DISCIPLINARUM SCIENTIA

Disciplinarum Scientia. Série: Naturais e Tecnológicas
Santa Maria, v. 27, n. 1, p. 53-72, 2026

Recebido em: 28.06.2025. Aprovado em: 24.10.2025.
ISSN 2176-462X | DOI: doi.org/10.37779/nt.v27i1.5457

GEOMETRIA FRACTAL NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES: UMA PROPOSTA VIA ORIGAMI[1]

FRACTAL GEOMETRY IN TEACHER EDUCATION: A PROPOSAL THROUGH ORIGAMI

Quendra Silva Cartier Larangeira[2], Carmen Vieira Mathias[3] e Alice de Jesus Kozakevicius[4]

RESUMO

A Geometria Fractal (GF), uma área matemática emergente, tem se destacado na Educação Básica, conforme indicado por documentos oficiais. Este estudo qualitativo investiga a percepção de futuros professores de Matemática sobre a aplicabilidade da GF no ensino básico. Para isso, foi realizada uma oficina de construção de fractais utilizando origami, integrando conceitos teóricos da GF e do origami. O trabalho também incluiu uma análise dos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática das universidades federais do Rio Grande do Sul. Os resultados indicam a necessidade de incluir a GF nos currículos de formação de professores, destacando a viabilidade de se trabalhar esses conceitos durante a graduação para aprimorar as habilidades de visualização espacial dos educadores. Essa inserção pode enriquecer o ensino de Matemática, oferecendo uma nova perspectiva sobre sua relação com o mundo real. O estudo serve como ponto de partida, ressaltando a necessidade de dar continuidade à investigação sobre a presença da GF na Educação Básica e na formação de docentes, visando a uma compreensão mais integrada e robusta do tema no contexto educacional. A continuidade dessas investigações é crucial para a implementação eficaz da GF na prática pedagógica.

Palavras-chave: Geometria Não Euclidiana; Matemática; Formação de professores; Dobraduras.

ABSTRACT

Fractal Geometry, an emerging mathematical area, has been gaining prominence in Basic Education, as indicated by official documents. This qualitative study investigates the perception of future teachers about the applicability of Fractal Geometry in teaching. To this end, a workshop was held on building fractals using origami, integrating theoretical concepts of Fractal Geometry and origami. The work also included an analysis of the curricula of the Mathematics Degree courses at the federal universities of Rio Grande do Sul. The results indicate the need to include Fractal Geometry in teacher training curricula, highlighting the feasibility of working on these concepts during undergraduate courses to improve educators' spatial visualization skills. This inclusion can enrich mathematics teaching, offering a new perspective on its relationship with the real world. The study serves as a starting point, highlighting the need to continue research on the presence of Fractal Geometry in Basic Education and in teacher training, aiming at a more integrated and robust understanding of the topic in the educational context. The continuity of these investigations is crucial for the effective implementation of Fractal Geometry in pedagogical practice.

Keywords: *Non-Euclidean Geometry; Mathematics; Teacher training; Folding.*

1 Trabalho de Iniciação Científica.

2 Universidade Federal de Santa Maria - UFSM. E-mail: quendrascl@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0001-9390-5006

3 Universidade Federal de Santa Maria - UFSM. E-mail: carmen@ufsm.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5667-159X

4 Universidade Federal de Santa Maria - UFSM. E-mail: alice.kozakevicius@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6197-4800

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal (GF), um ramo recente da Matemática, vem se destacando cada vez mais por suas aplicações (Juraev; Mammadzada, 2024) e pela relevância no contexto educacional contemporâneo (Santos, 2020). Reconhecida por sua capacidade de descrever estruturas complexas que não se adequam aos paradigmas da Geometria Euclidiana (Mandelbrot, 1997), essa área emergente convida a uma reflexão mais profunda sobre suas potenciais contribuições para o ensino e para as atividades em sala de aula (Oliveira, 2019).

Ao considerar tais possibilidades, torna-se necessário refletir sobre o modo como a GF pode ser inserida no contexto escolar, especialmente na Educação Básica. Essa discussão passa, inevitavelmente, pela formação inicial de professores. A compreensão, por parte dos futuros docentes, acerca dos fundamentos e aplicações da GF pode influenciar diretamente a forma como os conteúdos matemáticos são abordados em sala de aula (Mossulin; Medeiros, 2023). Entretanto, essa inserção ainda é incipiente nos cursos de Licenciatura, o que aponta para lacunas curriculares importantes (Oliveira, 2020).

Nesse cenário, o uso de estratégias didáticas inovadoras pode favorecer tanto a aprendizagem dos conceitos que dizem respeito à GF quanto à formação pedagógica. Uma dessas estratégias é a utilização do origami como recurso de ensino, o qual já possui uma trajetória consolidada no campo da educação matemática, com registros de produções acadêmicas desde a década de 1970 (Nampo *et al.*, 2023). Ao ser aplicado ao estudo da GF, o origami permite uma conexão entre teoria e prática, favorecendo a visualização de conceitos abstratos e promovendo uma aprendizagem significativa (Budinski *et al.*, 2019; Santos; Medeiros, 2024).

Além disso, observa-se que, embora a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomende o trabalho com fractais no Ensino Médio (Brasil, 2018), os cursos de Licenciatura em Matemática, em sua maioria, não contemplam disciplinas específicas voltadas a essa temática. Nesse contexto, torna-se relevante examinar os currículos das universidades para identificar se e como a GF é contemplada na formação docente.

Diante desse panorama, o presente artigo apresenta os resultados de uma pesquisa qualitativa, desenvolvida como trabalho de conclusão de curso, que teve como objetivo investigar a percepção de licenciandos em Matemática sobre a aplicabilidade da GF no ensino básico, além de identificar sua presença nos currículos de formação inicial. A investigação foi conduzida em duas frentes complementares: a análise documental dos Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) de Licenciatura em Matemática de universidades públicas do estado do Rio Grande do Sul e a realização de uma oficina prática com construção de fractais por meio da técnica do origami, envolvendo acadêmicos de uma universidade situada na região Sul do Brasil.

2 AS GEOMETRIAS NAS UNIVERSIDADES FEDERAIS DO RIO GRANDE DO SUL

De acordo com Leivas (2009), a Geometria é abordada de duas maneiras no processo de formação de professores. A primeira refere-se às disciplinas da grade curricular, que frequentemente são tratadas de forma isolada, sem conexão com outras áreas do conhecimento, mesmo quando aspectos geométricos são utilizados para facilitar a compreensão de outros conteúdos. A segunda forma, por sua vez, diz respeito a um processo de formação continuada que, conforme o autor, ocorre com poucos professores, devido à falta de incentivo à participação em atividades extracurriculares.

Nesse contexto, as legislações que regulam os cursos de formação de professores de Matemática preveem o estudo de conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica, com destaque para a Geometria, entre outras áreas. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) inclui, em suas competências e habilidades, a abordagem de fractais. Esse panorama nos leva a questionar, especificamente no contexto do estado do Rio Grande do Sul, como a GF está presente nos cursos de formação de professores de Matemática.

