

## UM ESTUDO SOBRE EFEITOS DISPERSIVOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS<sup>1</sup>

### *A STUDY ON THE DISPERSIVE EFFECTS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*

Graciele de Borba Gomes<sup>2</sup> e Marcio Violante Ferreira<sup>3</sup>

#### RESUMO

Neste trabalho, faz-se um estudo de alguns importantes modelos físicos descritos por equações diferenciais parciais. O principal deles é o de pequenas vibrações de uma corda elástica, descrito pela conhecida equação da onda. Utiliza-se o método de separação de variáveis na resolução de cada uma das equações estudadas, sendo que em cada uma delas consideram-se diferentes condições de contorno. Isso exige um estudo aprofundado sobre equações diferenciais ordinárias e séries de Fourier. O *software Maple* também é utilizado para compreender e analisar o comportamento de cada uma das soluções obtidas, bem como outras situações interessantes, como, por exemplo, o problema da corda infinita e o fenômeno de dispersão das soluções da equação de Korteweg-de-Vries linearizada.

**Palavras-chave:** equação da onda, equação de Korteweg-de-Vries, fenômeno de dispersão.

#### ***ABSTRACT***

*In this work it is made a study of some important physical models described by partial differential equations. The main of them is the small vibrations of an elastic rope described by the well-know wave equation. The method of separation of variables is employed in the resolution of each one of the studied equations, and some different boundaries conditions are considered. That demands a deep study*

---

<sup>1</sup> Trabalho de Iniciação Científica - FAPERGS.

<sup>2</sup> Acadêmica do Curso de Matemática - UNIFRA.

<sup>3</sup> Orientador - UNIFRA.

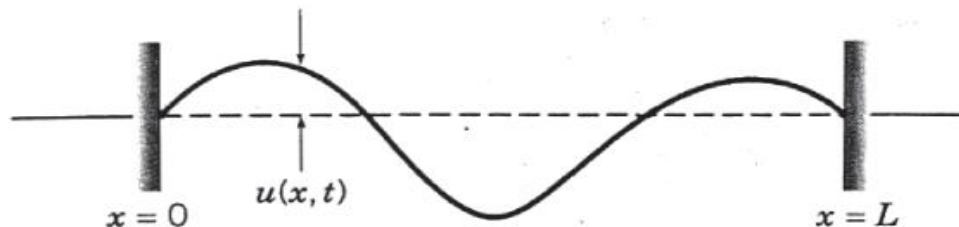
on ordinary differential equations and Fourier series. The software MAPLE is also used to understand and to analyze the behavior of each one of the obtained solutions. Other interesting situations are treated in this study as, for instance, the infinite string problem and the dispersion phenomenon of the solutions of the linear Korteweg-of-Vries equation.

**Keywords:** Wave equation, the Korteweg-de-Vries equation, dispersion phenomenon.

## INTRODUÇÃO

Inicialmente, faz-se uma breve descrição do modelo matemático a ser considerado neste trabalho.

Considera-se uma corda elástica de comprimento  $L$  que esteja ligeiramente esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos  $x$  esteja ao longo da corda. Suponha-se, ainda, que a corda seja colocada em movimento (puxando-a, por exemplo) de modo que vibre em um plano vertical e denote por  $u(x,t)$  o deslocamento vertical da corda no ponto  $x$  no instante  $t$ .



**Figura 1** – Deslocamento vertical da corda.

Se forem desprezados os efeitos de amortecimento, como resistência do ar, e se a amplitude do movimento não for muito grande, então  $u(x,t)$  satisfaz a equação diferencial parcial

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0, \quad (1)$$

em que  $\alpha^2 = T/\rho$ ,  $T$  é a tensão (força) na corda e  $\rho$  é a densidade de massa por unidade de comprimento da corda.  $\alpha$ , que tem unidades de comprimento/tempo, isto é, de velocidade, é a velocidade de propagação das ondas ao longo da corda.

O modelo, resumidamente descrito acima, que pode ser visto com mais detalhes em Medeiros e Andrade (1978), é considerado uma boa aproximação matemática para descrever as pequenas vibrações de uma corda elástica.

Neste trabalho, apresenta-se um estudo da equação (1), conhecida como equação de ondas. Utiliza-se o método de separação de variáveis na sua resolução. Consideram-se três diferentes situações: uma em que a corda tem extremidades fixas, outra em que suas extremidades estão livres e, após, o problema da corda infinita. Faz-se, também, um estudo da equação de Korteweg-de-Vries, cuja solução apresenta o fenômeno de dispersão, diferentemente do que acontece com as soluções da equação de ondas.

