ISSN 1981-2841

A FÓRMULA DE STIRLING PARA N! E ALGUMAS APLICAÇÕES[1]

STIRLING´S FORMULA TO N! AND SOME APPLICATIONS

Daiana Aparecida de Siqueira[2] e Adilção Cabrini Beust[3]

RESUMO

A finalidade deste artigo é analisar e demonstrar a fórmula de Stirling, pois um aspecto importante de sua demonstração implica em um domínio de alguns conceitos, como, por exemplo, integrais e séries (sucessões). Assim, o presente estudo foi realizado por meio de pesquisa bibliográfica e do desenvolvimento de uma série de demonstrações, bem como de uma aplicação em probabilidade. Com isso, a fórmula de Stirling é empregada para a resolução de problemas no cálculo de n! (n fatorial) quando n é grande, proporcionando uma redução no número de operações. Ainda, a aplicação favorece técnicas para a obtenção de soluções de relações de recorrência.

Palavras-chave: integrais, séries, fatorial, relações de recorrência.

ABSTRACT

The aim of this paper is to analyze and demonstrate the Stirling´s formula for an important aspect of its demonstration implicates on the knowledge of some concepts, as, for example, integrals and series (sequences). Thus, the present study has been made through a bibliographical research and the development of some demonstrations, as well as a probability application. With this, the Stirling´s formula is employed for the solving of problems in n! calculus when n is big, enabling a reduction in the amount of operations. Yet, the application supports techniques for obtaining solutions to reoccurrence relation.

Keywords: *integrals, series, factorial, reoccurrence relation.*

[1] Trabalho de Iniciação Científica - PROBIC.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática - UNIFRA.
[3] Orientador - UNIFRA.

INTRODUÇÃO

Em muitas aplicações de Matemática Discreta, especialmente na Estatística e no Cálculo das Probabilidades, uma avaliação direta de n! (n fatorial) para n grande é algo longo e trabalhoso. Dessa forma, a realização desta pesquisa justifica-se pela necessidade de se dispor de uma aproximação simples para n! como uma função elementar de n. Tal expressão demonstrará que é dada pelo teorema de Stirling.

Nesse sentido, objetiva-se analisar a Fórmula de Stirling, bem como utilizá-la numa aplicação em probabilidade. Sua realização faz-se por meio de uma pesquisa bibliográfica e do desenvolvimento de uma série de demonstrações.

O presente artigo divide-se em duas seções. Primeiramente, demonstra-se o Teorema de Stirling, seguindo roteiro de dez exercícios, conforme sugestão de Figueiredo (1975). Ainda, de forma implícita, realiza-se a análise dos erros relativos cometidos quando das aproximações da Fórmula de Stirling para n! (n fatorial). Por fim, na seção final, resolve-se uma aplicação em probabilidade, que envolve o cálculo de n!.

DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DE STIRLING

Nesta seção, aborda-se a Fórmula de Stirling em seus aspectos teóricos e formais. Para tanto, primeiramente, será realizada sua demonstração e, em seguida, será analisado o erro relativo cometido ao final de seu desenvolvimento. Para demonstrá-la, desmembrou-se o procedimento em uma série de etapas, conforme se demonstra a seguir.

Primeiramente, ao avaliar a área compreendida pela curva y=log x (Figura 1), usando a integração por partes, demonstra-se que A_n, a área exata compreendida pela curva entre as ordenadas x=1 e x=n, é dada por $\int_1^n \log x dx = n\log n - n + 1$.

Sabe-se que a integração por partes é fornecida pela fórmula da derivação dos produtos de duas funções: $\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

Ao integrar ambos os membros, tem-se

$$f(x)g(x) = \int \qquad \int g(x)f'(x)dx.$$

$\int$ $\qquad \int g(x)f'(x)dx$, obtendo a fórmula da integração por partes. Assim, tem-se que $\int_1^n \qquad \int_1^n \log x.1.dx$.

Escreve-se o integrando desse modo para indicar que: $f(x) = \log x$, $g'(x) = 1dx$ e $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$.