Buscando responder a essa pergunta, analisam-se os currículos do ano de 2023 dos cursos de Matemática das universidades federais do RS, a saber: Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Universidade Federal de Pelotas (UFPel), Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e Universidade Federal do Pampa (Unipampa).

A UFSM possui três cursos de graduação em Matemática, sendo dois de Licenciatura (diurno e noturno) e um de Bacharelado em Matemática (BM). Os cursos de Licenciatura possuem paridade, ou seja, contam com as mesmas disciplinas e ementas, ofertadas semestralmente, com alternância de turnos. No entanto, o curso de Licenciatura Diurno (LD) tem duração de 8 semestres, enquanto o curso de Licenciatura Noturno (LN) tem duração de 12 semestres (UFSM, 2023).

A UFRGS oferece o curso de Bacharelado com duas ênfases: Bacharelado em Matemática (BM) e Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional, além dos cursos de LD e LN. Nessa instituição, os cursos de Licenciatura possuem a mesma estrutura curricular, sendo o diurno de 8 semestres e o noturno, de 10 semestres. Ambos os cursos de Bacharelado têm duração de 8 semestres (UFRGS, 2023).

A UFPel não possui curso de BM, mas oferece dois cursos de Licenciatura (diurno e noturno), com as mesmas disciplinas, organizadas de forma distinta nos respectivos turnos. Assim como na UFRGS, o curso de LD tem duração de 8 semestres e o de LN, de 10. Além disso, a UFPel oferta o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade Educação a Distância (EaD) em mais de 20 polos, com duração de 8 semestres (UFPel, 2020; UFPel, 2021).

A FURG oferta dois cursos de Matemática: um com habilitação para Licenciatura e outro de Bacharelado em Matemática Aplicada. O curso de Licenciatura é ofertado no turno noturno e tem duração de 9 semestres; já o curso de Bacharelado é ofertado no diurno, com duração de 8 semestres (FURG, 2023).

A Unipampa é uma instituição multicampi, situada em dez cidades da metade sul do estado do RS: Alegrete, Bagé, Caçapava do Sul, Dom Pedrito, Itaqui, Jaguarão, Santana do Livramento, São Borja, São Gabriel e Uruguaiana. Os campi de Bagé e Itaqui oferecem os cursos de Licenciatura em Matemática, ambos com funcionamento noturno. Em Bagé, o curso possui duração de 9 semestres; em Itaqui, 8 semestres (Unipampa, 2023a; Unipampa, 2023b).

A Tabela 1 apresenta as disciplinas de Geometria identificadas nos cursos analisados, a saber: Geometria Analítica (GA), Geometria Plana (GP), Geometria Espacial (GEsp), Geometrias Não Euclidianas (GnE) e GF, com ênfase nos conteúdos previstos em cada uma das instituições anteriormente citadas. No quadro, as disciplinas estão categorizadas como obrigatórias (Ob), optativas (Op) ou não constatadas (NC), acompanhadas da respectiva carga horária semestral.

Tabela 1 - Geometria nas universidades federais (UF) do Rio Grande do Sul.

UF	Curso(s)	GA	GP	GEsp	GnE	GF	Observações
UFSM	LD e LN	Ob 90	Ob 90	Ob 90	Op 60	NC	Ga E Gp comuns ao curso de Bacharelado no turno Diurno. Oferta a disciplina de Geometria Diferencial (GD) como optativa.
UFRGS	LD e LN	Ob 60	Ob 75	Ob 150	NC	NC	Os fractais são mencionados na disciplina Computador na Matemática Elementar i
UFPel	EaD	Ob 60	Ob 60	Ob 60	NC	NC	
	LD e LN	Ob 60	Ob 60	Ob 60	NC	NC	A disciplina de GD consta como opcional.
FURG	LN	Ob 60	Ob 60	Ob 60	NC	NC	A abordagem dos conteúdos de GP e GEsp possui um enfoque para educação básica.
Unipampa (Itaqui)	LN	Ob 60	Ob 60	Ob 60	NC	NC	
Unipampa (Bagé)	LN	Ob 60	Ob 60	Ob 60	NC	NC	

Fonte: Construção das autoras.

Ao analisar os PPC, nota-se que, exceto pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), nenhuma das demais universidades faz referência explícita a Geometrias Não Euclidianas, nem mesmo nas disciplinas optativas. Observa-se, ainda, que as disciplinas obrigatórias que abordam conteúdos de Geometria são praticamente as mesmas em todos os PPC. No campus de Itaqui da Unipampa, a disciplina de GF aparece, pela primeira vez nesta análise, como optativa. No entanto, ao buscar sua ementa no PPC de 2023 - o mais recente disponível no site institucional - não foi localizado nenhum conteúdo referente à disciplina. A busca pelo código da disciplina no Google levou à sua descrição no PPC de 2019. Segundo informações da atual coordenação do curso, a disciplina nunca foi ofertada e, por esse motivo, foi retirada do PPC em sua versão mais recente.

A partir da análise das disciplinas de Geometria nos cursos de formação de professores de Matemática no estado do Rio Grande do Sul, constata-se que a GF não está contemplada de forma explícita em nenhum dos currículos analisados. As razões para essa ausência podem ser diversas, mas destaca-se que os futuros professores não têm contato sistemático com a GF durante a graduação, uma vez que essa temática não é abordada, nem mesmo de forma parcial, ao longo do curso.

Tal lacuna acaba se refletindo diretamente na Educação Básica, que deixa de usufruir de um conteúdo com elevado potencial para o desenvolvimento da criatividade, do raciocínio lógico e da capacidade de abstração dos estudantes. Além disso, a GF possui grande relevância por suas associações com elementos da natureza e aplicações em diversas áreas do conhecimento. Essa lacuna também compromete o atendimento às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma vez que os conteúdos relacionados à GF não são contemplados na formação inicial dos docentes, dificultando sua abordagem adequada no contexto da Educação Básica.

Dessa forma, observa-se a necessidade de fomentar o estudo da GF sob diferentes abordagens, com ênfase na produção de conhecimento voltado tanto para a formação docente quanto para a Educação Básica. Na próxima seção, apresentam-se os conceitos e definições relacionados à GF e ao origami, que serão retomados e aplicados posteriormente durante a oficina.

3 CONCEITOS PRELIMINARES

Nesta seção, apresenta-se uma síntese dos principais conceitos relacionados à GF, com base na abordagem teórica de Lutz (2020), que destaca suas características fundamentais e aplicações no ensino. Em complemento, são discutidos os aspectos pedagógicos do uso do origami como recurso didático, conforme proposto por Queiroz (2019). A articulação entre esses dois elementos fornece o embasamento teórico para a proposta prática desenvolvida na oficina.