Em cada uma das situações estudadas, usa-se o *Maple* como ferramenta computacional, para melhor compreender e analisar o comportamento das soluções obtidas. Tal *software* matemático é extremamente útil neste estudo, não só no traçado de gráficos, mas também pelo fato de que as soluções dos problemas considerados são, na maioria das vezes, dadas por séries (somadas infinitas) de funções.

## CORDA ELÁSTICA COM EXTREMIDADES FIXAS

Nesta seção, considera-se o caso em que a corda tem as extremidades fixas em  $x = 0$  e  $x = 1$  e velocidade inicial de deslocamento nula. Além disso, supõe-se conhecida a sua posição inicial. Nesse caso, o sistema que descreve este fenômeno é

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) \equiv 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Como salientado anteriormente, utiliza-se o método de separação de variáveis na resolução do sistema (2). Procura-se, pois, uma solução de (2) da forma

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (3)$$

Substituindo-se (3) na equação (2), vê-se que  $u$  é solução do sistema somente se  $X(x)$  e  $T(t)$  satisfazem a relação

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\sigma, \quad (4)$$

em que  $\sigma$  é uma constante de separação.

Segue-se, de (4), que  $T(t)$  deve satisfazer a equação diferencial ordinária

$$T'' + \sigma T = 0 \quad (5)$$

e, de (4) e (2), que  $X(x)$  satisfaz o problema de valor inicial (PVI)

$$X'' + \sigma X = 0 \quad (6)$$

$$X(0) = 0, \quad (7)$$

$$X(1) = 0. \quad (8)$$

Um PVI do tipo (6)-(8) é conhecido como problema de contorno de Sturm-Liouville (BOYCE, 2001). Considera-se, na sua resolução, separadamente, três possibilidades para a constante de separação  $\sigma$ :

1) Se  $\sigma = 0$ . A solução geral da equação (6) é dada por

$$X(x) = k_1 x + k_2, \quad (9)$$

Substituindo-se as condições de contorno (7) e (8) na solução (9), conclui-se que  $k_1 = k_2 = 0$ , levando-se à solução trivial  $X(x) = 0$ . Assim, no caso  $\sigma = 0$ , chega-se somente à solução identicamente nula  $u(x, t) = 0$ .

2) Se  $\sigma < 0$ . Nesse caso, é conveniente escrever  $\sigma = -\lambda^2$ , com  $\lambda > 0$ . Então, a solução de (6) é, conforme Coddington (1961), da forma

$$X(x) = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{-\lambda x}. \quad (10)$$

Das condições de contorno (7) e (8), conclui-se que  $k_1 = k_2 = 0$ , chegando-se, novamente, à solução trivial  $X(x) = 0$ .

3) Se  $\sigma > 0$ . Escreve-se, por conveniência,  $\sigma = \lambda^2$ , com  $\lambda > 0$ . A solução de (6) é, nesse caso,

$$X(x) = k_1 \cos \lambda x + k_2 \sin \lambda x.$$

Ao utilizar a primeira condição de contorno (7), obtém-se que  $k_1 = 0$ , ou seja,

$$X(x) = k_2 \sin \lambda x.$$

E, da condição (8), que

$$k_2 \sin \lambda = 0.$$

Uma forma de satisfazer essa igualdade é tomar  $k_2 = 0$ , o que levaria, novamente, à solução trivial. Outra escolha possível é fazer  $\text{sen}\lambda = 0$ , ou seja,

$$\lambda = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

desse modo,

$$\sigma = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Obtém-se, então, um conjunto enumerável de soluções não triviais do problema (6)-(8), todas da forma

$$X_n(x) = \text{sen}(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Para encontrar a solução  $T(t)$ , basta substituir (12) em (5), obtendo a equação

$$T'' + n^2\pi^2 T = 0,$$

cujas soluções são

$$T(t) = k_1 \cos(n\pi t) + k_2 \text{sen}(n\pi t). \quad (14)$$

Ao utilizar a condição inicial  $u_t(x, 0) \equiv 0$ , conclui-se que  $k_2 = 0$  e, portanto,

$$T(t) = \cos(n\pi t), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Segue-se, de (13) e (15), que toda função da forma

$$u_n(x, t) = \text{sen}(n\pi x) \cos(n\pi t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

é solução do sistema (2) e, pelo princípio da superposição, sua solução geral é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{sen}(n\pi x) \cos(n\pi t), \quad (16)$$

em que as constantes  $C_n$  são escolhidas de modo que  $u$  satisfaça a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ . As constantes  $C_n$  são, portanto, os coeficientes da série de Fourier de senos da função  $f(x)$ .

