor, a série: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$ converge para e^x se for tomado um n suficientemente grande.

Euler também definiu a potência e^z em série de Taylor de maneira análoga ao número e, ou seja: $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$, em que

$z = x+iy$. Assim escreveu $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n!} + ...$

e $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$, em que $z = x + yi$.

Porém, deve-se observar que para $y = 0$, a exponencial se reduz a $e^z = e^x$, mas se $x = 0$, então z seria um número imaginário puro, pois $z = iy$.

Daí, a série de potência para o $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ passaria a:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ...\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + ...\right)$$

Quando $x=0$ em $z=x+iy$, tem-se $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Sabe-se que para $x \neq 0$, $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ onde $e^x = |z|$ e $y = \arg z$ que é medido em radianos. De fato, $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ e $z = x+iy = |z|(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ com $|z| = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \operatorname{sen} y)^2} = e^x$.

Geometricamente, e^z é o ponto cuja distância até a origem representa e^x, e o ângulo formado entre o segmento e o eixo das abscissas é o argumento de z, Figura 1.

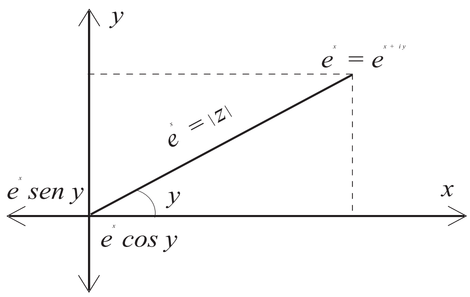

Figura 1

"Euler definiu o logaritmo de um número complexo $w \neq 0$ como um número complexo z tal que $e^z = w$", (LIMA, 1991 p. 184).$\forall$ w em função de z é uma função de variável complexa z, isto é, $w=f(z)=e^z$, em que z pertence ao conjunto S, denominado conjunto das vizinhanças de z e passa a ser o domínio de definição da função w, Fgura 2.

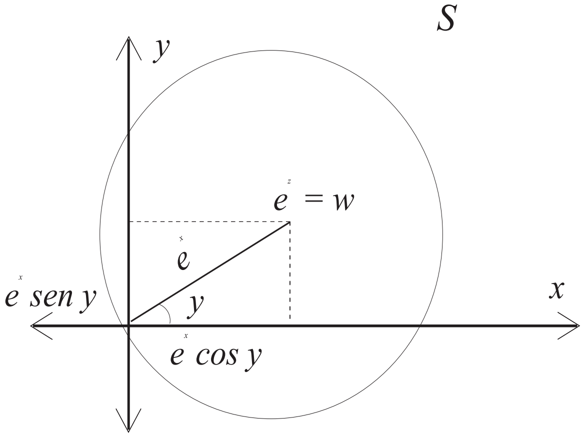

Figura 2

Seja S_1[1] de comprimento igual a 2π e t a medida de um arco em S_1, partindo do ponto U=(1,0) no sentido anti-horário. Para se descrever um arco de comprimento $|t| > 2\pi$ ou seja $t > 2\pi$ ou $t < -2\pi$, é necessário que se tenha mais de uma volta em torno de S_1. Segundo LIMA (1991), isto poderá ser mostrado pela função de Euler, que é definida por $E: IR \rightarrow S_1$ na qual para cada valor real de t, a função E faz corresponder um ponto $E(t)$ em S_1, Figura 3.

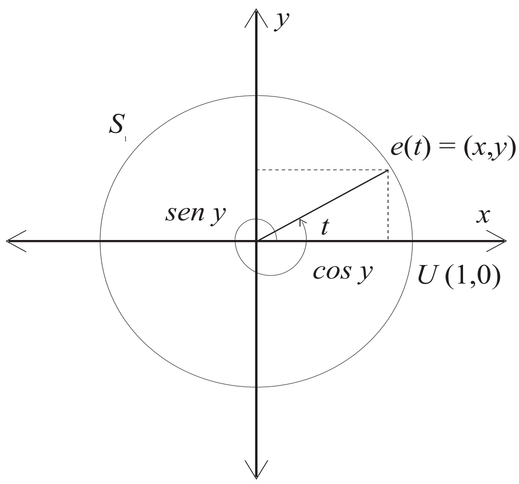

Figura 3

[1] S_1 é o conjunto dos pontos do plano cuja distância até a origem é igual a 1. Assim, o ponto $z = (x, y)$ pertence a S_1, se e somente se, $x^2 + y^2 = 1$

A extremidade final do arco dada por $E(t)$ é o ponto de intersecção do eixo das abscissas x com o eixo das ordenadas y, isto é, $E(t)=(x,y)$. Sabe-se que $cos\ t=x$ e $sen\ t=y$, pela função de Euler tem-se $E(t)=(cos\ t, sen\ t), \forall\ t \in IR$.

Tomando-se arbitrariamente $t=2k\pi$, onde $k \in Z$, tem-se $E(2k\pi)=U$, em que para:

$k=-1, E(-2\pi)=(1,0)$;

$k=0, E(0)=(1,0)$;

$k=1, E(2\pi)=(1,0)$;

Mas $E(t)$ é uma função periódica. De fato $E(t+2k\pi)=E(t), \forall\ t \in IR$, assim:

$E(t+2k\pi)=(cos\ (t+2k\pi), sen\ (t+2k\pi))=$

$=(cos\ t\ cos\ 2k\pi - sen\ t\ sen\ 2k\pi, sen\ t\ cos\ 2k\pi+sen\ 2k\pi\ cos\ t)=$

$=(cos\ t.\ cos 2k\pi, sen\ t.\ cos\ 2k\pi)=$

$=(cos\ t, sen\ t)= E(t)$.