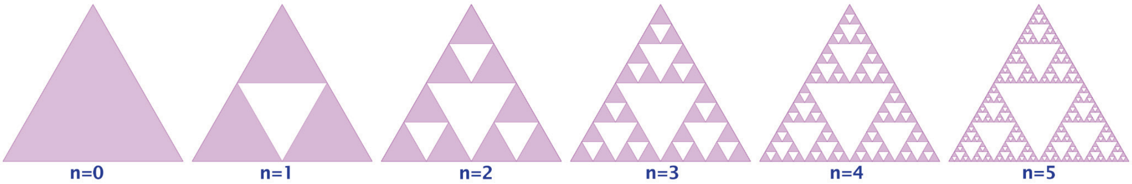
Buscando entender e modelar a regularidade presente na natureza, além de descrever curvas patológicas, Benoit Mandelbrot formulou, em 1975, a GF (Mandelbrot, 1997). A palavra *fractal* deriva do latim *fractus*, que significa “quebrado”. Nascimento, Silva e Maciel (2012, p. 117) acrescentam que “o termo fractal foi criado para designar um objeto geométrico que nunca perde a sua estrutura, qualquer que seja a distância da visão”.

Essa geometria estuda, portanto, estruturas “quebradas” (Oliveira, 2019), com propriedades e características distintas das demais geometrias. A GF é ainda considerada uma geometria não euclidiana, uma vez que nenhum dos postulados de Euclides é satisfeito (Nascimento; Silva; Maciel, 2012).

Segundo Mandelbrot (1997), uma figura autossimilar é definida como aquela na qual cada parte é geometricamente semelhante ao todo. Associado a isso, um fractal é caracterizado por sua complexidade infinita, já que é gerado por processos iterativos aplicados indefinidamente. Quanto maior o número de iterações, maior o nível de detalhamento incorporado à estrutura gerada.

Na Figura 1, são ilustrados os cinco primeiros objetos do processo iterativo cujo limite é a figura fractal autossimilar denominada Triângulo de Sierpinski.

Figura 1 - Triângulo de Sierpinski: cinco primeiras iterações.



Fonte: Construção das Autoras.

O processo inicia-se com um triângulo equilátero, que é subdividido em quatro triângulos semelhantes, sendo o triângulo central removido. A cada etapa, esse procedimento é repetido nos triângulos restantes.

Além da autossimilaridade e da complexidade infinita, a noção de dimensão definida na GF difere da dimensão tradicional da Geometria Euclidiana (GE), na qual os objetos possuem dimensões inteiras (linhas têm uma dimensão; superfícies, duas; e sólidos, três). Na GF, entretanto, os objetos apresentam estruturas irregulares e podem possuir dimensões fracionárias, refletindo sua complexidade. Mandelbrot (1997) distingue esses dois tipos de dimensão: a dimensão topológica (tradicional) e a dimensão fractal (também conhecida como dimensão de Hausdorff-Besicovitch) .

A dimensão fractal é uma medida que quantifica como um objeto fractal preenche o espaço em que está inserido. Essa característica reflete a complexidade e a autossimilaridade de um fractal. Por exemplo, quanto mais "rugosa" ou "detalhada" for uma curva, mais ela preencherá o plano, e sua dimensão fractal estará em algum lugar entre 1 e 2.

O conceito central da dimensão fractal reside na observação de como o número de elementos necessários para cobrir um fractal muda à medida que a escala desses elementos varia. No método Box-Counting[5], por exemplo, cobre-se o fractal com caixas de tamanho r e conta-se o número de caixas $N(r)$ que intersectam o fractal.

Conforme Moreira (2022), para um objeto euclidiano de dimensão topológica d, ao se reduzir o tamanho das caixas pela metade (de r para $\frac{r}{2}$), o número de caixas necessárias para cobrir o objeto aumentará por um fator de 2^d. Portanto, para uma reta ($d = 1$), $N(\frac{r}{2}) = 2N(r)$. Para um quadrado ($d = 2$), $N(\frac{r}{2}) = 4N(r)$. E $N(\frac{r}{2}) = 8N(r)$ para um cubo ($d = 3$).

Para um objeto fractal, no entanto, a relação entre o número de caixas $N(r)$ e o tamanho r, obtida pelo método Box-Counting, é fundamentalmente diferente da relação anterior. Para fractais, essa relação é expressa pela potência $N(r) = Cr^{-D}$, considerando que $N(r)$ é o número de caixas de tamanho r necessárias para cobrir o fractal, C é uma constante de proporcionalidade e D é a dimensão fractal do objeto.

Assim, para calcular o valor de D, aplica-se o logaritmo em ambos os lados da equação: $\log(N(r)) = \log(Cr^{-D})$. Usando as propriedades dos logaritmos, obtém-se: $\log(N(r)) = \log(C) - D \cdot \log(r)$.

5 Disponível em: https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/07/box-counting/

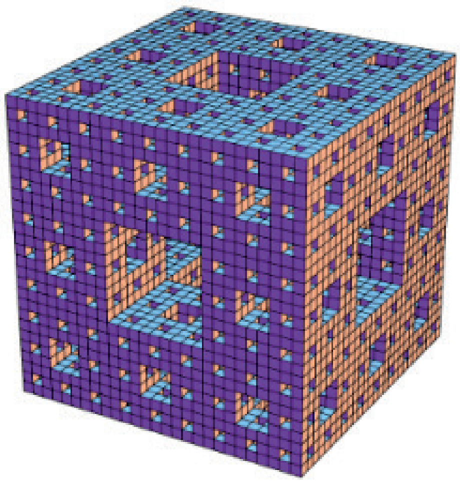
Em um gráfico logarítmico (com *log(N(r))* versus *log(r)*), *D* é o coeficiente angular (inclinação) da reta. Pode-se interpretar ainda a dimensão fractal D como sendo o expoente que descreve a taxa de crescimento de *N(r)* à medida que r diminui.

A partir da expressão *log(N(r)) = log(C) - D • log(r)*, pode-se ainda isolar *D* e fazer o tamanho de *r* tão pequeno quanto se queira, o que permite determinar a dimensão *D* por:

$$D = \lim_{r \to 0} \frac{-log\left(N(r)\right)}{log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

A Figura 2 ilustra um exemplo do objeto fractal, denominado Esponja de Menger, obtido por meio de um processo iterativo com remoção de partes a cada iteração.

Figura 2 - Esponja de Menger.

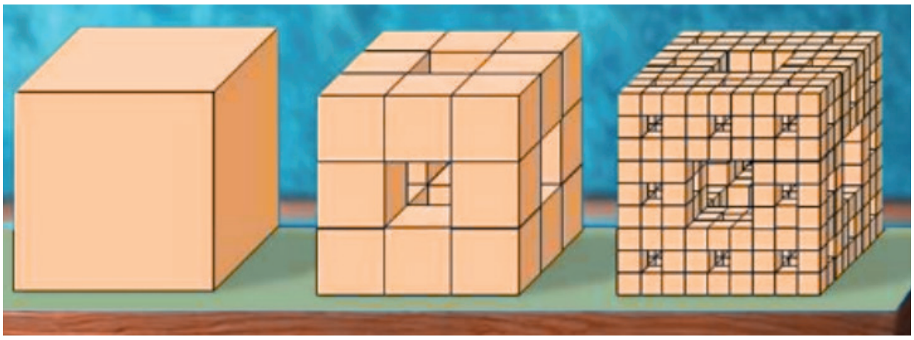


Fonte: Google fotos.