Logo, a fórmula proposta torna-se, então,

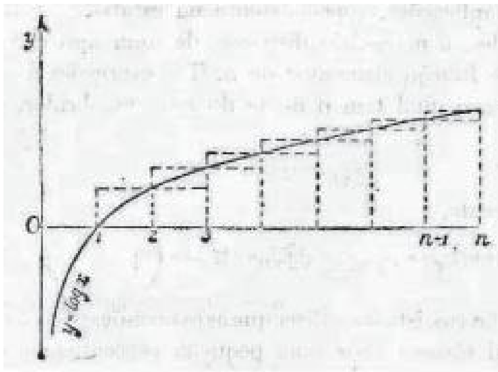
$$\int_1^n \qquad \int_1^n x.\frac{1}{x}.dx = x\log x]_1^n - \int_1^n dx$$

$$= x\log x]_1^n - x]_1^n = (n\log n - 1\log 1) - (n-1) = (n\log n - 1.0) - n + 1 = n\log n - n + 1$$

Portanto, $\int_1^n \log x dx = n\log n - n + 1$.

Entretanto, ao avaliar essa mesma área pela regra dos trapézios, como indica a figura 1, obtém-se T_n, um valor aproximado da área. Assim, demonstra-se que T_n é dado por $\log 2 + \quad + \log(n-1) + \frac{1}{2}\log n = \log n! - \log\sqrt{n}$.

Gráfico 1 - y = log x.



Para conceber que a área é o valor limite de uma soma de áreas retangulares, dividiu-se o eixo dos x, compreendidos entre a e b em n intervalos com extremos $x_0, x_1, ..., x_n$.

$$x_0 = a \qquad x_1 \qquad x_2 \qquad \ldots \qquad x_{n-1} \qquad b = x_n$$

Construiu-se um retângulo de altura log x com $x \in [x_{i-1}, x_i]$ e base $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \quad = \Delta_n = \quad = \frac{b-a}{2}$ (todos os subintervalos tem o mesmo comprimento).

A união desses retângulos forma a região T_n; tem-se a área $(A_n) \approx$ área (T_n).

Quando a partição torna-se mais fina, os polígonos constituem, cada vez mais, melhores aproximações da área A, ou seja, usando um número maior de subdivisões [a,b] define-se a área A da região A_n como $\lim[\quad]$.

Assim, a área dos retângulos: $\log 1.\Delta \quad \Delta \quad \Delta x$ e área (T_n)= $\log 1.\Delta + \quad \Delta + \quad + \quad \Delta x = \sum_{i=1}^{n} \log i.\Delta x$.

Desse modo, A = área(A_n) = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \log i.\Delta x$.

A integral definida de log x de a até b é, nesse caso, $\int_a^b f(x)dx = \quad_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \quad \Delta x$.

Essa integral, no caso de f ser contínuo e não negativo, representa a área entre a curva e o [a,b]. Esse limite é denominado integral de Riemann quando ele existe. Nesse caso, tem-se:

$$A = \quad + \quad + \quad -\quad + \frac{1}{2} \quad = \quad - \quad = \quad -1).\sqrt{n}.\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}})$$

$$A = \log(2.3.4......(n-1).\frac{n}{\sqrt{n}}) = \log(\frac{n!}{\sqrt{n}}) = \log n! - \log\sqrt{n}.$$

Em seguida, define-se a sucessão (a_n) pela expressão $a_n = \dfrac{\sqrt{n}.n^n.e^{-n}}{n!}$.

A partir do fato de que a figura 1 contém a região compreendida entre o eixo dos x, a reta x = 1 e a reta x = n, pode-se provar que $a_n<1$.

A diferença $a_n = A_n - T_n$ é limitada, e pode-se deduzir que $T_n = A_n \left(\quad \right)$

é da mesma ordem da grandeza que A_n,

pois, $a_n = A_n - T_n = A_n - A_n \left(\quad \right)$

$a_n = \quad - \quad + a_n$

$a_n = a_n$.

Tem-se que $a_n = A_n - T_n$.

$A_n > \quad, \forall n$ por isso A_n-T_n é limitada e monótona crescente.

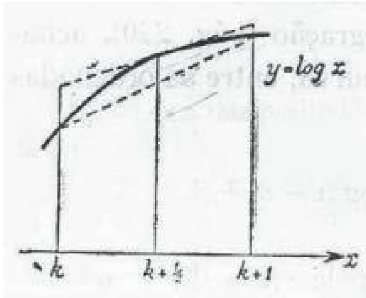
A diferença a_{k+1}-a_k representa a diferença entre as áreas sob a curva e sob a secante, respectivamente, na faixa $K \leq \quad \leq \quad +1$. Como a curva apresenta sua concavidade voltada para baixo, estando situada, pois, acima da secante, a_{k+1}-a_k é positiva e $a_n = (\quad_n - \quad_{n-1}) + (\quad_{n-1} - \quad_{n-2}) + \quad + (\quad_2 - \quad_1) + a_1$ é monótona crescente.