As funções *cos t* e *sen t* são funções periódicas de período 2π. Pela função de Euler são consideradas funções da variável real t. Portanto, para todo t real, tem-se $cos\ t=cos\ (t+2\pi)$ e $sen\ t=sen\ (t+2\pi)$ e para qualquer k inteiro tem-se $cos\ t=cos\ (t+2k\pi)$ e $sen\ t=sen\ (t+2k\pi)$, pois, para um múltiplo inteiro de 2π, tem-se outro período para estas funções.

Para Lima (1991), a função de Euler, $E: IR \rightarrow S_1$ estabelece uma conexão entre logaritmo, números complexos e trigonometria, efetuando uma síntese entre elas.

Como w é uma função de variável complexa z, então se $w=r(cos\theta+i.sen\theta)=r.e^{i\theta}$ onde $log\ w=z, w\neq 0$ tem-se $w=e^z$.

Mas $e^{ln\ r}=r$ e $w=e^{ln\ r}(cos\ \theta+i.sen\ \theta)=e^z$, onde $w=e^{ln\ r}.e^{i\theta}=e^{ln\ r+i\theta}=e^z$, portanto $z=ln\ r+i\theta$.

Como $r=|w|$ e $log\ w=log\ r+i\theta$ então $log\ w= log\ |w|+i(\theta+2k\pi)$, $k \in Z$ (1).

Isto mostra que o logaritmo de um número complexo tem uma infinidade de valores à medida que se toma um k inteiro qualquer. E ainda, todos os logaritmos de um mesmo número são imaginários, com exceção se o número for positivo. Mas os números negativos ou imaginários possuem logaritmos imaginários.

Pode-se escrever um número x real e positivo qualquer da seguinte forma: $-x=x(cos\ \pi+i.sen\ \pi)=xe^{i\pi}$ e para todo k inteiro fica $-x=x[cos\ (\pi+2k\pi)+i.sen\ (\pi+2k\pi)]= xe^{\pi i(1+2k)}$, fazendo-se $w=-x$ em (1), $log(-x)=log\ x+log\ e^{\pi i(1+2k)}$ $= log\ x+\pi i(1+2k)$ (2).

Qualquer que seja k inteiro, nunca se terá um número real para log (-x). Por exemplo, fazendo-se em (2) x = 1, tem-se:

$log\,(-1)=log\,1+\pi\, i(1+2k)$ (3)

Fazendo-se em (3) $-2\leq k\leq 2$, com $k\in Z$, tem-se os seguintes logaritmos.

$k=1$, $log\,(-1)=log\,1+\pi\, i(1+2)=3\pi\, i$;

$k=-1$, $log\,(-1)=log\,1+\pi\, i(1-2)=-\pi\, i$;

$k=2$, $log\,(-1)=log\,1+\pi\, i(1+4)=5\pi\, i$;

$k=-2$, $log\,(-1)=log\,1+\pi\, i(1-4)=-3\pi\, i$;

Por outro lado, se x ainda é um número real positivo e, $e^{y}=x$, tem-se também $e^{y+2k\pi i}=x$, $\forall\; k\in Z$, assim, todos os números da forma $y+2k\pi\, i$, $k\in Z$ são logaritmos de x. Apenas $k = 0$ fornece um logaritmo real, os demais são todos complexos.

Euler observou que, se o símbolo $log\, w$ for interpretado como o conjunto de todos os números complexos z, tais que $e^{z}=w$, continua válida a propriedade do logaritmo do produto, ou seja, um número complexo é logaritmo de $(w\, z)$, se e somente se, $log\,(w\, z)=log\, w+log\, z$, como pretendia Bernoulli.

A autenticidade de que, para cada número existe uma infinidade de logaritmos, como Euler pretendia, pode ser verificada observando-se que a única função contínua $\varphi: C^{*}\rightarrow C$ tal que $\varphi\,(w\, z)= \varphi\,(w)+ \varphi\,(z)$ e $\varphi\,(e)=1$, é a função definida por $\varphi\,(w)=log\,|w|$.

Isto significa que, ao admitir-se uma infinidade de logaritmos para cada número, manteve-se a validade da regra $e^{log\, w}=w$, como queria Leibniz. O que não ocorreria se para cada número houvesse apenas um logaritmo.

CONCLUSÃO

Baseado neste estudo, pode-se concluir que, para cada número real negativo, existe uma infinidade de logaritmos complexos ou imaginários. Nenhum deles é real. Portanto, só tem sentido falar-se em logaritmo de um número real negativo se o seu campo de existência for o conjunto dos números complexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. 1974. **História da matemática.** 3.ed. São Paulo: Edgar Blücher.

CHURCHILL, Ruel V. 1975. **Variáveis complexas e suas aplicações.** 2.ed. São Paulo: McGraw-Hill.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. 1994. **Um curso de cálculo.** 2.ed. São Paulo: LTC editora.

LIMA, Elon Lages. 1991. **Meu professor de matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de matemática.

_____.1991. **Logaritmos.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.