O processo iterativo para a obtenção da Esponja de Menger consiste na divisão de um cubo de aresta *l* em 27 cubos menores, de modo que a aresta de cada cubo menor tenha medida *l*/3. Após esta primeira etapa, removem-se o cubo central e os 6 cubos centrais de cada face, resultando em 20 cubos. Em seguida, divide-se cada um dos 20 cubos restantes em outras 27 partes cúbicas. Novamente, retiram-se a parte localizada no centro de cada um deles e os centro de cada uma das faces, resultando em novos 20 cubos menores para cada um dos cubos obtidos na primeira interação. Esse processo é repetido infinitas vezes.

Para o cálculo da dimensão fractal D da Esponja de Menger, primeiramente deve-se definir coberturas para o conjunto, de modo que as arestas r das caixas sejam cada vez menores, como ilustra a Figura 3, para as duas primeiras etapas do processo iterativo descrito acima.

Figura 3 - Coberturas da esponja de Menger.



Fonte: Gerado por IA.

Na sequência, para estimar-se o valor de D no caso da Esponja de Menger, considera-se a medida da aresta do cubo como sendo 1 unidade de comprimento. Assim, foi definido o tamanho inicial r como 1 unidade, sendo necessária 1 caixa para a cobertura. Em seguida a aresta da caixa definida foi de 1/3 de unidade, sendo preciso 20 caixas para a cobertura. A próxima aresta possui 1/9 de unidade, sendo o número de caixas necessárias igual a 400 para se ter uma cobertura da figura. Para caixas de aresta $1/3^n$ de unidade, contando apenas as caixas que cobrem a figura, serão necessárias 20^n caixas para se ter uma cobertura. A partir disso, pode-se construir a Tabela 1:

Tabela 1 - Número de caixa necessárias para se ter uma cobertura de acordo com o tamanho da aresta r.

i	r_i	N(r)
1	1	20^0
2	1/3	20^1
3	$1/3^2$	20^2
...		
n	$1/3^n$	20^n

Fonte: Construção do Autor.

Assim, para esse caso,

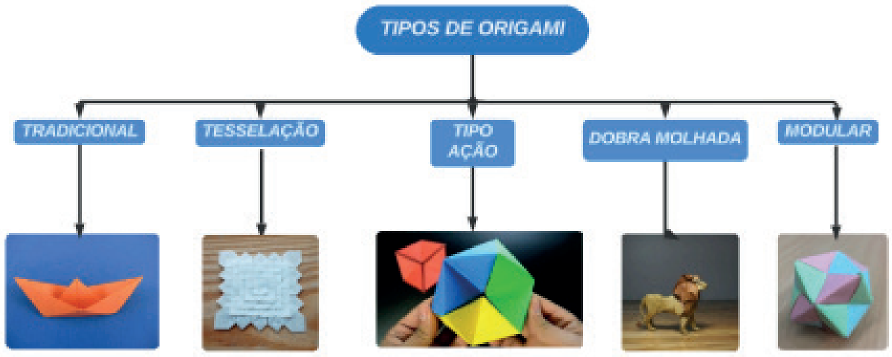
$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{-log(20^n)}{log\left(\frac{1}{3^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nlog(20)}{nlog(3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{log(20)}{log(3)} = \frac{log(20)}{log(3)} \cong \frac{1,301}{0,477} = 2,7268$$

Observa-se assim, que a Esponja de Menger, possui dimensão topológica 3, enquanto a dimensão fractal é cerca de 2,7268

No âmbito deste trabalho, o fractal Esponja de Menger possui grande destaque, visto que será o foco das construções realizadas com origami. Conforme Graciolli (2021) a palavra origami vem do japonês, derivada de *oru* (dobrar) e *kami* (papel). Trata-se da arte de dobrar papel para criar figuras tridimensionais, sem o uso de cortes ou cola (Queiroz, 2019). Inicialmente, no século IV, os origamis tinham fins religiosos (Monteiro, 2008). No entanto, foi com os trabalhos de

Akira Yoshizawa (1911-2005) e Sam Randlett (1935-2015) que a técnica foi sistematizada e uma simbologia própria foi desenvolvida, dando origem ao origami moderno. O livro de Yoshizawa, *Nova Arte do Origami* (1954), foi crucial para a difusão internacional da prática, ao introduzir diagramas como forma de interpretação dos modelos. A Figura 3 apresenta exemplos de diferentes objetos construídos com origami, utilizando diversas formas e técnicas de dobradura, conforme descrito em Queiroz (2019).

Figura 3 - Esquema com a classificação de origamis, dependendo da técnica das dobras.

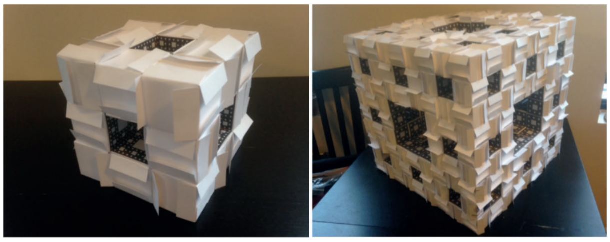


Fonte: Sistematizado pelas autoras.

Ainda, conforme Queiroz (2019), o origami do tipo tesselação é obtido por meio de dobras sucessivas em uma folha de papel, formando um padrão repetitivo que cobre toda a superfície, sem sobreposições. Já o origami por dobradura molhada consiste em umedecer o papel durante ou após a dobradura, permitindo criar modelos com formas mais arredondadas e suaves. Os origamis modulares, por sua vez, são compostos por várias unidades dobradas individualmente - chamadas módulos - que se encaixam entre si para formar estruturas maiores e mais complexas.

Neste trabalho, adota-se o modelo modular *Business Card Cube*, que conforme Mitchell (2020) foi criado em 1882 e permite a construção de cubos a partir da dobradura de seis cartões de visita. Esse modelo foi adaptado por Jeannine Mosely no *Business Card Menger Sponge Project*, iniciado em 1995 (Boakes, 2020), com o objetivo de representar a Esponja de Menger. O projeto, que teve duração de nove anos, teve como objetivo construir a terceira iteração da Esponja de Menger utilizando 66.048 cartões de visita. Os cubos resultantes funcionam como módulos que, ao serem conectados, formam a estrutura do fractal, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4 - Duas primeiras iterações da Esponja de Menger utilizando o modelo Business Card Cube.



Fonte: https://mathgrrl.com/hacktastic/2014/11/mega-menger/.

Segundo Lutz (2020), esse fractal tridimensional é uma extensão do Conjunto de Cantor e do Tapete de Sierpinski. Embora todos esses fractais sejam construídos, teoricamente, por meio de processos iterativos nos quais, a cada iteração, partes do objeto são removidas, a construção via origami segue uma lógica oposta: os módulos são sistematicamente encaixados para formar a estrutura em um determinado nível do processo iterativo previamente definido.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo configura-se como uma pesquisa aplicada, com o objetivo de gerar conhecimentos voltados à aplicação prática, em especial à proposição de alternativas para o uso de material didático (Silva, 2005). Adota-se uma abordagem qualitativa, a qual considera a interação entre o ambiente acadêmico e o licenciando, reconhecendo-se a indissociabilidade entre a objetividade do contexto e a subjetividade dos sujeitos envolvidos (Gerhardt, 2013).