Além disso, a diferença a_{k-1}-a_k é menor do que a diferença entre as áreas limitadas pela tangente em $x = k + \frac{1}{2}$ e pela secante; logo, tem-se a desigualdade:

$$a_{k+1} - a_k < \log\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log k - \frac{1}{2}\log(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\log\left\{\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right\}$$

$$< \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\log\left[\ \right].$$



Ao somar essas desigualdades para K=1,2,...,n-1, todos os termos da direita, exceto dois, serão cancelados, vindo, então (uma vez que a_1=0), $a_n < \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} < 1$.

Logo, a_n é limitada.

A seguir, sabendo que a_n<1 é limitada, demonstra-se que sucessão a_n é monótona crescente, se $a_n \le a_{n+1}$, ou seja, $\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1$ para todo n.

Tem-se que $a_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!}$.

Vale observar que se obtém a_{n+1} de a_n, substituindo n por n+1.

Logo, $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{(n+1)!}$.

Assim, tem-se $a_n \le a_{n+1}$:

$$\frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!} \le \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{(n+1)!} \therefore \ldots \le \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{n}(n+1)e^{-n}e^{-1}}{(n+1)n!}$$

$$\therefore \sqrt{n}n^n \le \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^n}{e}$$

Daí, $\frac{e\sqrt{n}.n^n}{\sqrt{n+1}(n+1)^n} \le 1$.

Portanto, a sucessão a_n é monótona crescente.

Logo após, define-se a sucessão (S_n) pela expressão $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (senx)^n dx$.

Ao utilizar integração por partes, pode-se provar que $S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}, n > 2$.

Ainda, prova-se que $S_2 = \frac{\pi}{4}$ e $S_1 = 1$.

Sabe-se que a integração de uma potência inteira e positiva de sen x ou cos x pode ser obtida por diminuição gradativa do expoente, mediante a aplicação repetida da integração por partes.

Assim, ao integrar $\int sen^n xdx$ e desdobrar sen^n x em sen^{n-1} x sen x, tem-se:

$$\int \qquad \int sen^{n-1}xsenxdx$$

Fazendo $u = sen^{n-1}x$ e $dv = senxdx$, resulta:

$$du = (n-1)sen^{n-2}x\cos xdx \quad \text{e} \quad v = -\cos x$$
(diferenciando) (integrando)

Desse modo, aplicando a fórmula $\int \qquad \int vdu$, tem-se:

$$\int \qquad \int sen^{n-1}xsenxdx$$
$$= -sen^{n-1}x\cos x - \int -\cos x(n-1)sen^{n-2}x\cos xdx$$
$$= - \quad {}^{n-1} \quad + (\quad +1)\int sen^{n-2}x\cos^2 xdx$$
$$= - \quad {}^{n-1} \quad + (\quad +)\int \quad {}^{n-2} \quad (-sen^2 x)dx$$
$$= - \quad {}^{n-1} \quad + (\quad +)\int \quad {}^{n-2} \quad -sen^n xdx$$
$$= - \quad {}^{n-1} \quad + (\quad +)\int \qquad \int sen^n xdx$$

Ao isolar as integrais de sen^n x , tem-se:

$$n\int \qquad \int sen^{n-2}xdx \tag{1}$$

que faz depender a integral de sen^n x da integral de sen^{n-2} x .

Assim, ao tratar do mesmo modo a integral de sen^{n-2} x, fazendo depender a integral proposta da integração de sen^{n-4} x e assim por diante.

Se n for par, pode-se concluir uma última integral da forma:

$$\int \qquad \int \qquad \int dx = x.$$

Se n for ímpar, a última integral será da forma:

$$\int senxdx = -\cos x.$$

Como aplicação, calcula-se a integral definida: $S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n xdx$.

A fórmula (1) fornece: $S_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n xdx$

No entanto, a parte já integrada se reduz a zero, pois:

$$S_n = \left[\qquad\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (\;\; -1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}xdx.$$

$$\left[\qquad\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -sen^{n-1}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - (-sen^{n-1}0\cos o)$$

$$= -1.0 - (0 \;.\; 1) = 0$$

Desse modo,

$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}xdx$ ou, dividindo por n,

$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{(n-1)}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}xdx$ ou, ainda,

$S_n = \frac{(n-1)}{n} S_{n-2},\; n > 2 \cdot$

Assim, tem-se: $S_2 = \frac{\pi}{4}$.