A investigação foi desenvolvida no ambiente universitário, tendo como público-alvo discentes do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do sul do país, sem exigência de pré-requisitos para participação. Os dados foram produzidos a partir da realização de uma oficina e da aplicação de questionários de caráter misto. A oficina, composta por atividades teóricas e práticas sobre GF, teve como objetivos a construção do fractal Esponja de Menger por meio de origami modular, o registro de experiências e percepções dos participantes, bem como a promoção de um espaço colaborativo de aprendizagem. As atividades ocorreram em dois encontros, totalizando quatro horas, distribuídas em dois dias.

Em conformidade com os protocolos éticos da instituição, a atividade foi precedida pela leitura e assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). A produção de dados incluiu observações, anotações em diário de bordo e registros fotográficos. A participação foi documentada por meio de formulários de inscrição, os quais continham informações de contato e questões relativas aos conhecimentos prévios dos participantes acerca da geometria. Ao todo, 15 estudantes se inscreveram, sendo 13 presentes no primeiro encontro e 10 no segundo. Devido ao anonimato dos questionários, os participantes foram identificados por códigos: P1 a P13 no primeiro dia e D1 a D10 no segundo. Quanto à formação prévia em geometria, seis participantes haviam cursado a disciplina de GP e GEsp, três haviam cursado apenas GP, e dois não haviam cursado nenhuma das duas. Tais informações foram consideradas relevantes para a análise das dificuldades encontradas pelos participantes ao longo da oficina, especialmente no que se refere à ausência de conhecimentos prévios relacionados aos conteúdos abordados.

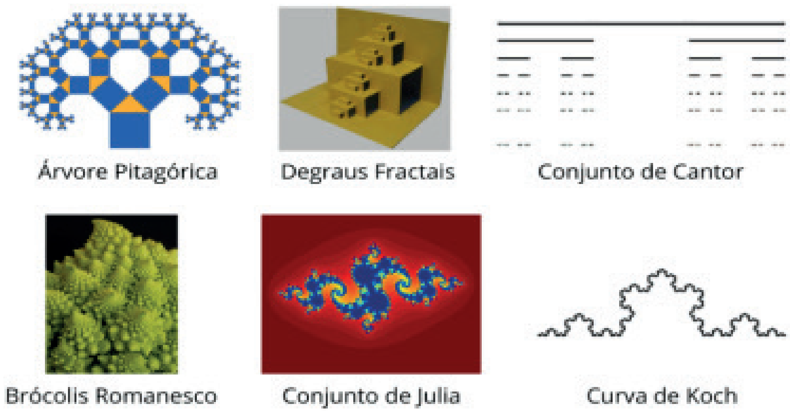
5 RELATO E ANÁLISES

Como mencionado anteriormente, os objetivos da oficina foram: apresentar a GF a professores de Matemática em formação; construir o fractal Esponja de Menger por meio de dobraduras; explorar propriedades geométricas fractais no referido fractal; discutir as possibilidades de uso da GF na Educação Básica; e identificar as habilidades espaciais envolvidas na construção do fractal. Inicialmente, serão descritas as dinâmicas realizadas, incluindo as respostas dos participantes aos questionários aplicados. Em seguida, apresenta-se a análise da folha de atividades que continha relacionadas à Esponja de Menger.

No primeiro encontro, o foco principal foi a introdução aos tópicos da GF, bem como o primeiro contato com a técnica do origami. Nesse contexto, foram apresentadas características e propriedades da GF. Os participantes foram incentivados a calcular a dimensão do Tapete e do Triângulo de Sierpinski. Também foi realizada uma breve contextualização histórica sobre o origami, seguida de uma atividade prática baseada no Módulo Fröbel (Queiroz, 2019), culminando na construção da Esponja de Menger em seu segundo nível iterativo, além do cálculo de sua dimensão fractal.

As atividades envolvendo GF e origami foram intercaladas pela aplicação de um questionário, ao final da parte teórica sobre fractais. Com o objetivo de explorar a percepção dos participantes sobre elementos matemáticos presentes nas imagens de fractais (Figura 5) no referido questionário, os participantes responderam a três questões: “1. Você consegue identificar padrões nas figuras? Quais?; 2. Você consegue identificar simetrias nas figuras? Onde?; 3. Cite um ou mais elementos matemáticos que você identificou nas figuras”.

Figura 5 - Exemplos de fractais disponibilizados aos participantes no Questionário.



Fonte: Sistematizado pelas autoras.

Em relação à primeira pergunta, a maioria dos participantes indicou ter identificado padrões. Cinco acadêmicos relataram, cada um à sua maneira, que as figuras apresentavam semelhanças em diferentes escalas. O participante P7 descreveu com detalhes os padrões observados em algumas figuras:

> Na Árvore Pitagórica: onde cada lado (catetos) dos triângulos corresponde ao comprimento de um lado de um quadrado. Degraus fractais: onde os prismas têm metade da largura do anterior. Conjunto de Cantor: onde a reta é dividida em três partes iguais - A, B e C - e a parte B é eliminada, repetindo-se o processo sucessivamente. Curva de Koch: um triângulo é inserido em dois lados de outro triângulo. (Resposta de P7)

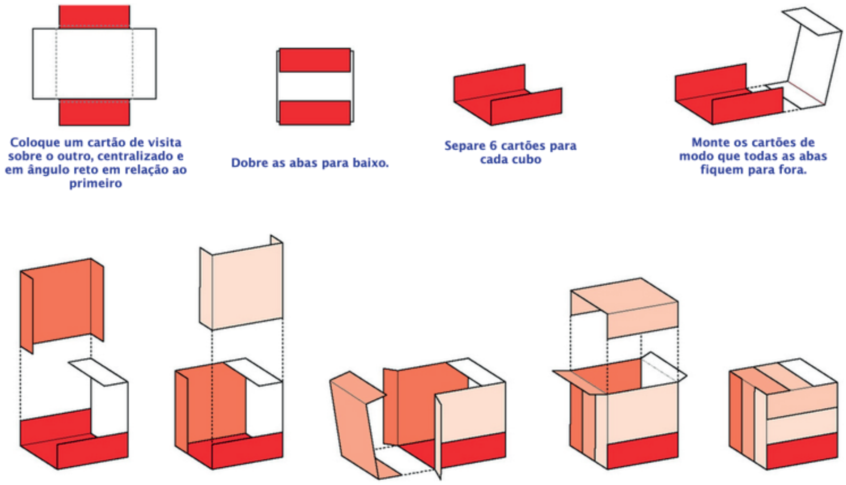
A partir dessa resposta, observa-se que o participante compreendeu o conceito da GF, especialmente a propriedade da auto-semelhança, identificando-a em quatro dos seis fractais apresentados. Em contrapartida, o participante P13 afirmou: "Entre todas [as figuras], exceto o Conjunto de Cantor, parece que têm ramificações todas iguais", o que indica que ele não reconheceu o padrão presente no Conjunto de Cantor. Ressalta-se que esse é o único exemplo da lista construído por ***remoção sucessiva***, o que pode ter dificultado sua percepção.