Desse modo, prova-se também que $S_1 = 1$.

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} senxdx$$

$$S_1 = -\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0) = (0+1) = 1.$$

Após, usando a sucessão S_n acima, demonstra-se que

$$S_{2k} = \frac{1.3.....(2k-1)}{2.4.....(2k)}.\frac{\pi}{2}$$

$$S_{2k+1} = \frac{2.4.....(2k)}{3.5.....(2k+1)}.$$

Ao descrever formalmente, tem-se:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}x dx \tag{2}$$

Realizando, nessa última relação, sucessivamente, a substituição de n por n-2, n-4, ..., resultam as relações:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{n-2-1}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-4}x dx \tag{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{n-4-1}{n-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{n-5}{n-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-6}x dx \tag{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} \qquad \text{(se n for par)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad = \frac{2}{3} \qquad = \frac{2}{3} \qquad \frac{\pi}{2} + \qquad = \frac{2}{3}.1 \qquad \text{(se n for ímpar)}$$

Se em (2) for substituida a integral do segundo membro pelo valor tirado de (3), a seguir este pelo seu valor tirado de (4) e assim por diante, resulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-4}x dx$$

$$= \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-6}x dx$$

$$= \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}.....\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} \qquad \text{(se n for par) (5)}$$

ou

$$= \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}.....\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.1 \qquad \text{(se n for ímpar) (6)}$$

Ao retomar a integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n xdx$ e fazer n=2k e n=2k+1, respectivamente, obtém-se, de acordo com (5) e (6) do número anterior, as duas relações seguintes:

$$S_{2k}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k}xdx=\frac{2k-1}{2k}.\frac{2k-3}{2k-2}.\frac{2k-5}{2k-4}.....\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

e

$$S_{2k+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k+1}xdx=\frac{2k}{2k+1}.\frac{2k-1}{2k-1}.\frac{2k-4}{2k-3}.....\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.$$

Segue-se que a sucessão (S_n) é não crescente, pois $0 \leq \quad \leq 1$, quando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Demonstra-se que $\lim_{k\to\infty}\frac{S_{2k+1}}{S_{2k}}=1$. Tem-se que:

$$S_{2k}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k}xdx=\frac{2k-1}{2k}.\frac{2k-3}{2k-2}.\frac{2k-5}{2k-4}.....\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} \qquad (7)$$

e

$$S_{2k+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k+1}xdx=\frac{2k}{2k+1}.\frac{2k-1}{2k-1}.\frac{2k-4}{2k-3}.....\frac{4}{5}.\frac{2}{3} \qquad (8)$$

Ao dividir essas relações membro a membro, obtém-se:

$$\frac{S_{2k}}{S_{2k+1}}=\frac{(2k-1).(2k+1)}{2k.2k}.\frac{(2k-3).(2k-1)}{(2k-2).(2k-2)}.\frac{(2k-5).(2k-3)}{(2k-4).(2k-4)}.....\frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{S_{2k}}{S_{2k+1}}=\frac{(2k+1).(2k-1)}{2k.2k}.\frac{(2k-1).(2k-3)}{(2k-2).(2k-2)}.\frac{(2k-3).(2k-5)}{(2k-4).(2k-4)}.....\frac{5}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}. \qquad (9)$$

Desse modo, vale no intervalo $\left(\quad \right)$ a relação:

. $$0 < sen^{2k+1}x \leq sen^{2k}x \leq sen^{2k-1}x \qquad \text{(em que } senx \leq 1\text{)}$$

Nela, integrando de 0 a $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2k-1}xdx \text{ ou } S_{2k+1} \leq S_{2k} \leq S_{2k-1}.$$

Ao dividir os três membros dessa relação por S_{2k+1}, tem-se:

$$1 \leq \frac{S_{2k}}{S_{2k+1}} \leq \frac{S_{2k-1}}{S_{2k+1}} \qquad (10)$$

em que a última razão, de acordo com (8), reduz-se a $\frac{2k+1}{2k}$ ou $1+\frac{1}{2k}$; quanto à primeira, seu valor é dado pela equação (9), na qual, substituindo em (10):

$$1 \leq \frac{(2k+1).(2k-1).(2k-1).(2k-3)}{2k.2k \qquad (2k-3).(2k-2)} \frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \leq 1+\frac{1}{2k}.$$

Se k tender a infinito, o último membro dessa relação se reduzirá a 1. Como o primeiro membro já é 1, resulta:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1).(2k-1)^2.(2k-3)^2.....5^2.3^2}{(2k)^2.(2k-2)^2.(2k-4)^2.....4^2.2^2}.\frac{\pi}{2} = 1.$$

Portanto, a sucessão (S_n) é não crescente e, pelo teorema do confronto, obtém-se que $\lim_{k\to\infty} \frac{S_{2k+1}}{S_{2k}} = 1$.

A seguir, define-se a sucessão (W_k) por

$$W_k = \frac{2.2.4.4.6.6.....(2k).(2k)}{3.3.5.5.....(2k-1).(2k-1).(2k+1)}.$$

Mostra-se que a sucessão (W_k) é crescente e limitada superiormente por $\frac{\pi}{2}$. Finalmente, usando a demonstração anterior, tem-se que $\lim_{k\to\infty} W_k = \frac{\pi}{2}$.

Sabe-se que uma sucessão é crescente se $W_k \leq W_{k+1}$, ou seja, $\frac{W_{k+1}}{W_k} \geq 1$ para todo k. Tem-se $W_k = \frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}$. É importante observar, também, que se W_{k+1} de W_k substituindo k por k+1.

Logo, $W_{k+1} = \frac{[2(k+1)]^2}{[2(k+1)+1]^2} = \frac{[2k+2]^2}{[2k+2+1]^2} = \frac{[2k+2]^2}{[2k+3]^2}.$

Assim, tem-se $\dfrac{W_{k+1}}{W_k} \geq 1$:

$$\frac{(2k+2)^2}{(2k+3)^2}.\frac{(2k+1)^2}{(2k)^2} \geq 1.$$

Portanto, a sucessão é crescente.

Ainda, tem-se que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1).(2k-1)^2.(2k-3)^2.....5^2.3^2}{(2k)^2.(2k-2)^2.(2k-4)^2.....4^2.2^2}.\frac{\pi}{2} = 1$.

Resolvendo em $\dfrac{\pi}{2}$, resulta:

$\displaystyle\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k)^2.(2k-2)^2.(2k-4)^2.....4^2.2^2}{(2k+1).(2k-1)^2.(2k-3)^2.....5^2.3^2}$, ou ainda:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1}\left[\frac{2.4.....(2k-4).(2k-2).(2k)}{3.5.....(2k-3).(2k-1)}\right]^2.$$

Desse modo, $W_k = \dfrac{2.2.4.4.6.6.....(2k-2).(2k-2).(2k).(2k)}{3.3.5.5.....(2k-1).(2k-1).(2k+1)}$.

Ou seja, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}$, que é conhecido como o produto de Wallis.

Se a sucessão é crescente e limitada superiormente por $\dfrac{\pi}{2}$, então, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} W_k = \frac{\pi}{2}$.

Feito isso, mostra-se que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} W_k = \frac{\pi}{2}$ implica que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$.

Sabe-se que $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{2k}{2k+1} = 1$. Pode-se escrever $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{2^2.4^2.....(2k-2)^2}{3^2.5^2.....(2k-1)^2}.2k = \frac{\pi}{2}$.

Ao tomar a raiz quadrada e multiplicar numerador e denominador por 2, 4, ..., (2k-2), obtém-se:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2.4.....(2k-2)}{3.5.....(2k-1)}.\sqrt{2k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2^2.4^2.....(2k-2)^2}{2.3.4.5....(2k-2).(2k-1)}.\sqrt{2k}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{2^2.4^2.....(2k-2)^2}{(2k-1)!}.\sqrt{2k} \;= \lim_{k\to\infty}\frac{2^2.4^2.....(2k)^2}{(2k)!}.\frac{\sqrt{2k}}{2k}.$$

Deduz-se, finalmente, que $\lim_{k\to\infty}\frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}.$

Por fim, ao utilizar $\lim_{k\to\infty}\frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$, mostra-se que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}} = (2\pi)^{-1/2}$ e conclui-se que $\lim_{n\to\infty} a_n = (2\pi)^{-1/2}$.

Sendo a_n limitada e monótona crescente, tenderá para a quando $n \to \infty$. Então,

$$a - a_n = \sum_{k=n}^{\infty}(a_{k+1} - a_k) < \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2n})$$

No entanto, $A_n - T_n$ = na. Assim, $\log n! = 1 - a_n + (n+\frac{1}{2})\log n - n$.