Quanto à segunda questão, que abordava a identificação de simetrias nas figuras. Os participantes P1, P2, P3, P5, P6, P9, P10 e P11 afirmaram ter identificado simetrias. Dentre eles, P6, P9 e P11 especificaram os fractais nos quais observaram tais propriedades: Conjunto de Cantor, Curva de Koch, Árvore de Pitágoras e Degraus fractais. Já os participantes P4 e P7, embora não tenham respondido diretamente à questão sobre simetrias, mencionaram os fractais Árvore Pitagórica, Brócolis Romanesco, Curva de Koch e Conjunto de Julia, o que pode indicar alguma percepção implícita de regularidade ou simetria.

Pode-se concluir, portanto, que os licenciandos conseguiram identificar simetrias nas figuras fractais, uma vez que a maioria demonstrou algum nível de compreensão do conceito. Vale destacar que simetria é um conteúdo comumente abordado em disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática.

A atividade seguinte envolveu a prática com origamis. De forma introdutória, foi apresentada uma breve contextualização histórica, seguida da confecção do Módulo Fröbel, com o objetivo de estimular habilidades manuais e a motricidade fina dos participantes. Todos demonstraram interesse e criatividade, realizando mais de um módulo ao longo da oficina. Na sequência, iniciou-se a construção dos módulos com cartões de visita. Foram confeccionados 4.000 cartões, número que incluía tanto os necessários para as primeiras iterações quanto os previstos para perdas ou descarte. Uma imagem com o passo a passo da construção foi disponibilizada (Figura 6), ao mesmo tempo em que a responsável pela oficina circulava entre os grupos demonstrando o processo de montagem.

Figura 6 - Protocolo para a construção dos cubos.

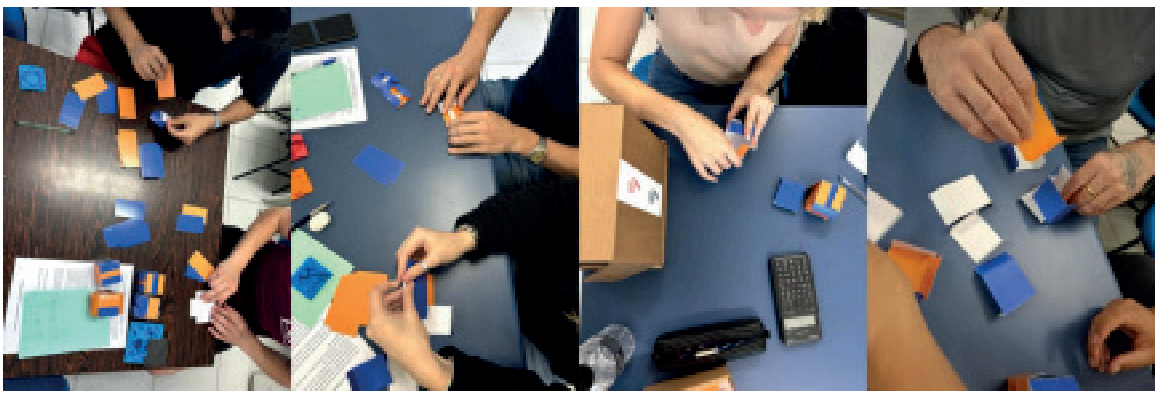


Fonte: Adaptado de https://www.cabinetmagazine.org/issues/24/wertheim_mosely.php.

Na confecção do módulo, não foram observadas grandes dificuldades. No entanto, dois desafios tornaram-se evidentes: o encaixe de um módulo no outro, para formar o cubo, e o encaixe de um cubo no outro. Em ambas as etapas, é necessário cuidado para que a estrutura não se desfaça. O papel utilizado (couchê 300g) é um material que, embora mais espesso do que uma folha de 75g, não possui rigidez suficiente.

Os estudantes demonstraram certa impaciência no início, mas rapidamente compreenderam como manusear os módulos para evitar que se desacoplassem. A etapa de encaixar um cubo em outro também apresentou desafios, embora alguns participantes tenham demonstrado facilidade nesse processo. Destacaram-se as diferentes estratégias adotadas pelos participantes durante a montagem da primeira iteração da Esponja de Menger. A Figura 7 ilustra esta dinâmica.

Figura 7 - Confecção dos cubos via origami modular no primeiro dia da oficina.

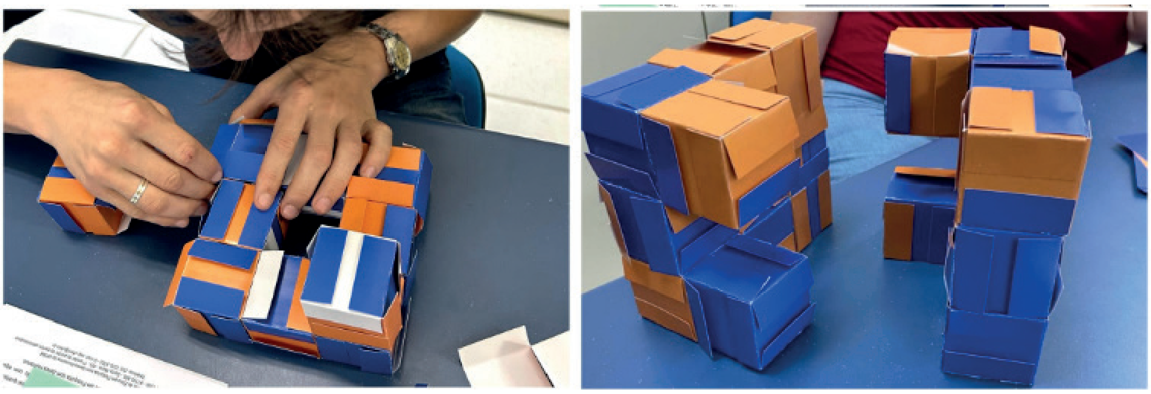


Fonte: Acervo das autoras.

Inicialmente, todos os participantes perceberam que seriam necessários 20 cubos para formar a primeira iteração. Em seguida, montaram os 20 cubos para, então, encaixá-los uns aos outros.

A maioria dos estudantes construiu a estrutura de baixo para cima (Figura 8- E) . Contudo, uma dupla adotou uma estratégia diferente: cada integrante montou metade da estrutura para, depois, uni-las. No entanto, essas metades foram montadas como se a esponja tivesse sido seccionada por um corte oblíquo (Figura 8 - D).

Figura 8 - Estratégias de montagem.

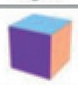
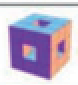
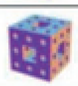
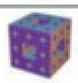


Fonte: Acervo das autoras.

Ao final do primeiro dia de atividades, os participantes de ambas as turmas haviam confeccionado oito Esponjas de Menger na primeira iteração. Diante disso, propôs-se que, no encontro seguinte, fosse feita a tentativa de ampliar esse número para 20 unidades, com o objetivo de construir o fractal em sua segunda iteração.

No segundo encontro, foram apresentados, com o auxílio de slides, os cálculos da área e do volume da Esponja de Menger. Os participantes foram estimulados a responder de forma intuitiva quais seriam os valores da área e do volume. Para facilitar a compreensão do processo de indução envolvido, foi exibido um quadro com as iterações, o número de cubos e o número de quadrados presentes na esponja em cada etapa, como ilustra a Figura 9.