Fazendo $\alpha_n = e^{1-a_n}$, $n! = \alpha_n n^{n+1/2} e^{-n}$.

α_n é monótona decrescente e aproxima-se ao limite $\alpha = e^{1-a}$, logo:

$$1 < \frac{\alpha_n}{\alpha} = e^{a-a_n} < e^{\frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{2n})} = \sqrt{1+\frac{1}{2n}} < 1+\frac{1}{4n}.$$

Pode-se escrever:

$$\alpha n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! < \alpha n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1+\frac{1}{4n}).$$

Ao substituir k! por $\alpha_n.k^{k+1/2}.e^{-k}$ e (2k)! por $\alpha_{2n}.2^{2k+1/2}.k^{2k+1/2}.e^{-2k}$, obtém-se:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\alpha_n k^{k+\frac{1}{2}}e^{-k})^2.2^{2k}}{(\alpha_{2n}2^{2k+\frac{1}{2}}k^{2k+\frac{1}{2}}e^{-2k}).\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_n^2 k^{2k} k e^{-2k} 2^{2k}}{\alpha_{2n}2^{2k}2^{\frac{1}{2}}k^{2k}k^{\frac{1}{2}}e^{-2k}.\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_n^{2k}}{\alpha_{2n}\sqrt{2}\sqrt{k}\sqrt{k}} = \quad \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}\sqrt{2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}}$$

Desse modo, $\alpha = \sqrt{2\pi}$, ou seja,

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left(\quad \right).$$

Fica, assim, demonstrada a fórmula de Stirling.

Portanto, o estudo e a análise da Fórmula de Stirling permitem estabelecer que as expressões n! e $\sqrt{2\pi n}^{\,n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ diferem entre si somente por uma pequena percentagem para n suficientemente grande, ou seja, n! e a Fórmula de Stirling são duas expressões assintoticamente iguais. É justamente essa propriedade que torna possível seu uso para o cálculo de n! (n fatorial), especialmente quando n é grande. Implicitamente, o fator $\left(\quad \right)$ que determina uma estimativa do grau de precisão da aproximação de n!. Ou seja, o erro relativo cometido ocorre apenas por esse fator. A tabela 1 ilustra a percentagem de erro resultante da aplicação da Fórmula de Stirling, conforme o tamanho de n.

Tabela 1 - percentagem de erro resultante da aplicação da Fórmula de Stirling conforme o tamanho de n.

n	n!	Aproximação dada pela Fórmula de Stirling	Percentagem de erro, %
1	1	0,922	8
2	2	1,919	4
5	120	118,019	2
10	$(3,6288)10^{6}$	$(3,5986...)10^{5}$	0,8
100	$(9,3326...)10^{157}$	$(9,3249...)10^{157}$	0,08

Dessa forma, a tabela 1 demonstra que quanto maior o n menor será a percentagem do erro relativo cometido.

APLICAÇÃO

Nesta seção, como exemplo de aplicação, apresentam-se as relações de recorrência para duas sequências de números em combinatória, as quais são os números de Stirling do primeiro tipo e do segundo tipo, definidos pelo matemático inglês James Stirling (1692-1770). Percebe-se, ainda, que eles satisfazem relações semelhantes as satisfeitas pelos números binomiais.

Primeiramente, faz-se a dedução das relações de recorrência do segundo tipo satisfeita por $S_{n,k}$, o número de maneiras de distribuir n objetos distintos dentre k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia. Para essa hipótese, o número $S_{n,k}$ é conhecido como um número de Stirling do segundo tipo.

Dessa forma, se k=1 ou k=n, tem-se apenas uma maneira de distribuir os objetos, todos em uma única caixa ou um por caixa, respectivamente. Além disso, é notório que quando k>n (alguma caixa teria que ficar vazia) e quando $k \leq 0$ e n>0 (não se poderia distribuir um número positivo de objetos dentre zero caixas) a tarefa acima enunciada é impossível. Assim, por exemplo, quando n=5 e k=2, existem duas possibilidades para o número de objetos por caixa, ou seja, 1 e 4 ou 2 e 3. No primeiro caso, são possíveis 5 escolhas para o objeto que ficará sozinho; o restante fica junto na outra caixa. No segundo caso, tem-se $\binom{5}{2}=10$ escolhas para os dois elementos que ficam na caixa com dois, o restante ficarem na outra caixa. Portanto, $S_{5,2}$ =5+10=15.

Entretanto, para valores de n e k grandes, percebe-se que é impraticável repetir o procedimento acima. Com isso, uma solução é a construção de uma relação de recorrência. Para facilitar, supõe-se que os n objetos distintos são bolas numeradas de 1 a n. Assim, divide-se o conjunto de modo a distribuir as n bolas em k caixas e dois subconjuntos. As distribuições, no primeiro subconjunto, são tais que a bola de número 1 encontra-se sozinha numa caixa e, nas do segundo subconjunto, a bola de número 1 está numa caixa que contém mais de uma bola. Assim, o número de elementos no primeiro subconjunto é igual ao número de maneiras de distribuir as n – 1 bolas restantes em k – 1 caixas, ou seja, $S_{n-1,k-1}$. Para contar o número de elementos no segundo subconjunto, observa-se que, para construir um elemento qualquer nesse subconjunto, pode-se partir de uma distribuição qualquer das n – 1 bolas, 2, 3, ..., n, em k caixas e depois colocar a bola 1 em qualquer das k caixas. Dessa forma, cada distribuição de n – 1 objetos em k caixas origina a k distribuições diferentes no segundo subconjunto, dependendo da caixa escolhida para colocar a bola 1 (no sentido de qual a “companhia” escolhida para a bola 1). Por exemplo, quando n = 5 e k = 2, para a construção das distribuições no segundo subconjunto, considera-se todas as distribuições das bolas 2, 3, 4 e 5, em duas caixas não vazias:

$$\boxed{2}\ \boxed{3,4,5}\quad \boxed{3}\ \boxed{2,4,5}\quad \boxed{4}\ \boxed{2,3,5}\quad \boxed{5}$$

$$\boxed{2,3}\ \boxed{4,5}\quad \boxed{2,4}\ \boxed{3,5}\quad \boxed{2,5}\ \boxed{3,4}$$

Logo, cada distribuição origina duas distribuições distintas contendo a bola 1. A distribuição no extremo esquerdo na primeira linha acima fornece as distribuições

$$\boxed{1,2}\ \boxed{3,4,5}\ \text{ e }\ \boxed{2}\ \boxed{1,3,4,5}$$

nas quais, na primeira, a bola 1 fica na companhia da bola 2 e, na segunda, fica na companhia das bolas 3, 4 e 5.

Feito isso, tem-se que a relação de recorrência satisfeita por $S_{n,k}$ é:

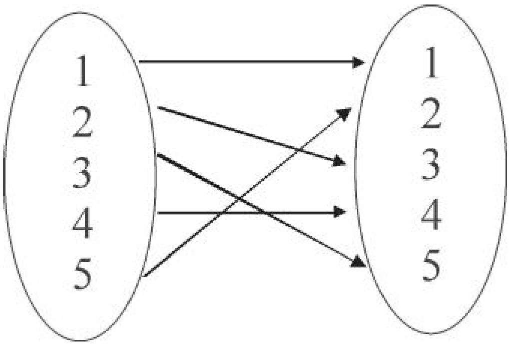
$S_{n,1} = 1, \qquad S_{n,n} = 1,$

$S_{n,k} = S_{n-1,k-1}+kS_{n-1,k}, \qquad$ para $1 < k < n$ e $n > 2$.

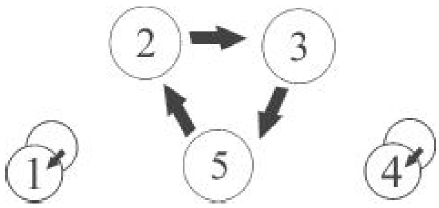
Desse modo, deduz-se a relação de recorrência do primeiro tipo satisfeita por $S_{n,k}$, o número de maneiras de arranjar n objetos distintos em k ciclos. Nessa segunda hipótese, esse é o número de Stirling do primeiro tipo.

Tem-se, aqui, o problema do anfitrião. Nesse caso, o mesmo deve distribuir seus n convidados em k mesas (nenhuma vazia). Ele decide colocar os convidados 1, 3, 5 e 6 em uma mesa. Sabe-se que o número de maneiras distintas que ele possui de fazer isso é o número de permutações circulares de quatro objetos.