Figura 9 - Quadro contendo dados sobre os cubos que formam a Esponja de Menger.

Figura	Iteração	Número de cubos	Número de quadrados
	0	1	6
	1	20	528
	2	400	4.704
	3	8.000	47.232
	...		
	n	20^n	$q_n = q_{n-1} \cdot 8 + 20^{n-1} \cdot 24$

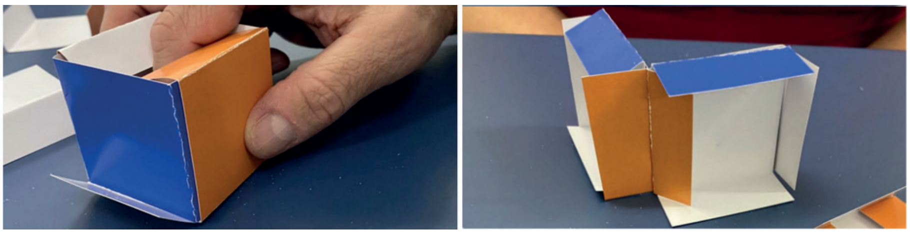
Fonte: Acervo das autoras.

Nessa fase, observou-se uma diferença entre os grupos: os estudantes do curso diurno compreenderam rapidamente os conceitos de área e volume, bem como suas tendências ao infinito e a zero, enquanto os do curso noturno apresentaram maiores dificuldades, uma vez que a maioria ainda não havia cursado disciplinas de Cálculo, que tratam de sequências e seus limites. Para finalizar as oficinas, foi aplicado um último questionário. A primeira questão referia-se às expectativas dos participantes em relação à atividade. Dos 10 participantes presentes no segundo dia, apenas dois (D1 e D2) afirmaram que a oficina atendeu às expectativas, enquanto os outros oito relataram que suas expectativas foram superadas.

Com o intuito de identificar os sentimentos evocados ao longo da oficina, os participantes foram convidados a indicar três palavras que expressassem suas percepções. Como resultado, poucas palavras foram repetidas e diversas habilidades também foram mencionadas, como, por exemplo: alegria, curiosidade, descoberta, frustração, diversão, percepção, concentração, novidade, visualização espacial, motricidade fina e paciência. Além disso, foram identificadas dificuldades em três eixos principais de análise: referentes à construção do origami modular; relacionadas à visualização espacial e associadas às características específicas da Esponja de Menger.

Os participantes D1, D3, D4, D5 e D7 afirmaram ter enfrentado dificuldades na montagem dos origamis. Houve, ainda, situações em que os cubos foram montados de forma distinta da orientada. As instruções para a construção dos cubos foram apresentadas por meio de imagens e pela responsável pela oficina, que demonstrou a montagem com cada dupla, além de oferecer auxílio sempre que necessário. Ainda assim, observou-se certa dificuldade por parte dos participantes em compreender o processo sequencial de montagem, mesmo com o suporte das instruções visuais, como ilustra a Figura 10.

Figura 10 - Tentativas de montagem dos cubos pelos participantes da oficina.



Fonte: Acervo das autoras.

As dificuldades relacionadas às características da Esponja de Menger manifestaram-se principalmente durante os cálculos de área e volume do fractal. Também foram identificadas dificuldades referentes aos processos iterativos e indutivos envolvidos na construção dos fractais. Um exemplo disso pode ser visto na tentativa de generalização expressa por um dos participantes: “a cada iteração, reduz-se o lado em 1/3 do lado anterior”.

Os participantes também expressaram suas opiniões quanto à viabilidade de inclusão da GF tanto na formação inicial em Matemática quanto na Educação Básica. A maioria considerou importante sua inclusão nos currículos, destacando a presença do tema na BNCC, sua articulação com diversos conteúdos e o caráter cativante da área. Muitos identificaram na GF uma abordagem alternativa para o ensino de conteúdos geométricos, com ênfase na possibilidade de atividades práticas. Dois discentes consideraram relevante a inserção do tema, porém sugeriram que a GF fosse oferecida como disciplina optativa ou em formato de atividade extracurricular.

Com relação à aplicabilidade dos conceitos de GF na Educação Básica, 90% dos acadêmicos afirmaram que sim: 60% indicaram o Ensino Médio como etapa preferencial; 20%, o Ensino Fundamental; e 10% consideraram possível aplicar em ambas as etapas. Os principais conteúdos indicados com potencial de abordagem por meio da GF foram: visualização espacial, progressões e função exponencial, além de elementos da geometria plana e espacial.

Considerando que a oficina apresentou a técnica do origami aos participantes, foi feita a mesma pergunta em relação à utilização do origami na Educação Básica. Dos participantes, 70% afirmaram que o utilizariam em ambas as etapas; 10% apenas no Ensino Fundamental; 10% talvez utilizariam; e 10% afirmaram que não utilizariam. Os principais motivos apontados para a não utilização foram: o tempo necessário para manusear os origamis e a percepção de que essa prática poderia não despertar o interesse de alunos do Ensino Médio, embora talvez despertasse o dos alunos do Ensino Fundamental. Observa-se, portanto, uma certa resistência quanto ao uso do origami como recurso concreto viável para o ambiente escolar, apesar do seu potencial pedagógico. A esse respeito, reitera-se a importância desse tipo de recurso, tanto para a construção quanto para a atribuição de significado ao conhecimento, uma vez que permite, além do manuseio, a visualização concreta dos conceitos trabalhados.

Ainda nesse contexto, os participantes mencionaram conteúdos que relacionariam ao uso do origami. Foram citados três vezes conteúdos de Geometria Plana, quatro vezes de Geometria Espacial, uma vez o desenvolvimento de habilidades manuais, e uma vez o trabalho com sequências numéricas e recursivas. Fica evidente, portanto, que o origami foi identificado como sendo uma alternativa didática com potencial para ser explorado em diversas áreas e etapas da Educação Básica, constituindo-se como um recurso valioso para o ensino de Matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Lorenzato (1995, p. 3) afirma que "a Geometria está ausente ou quase ausente na sala de aula". O mesmo autor destaca que seu ensino representa um desafio, uma vez que muitos professores não possuem o conhecimento necessário para ensiná-la adequadamente. A presença da GF no ensino segue o mesmo padrão. Deve-se considerar, contudo, que a GF é uma área relativamente recente dentro da própria Matemática. A partir da análise dos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática de universidades federais do Rio Grande do Sul, percebe-se que a inserção de Geometrias Não Euclidianas nesses cursos ainda está por acontecer. Ao mesmo tempo, todos oferecem disciplinas de

Geometria (GP, GEsp e GA) com estruturas muito similares, sugerindo a manutenção de uma tradição consolidada.