Em outras palavras, esse problema pode ser formulado como calcular o número de permutações de n elementos com k ciclos. De fato, qualquer permutação pode ser descrita como um conjunto de ciclos. Para compreender melhor como isso ocorre, considera-se uma permutação de n números como uma função que leva cada posição ao número que ocupa na permutação. Assim, por exemplo, a permutação 13542 dos números 1 a 5 poderia ser representada pela função f tal que f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 4 e f(5) = 2. Graficamente, f pode ser indicada pelo diagrama a seguir:



Contudo, como o domínio e a imagem são iguais, pode-se simplificar a representação acima usando um símbolo para representar tanto o elemento do domínio como o da imagem.



Desse modo, é fácil perceber, nessa representação, que a permutação em questão contém três ciclos: (1), (2, 3, 5) e (4), bem como que as permutações circulares, (2, 3, 5), (3, 5, 2) e (5, 2, 3) são representações equivalentes do mesmo ciclo. Ou seja, um bônus dessa interpretação de $S_{n,k}$ é que, de imediato, obtém-se a igualdade $\sum_{k=1}^{n} S_{n,k} = n!$. De maneira que, somando-se sobre todos os possíveis números de ciclos, tem-se todas as permutações de n elementos.

Sabe-se que para alguns valores de n e k pode-se determinar $S_{n,k}$ sem problemas. Desse modo, todos os elementos devem pertencer a um único ciclo se k=1. Percebe-se um problema equivalente ao de arrumar n convidados em torno de uma mesa redonda, o que importa é a ordem relativa. No entanto, já constatou-se que esse é exatamente o número de permutações circulares de n elementos, logo $S_{n,1} = (n-1)!$. Por outro lado, quando k=n, cada elemento constitui um ciclo isolado. Esse caso corresponde à permutação identidade, ou seja, f(i) = i, para i = 1, ..., n, portanto, $S_{n,n} = 1$.

Por fim, divide-se o conjunto de permutações de n elementos com k ciclos em dois subconjuntos para a construção da equação de recorrência para $S_{n,k}$. No primeiro subconjunto, o elemento 1 constitui um ciclo isolado; no segundo, o elemento 1 pertence a um ciclo com mais de um elemento. Ainda, o número de elementos no primeiro subconjunto é $S_{n-1,k-1}$, ou seja, o número de maneiras de organizar os n-1 elementos restantes em k-1 ciclos. Quanto ao segundo subconjunto, pode-se fazer um raciocínio análogo ao do item anterior, isto é, construir inicialmente uma permutação dos elementos 2 a n com k ciclos e depois escolher em que posição introduzir o elemento 1. Tem-se n-1 escolhas possíveis: introduzir 1 a seguir de 2, ou de 3, ou de 4, ... ou de n. Portanto, $S_{n,k}$ satisfaz

$$S_{n,1} = (n-1)!,\ S_{n,n} = 1,$$
$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + (n-1)S_{n-1,k}, \qquad \text{para } 1 < k < n \text{ e } n > 1.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este artigo, pode-se perceber que vários conceitos importantes foram aplicados para a demonstração da Fórmula de Stirling. Proporcionou-se, dessa forma, um aprofundamento teórico e maior domínio de noções matemáticas essenciais.

Nesse contexto, pode-se concluir que a Fórmula de Stirling é muito empregada no cálculo de n! quando n é grande. Ou seja, ao invés de efetuar um grande número de multiplicações de inteiros, basta calcular a Fórmula de Stirling por meio dos logaritmos, o que reduz consideravelmente o número de operações. Por exemplo, para n = 10, obtém-se o valor 3.598.696 pela fórmula de Stirling, ao passo que o valor exato de 10! é 3.628.800. Desse modo, o erro cometido é apenas de 5/6 por cento.

No decorrer do trabalho, apresentou-se uma aplicação da Fórmula em problemas de probabilidade. Analisaram-se, assim, as relações de recorrência dos números de Stirling do primeiro e segundo tipo.

Por fim, resta destacar que a Fórmula de Stirling também impõe vantagens computacionais, como, por exemplo, menor uso de memória da máquina em um tempo menor ao efetuar n!.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1975.

BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS

COURANT, R; JOHN, F. **Introduction to Calculus and Analysis**. New York: Addison Wesley, 1965.

MAURER, W. A. **Curso de Cálculo Diferencial e Integral**. v.1. São Paulo: Editora USP, 1967.

PLÍNIO, J. S. ; MELLO, M. P. ; MUNARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 3. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2002.