Durante esta pesquisa e, reforçada pelas observações feitas durante a oficina, foi possível constatar o potencial da GF para abordar diversos conteúdos da Educação Básica, como frações, padrões, simetrias, área, volume, sequências, entre outras competências. Contudo, como afirma Mello (2020, p.102) "ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de aprimorar em si mesmo. Ninguém promove a aprendizagem de conteúdos que não domina, a constituição de significados que não compreende nem a autonomia que não pôde construir". Ou seja, não é possível ensinar aquilo que não se sabe. Assim, estudar a GF durante a formação inicial de professores abre novos caminhos para a compreensão da Matemática, promove a articulação entre diferentes conteúdos e estimula a reflexão crítica dos futuros docentes sobre suas práticas pedagógicas.

Por meio desta pesquisa, foi possível coletar as opiniões de diversos acadêmicos de Licenciatura em Matemática e compreender como concebem a utilização da GF em sala de aula na Educação Básica. A oficina de construção de um fractal utilizando origamis proporcionou essa discussão, além de cumprir seu papel de apresentar novos conhecimentos a um público que, até então, não possuía experiência com GF nem com origami. A escolha pelo trabalho com origamis, além de refletir o interesse pessoal das autoras, também levou em conta as possibilidades de seu uso como material concreto no ensino de Matemática, especialmente de Geometria, em sintonia com estudos precursores na área. Além disso, durante a oficina, ficou evidente a necessidade de diversificar técnicas que favoreçam o desenvolvimento da visualização espacial, considerando que a Geometria é uma das áreas mais diretamente dependentes dessa habilidade.

Participaram da oficina discentes dos cursos de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do sul do país. Ao final da atividade, relataram que estariam dispostos a utilizar tópicos de GF em suas futuras práticas docentes na Educação Básica. Muitos apontaram a GF como uma abordagem interessante e diferenciada para o ensino da Matemática. Esse retorno, a partir do que foi vivenciado na oficina, indica uma preocupação e uma reflexão por parte dos futuros docentes quanto à adoção de metodologias alternativas em suas práticas pedagógicas. Nesse sentido, considera-se que o objetivo principal da oficina foi alcançado.

Ao deixarem sugestões, opiniões e comentários, os participantes indicaram que o tempo destinado à oficina foi relativamente curto, o que corrobora com a percepção da autora responsável pelas atividades. Para uma compreensão mais aprofundada dos temas tratados, seria necessário ampliar a carga horária da oficina, permitindo mais tempo para o desenvolvimento de cada tarefa proposta. Outro ponto identificado para aprimoramento diz respeito aos enunciados das questões da folha de atividades, uma vez que surgiram dúvidas frequentes quanto ao que era solicitado.

Por fim, reitera-se a importância de pesquisas na área, tanto no contexto da Educação Básica quanto no Ensino Superior. Cientes de que a proposta aqui apresentada é apenas inicial e não se esgota em si mesma, destaca-se a necessidade de continuidade nos estudos sobre GF, com ênfase, por exemplo, na sua inserção e experimentação em salas de aula da Educação Básica; na análise das respostas dos estudantes a essas experiências; e na possibilidade de inclusão da GF em programas de formação continuada de professores da rede básica.

REFERÊNCIAS

BOAKES, N. J. Cultivating design thinking of middle school girls through an origami STEAM project. **Journal for STEM Education Research**, v. 3, p. 259-278, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular. Acesso em: 10 jun. 2024.

BUDINSKI, N. *et al.* Mathematical and coding lessons based on creative origami activities. **Open Education Studies**, v. 1, p. 220-227, 2019.

GERHARDT, M. L. **Descobrindo a pesquisa no ensino médio**. Santa Maria: UFSM, Colégio Politécnico, 2013. 106 p.

GRACIOLLI, C. Y. L. F. **Origami e produção de vídeos digitais: um estudo sobre a produção matemática em um curso de extensão universitária**. 2021. 90 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Mossoró, 2021. Acesso em: 28 ago. 2024.

JURAEV, D. A.; MAMMADZADA, N. M. Fractals and its applications. **Karshi Multidisciplinary International Scientific Journal**, v. 1, n. 1, p. 25-38, 2024.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) - UFPR, Curitiba, 2009.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista - SBEM**, n. 4, p. 3-13, 1995.

LUTZ, M. R. **Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar**. 2020. 253 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria, 2020. Acesso em: 08 jun. 2024.

MANDELBROT, B. **La geometría fractal de la naturaleza**. Barcelona: Tusquets Editores, 1997. 662 p.

MELLO, G. N. Formação inicial de professores para a educação básica: uma (re)visão radical. **São Paulo em Perspectiva**, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 98-110, 2000.

MITCHELL D. **The playing card cube aka the business card cube**. Origami Heaven, 2020. Disponível em: https://www.origamiheaven.com/pdfs/playingcardcube.pdf. Acesso em: 28 ago. 2024.

MONTEIRO, L. C. N. **Origami: História de uma Geometria Axiomática**. 2008. 119 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Acesso em: 27 ago. 2024.

MOREIRA, D. I. **Introdução à geometria fractal: aplicações da dimensão de Box-Counting**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2022.

MOSSULIN, Â. V. L.; MEDEIROS, L. F. de. O ensino de Geometria Fractal na Educação Básica: uma revisão sistemática de literatura. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2004, 20 set. 2023.

NAMPO, D. S. O. *et al.* O uso do origami ou dobradura para o ensino da geometria: uma revisão integrativa. **Revista de Educação em Ciências e Tecnologia - ALEXANDRIA**, v. 17, p. 1-28, 2024.

NASCIMENTO, M. do; SILVA, S. de C. R. da; MACIEL, N. A. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. **Vidya**, v. 32, n. 2, p. 113-132, 2012.

OLIVEIRA, L. M. de. **Uma proposta de geometria de fractais para a sala de aula**. 2019. 41 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019. Acesso em: 08 jul. 2024.

OLIVEIRA, P. R. M. de. **Fractais na formação de professores: um estudo interdisciplinar no curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte**. 2020. 90 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Federal do Semiárido, Mossoró, 2020. Acesso em: 24 maio 2024.

QUEIROZ, G. T. **Ensino de Geometria: uma abordagem a partir do uso do origami**. 2019. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2019. Acesso em: 27 ago. 2024.

SANTOS, L. F. dos. **A inserção da geometria fractal nas aulas de matemática nos anos finais do ensino fundamental: um estudo de caso**. 2020. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020. Acesso em: 24 maio 2024.

SANTOS, S. A.; MEDEIROS, K. M. Geometria dos fractais e criatividade matemática para aprendizagem significativa: uma revisão de literatura. **RBECM - Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, Passo Fundo, v. 7, n. 1, p. 255-279, 2024.

SILVA, E. M. M. **Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação**. Florianópolis: UFSC, 2005. 139 p.

UFPEL. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. Pelotas: UFPel, 2021.

UFPEL. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática EaD**. Pelotas: UFPel, 2020.

UFRGS. **Projeto Pedagógico do Curso - Licenciatura em Matemática**. Porto Alegre: UFRGS, 2024.

UFSM. **Projeto Pedagógico do Curso de Graduação em Matemática - Licenciatura**. Santa Maria: UFSM, 2023.

UNIPAMPA. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática** (Bagé). Bagé: Unipampa, 2023a.

UNIPAMPA. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática** (Itaqui). Itaqui: Unipampa, 2023b.