Por exemplo, se a posição inicial  $f(x)$  da corda é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1/2 \\ -x+1 & , 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

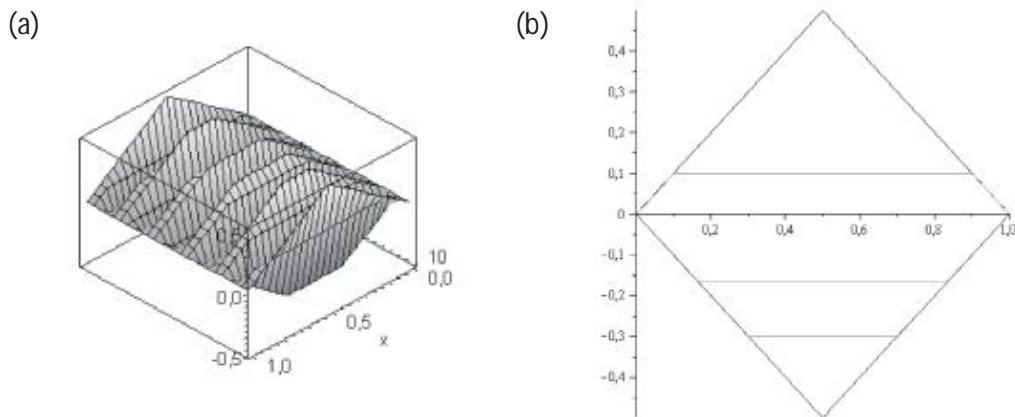
então, as constantes  $C_n$  são

$$c_n = 2 \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2 \pi^2}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim, a solução geral do sistema é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2} \operatorname{sen}(2n-1 \pi x) \cos(2n-1 \pi t).$$

Na figura a seguir, tem-se, respectivamente, o gráfico da solução  $u(x, t)$  e o deslocamento vertical da corda para alguns valores fixos de  $t$ .



**Figura 2** – (a) Gráfico da solução  $u(x, t)$  e (b) Deslocamento da corda para valores fixos de  $t$ .

### CORDA ELÁSTICA COM EXTREMIDADES LIVRES

Considera-se, nesta seção, o caso em que a corda tem as extremidades livres, ou seja, podem movimentar-se no sentido vertical, mas não no horizontal. Diz-se, nessa situação, que as extremidades estão engastadas. Matematicamente, isso acontece quando  $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ .

O sistema que modela tal situação é, portanto,

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) \equiv 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (17)$$

Procede-se como na seção anterior. Procura-se uma solução de (17) da forma

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Obtém-se, igualmente, duas equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + \sigma X = 0, \quad (18)$$

$$T'' + \sigma T = 0. \quad (19)$$

Após a análise das três possibilidades para o valor de  $\sigma$ , conclui-se que só existe solução não trivial para  $\sigma > 0$ . Assim, fazendo-se  $\sigma = \lambda^2$ , a solução  $X(x)$  será

$$X(x) = k_1 \cos \lambda x + k_2 \operatorname{sen} \lambda x. \quad (20)$$

Ao utilizar as condições de contorno do sistema (17), conclui-se que  $k_2 = 0$  e

$$k_1 \cos \lambda = 0.$$

Para que se tenham soluções não triviais de (18), a constante  $\lambda$  deve ser da forma

$$\lambda = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Obtém-se, então, infinitas soluções de (18), todas da forma

$$X_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Substituindo-se (21) em (19), resolvendo a equação e levando em consideração também a condição inicial  $u_t(x, 0) \equiv 0$ , segue-se que

$$T_n(t) = \cos(n\pi t), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

De (22) e (23) e do princípio da superposição chega-se, finalmente, à solução geral  $u$  do sistema (17):

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\pi x) \cos(n\pi t), \quad (24)$$

em que as constantes  $C_n$  são escolhidas de modo que  $u$  satisfaça a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ .

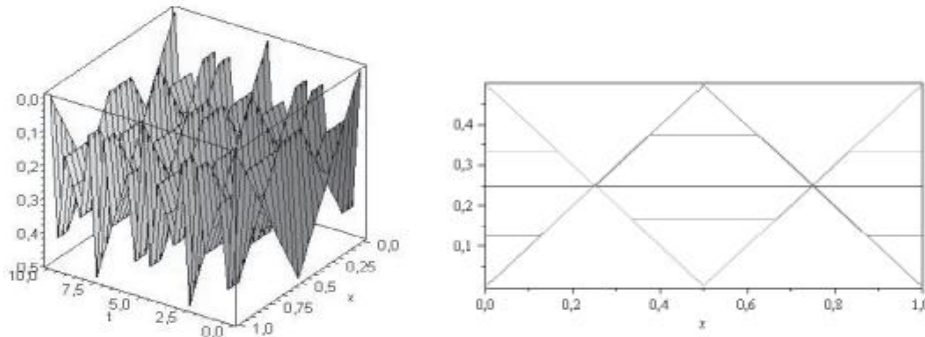
Se, novamente, considerar-se como posição inicial da corda a função

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1/2 \\ -x+1 & , 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

então,

$$u(x, t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2(2n-1)\pi)^2} \cos(2(2n-1)\pi x) \cos(2(2n-1)\pi t).$$

Na figura 3, mostra-se o gráfico da solução  $u(x,t)$  e o deslocamento vertical da corda para alguns valores fixos de  $t$ .



**Figura 3** – (a) Gráfico da solução  $u(x,t)$  e (b) Deslocamento da corda para valores fixos de  $t$ .

### O PROBLEMA DA CORDA INFINITA

Um caso interessante de se analisar é aquele em que a corda tem comprimento muito grande. Uma boa aproximação matemática para essa situação é considerar que  $-\infty < x < +\infty$ . Assim, o modelo matemático que descreve as pequenas vibrações de uma corda infinita é

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), & u_t(x,0) &= u_1(x) \end{aligned} \quad (25)$$

Conforme Figueiredo (2003), a expressão para a solução geral da equação (25), conhecida como fórmula de D'Alembert é

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t), \quad (26)$$

em que  $f$  e  $g$  são funções arbitrárias que podem ser determinadas por meio das condições iniciais em (25). Convém ressaltar que a expressão da solução  $u$  acima não é nada mais que uma superposição de ondas de transporte. Com efeito, basta observar que o operador envolvido na equação de ondas pode ser fatorado como

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x),$$

e que as ondas de transporte que se decompõe na solução correspondem às soluções das equações

$$(\partial_t + \partial_x)u = 0 \text{ e } (\partial_t - \partial_x)u = 0.$$



Desse modo, a solução da primeira equação é  $u = g(x - t)$  e a solução da segunda é  $u = f(x+t)$ . Uma questão importante de salientar é que se (16) e (26) são todas soluções da equação de ondas, não deveriam, de certa forma, ser coincidentes? Efetivamente, à medida que se fixam os dados iniciais (posição e velocidade inicial da corda), as soluções de fato coincidem. Para perceber isso basta considerar um dos termos de (16), isto é, uma solução da forma  $\cos(k\pi t)$   $\text{sen}(k\pi x)$ . Utilizando as fórmulas trigonométricas habituais, vê-se que

$$\begin{aligned}\cos(k\pi t) \text{sen}(k\pi x) &= \frac{1}{2} [\text{sen } k\pi x+t + \text{sen } k\pi x-t ] \\ &= \frac{1}{2} [f_k(x+t) + f_k(x-t)],\end{aligned}$$

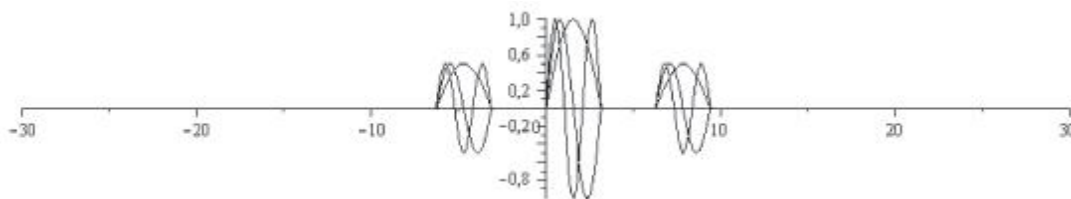
em que

$$f_k(y) = \text{sen}(k\pi y). \quad (27)$$

Ao tratar de modo análogo os demais termos da série (16), observa-se que, efetivamente, a função em série de Fourier (16) pode ser escrita na forma (26), como superposição de ondas de transporte.

Essa observação ilustra o modo com que cada componente da série de Fourier da solução geral propaga-se em função do tempo, ou seja, todas são ondas que se deslocam com mesma velocidade  $u$ .

O gráfico abaixo ilustra o comportamento das três primeiras componentes de Fourier da solução (16), para os valores distintos  $t = 0$  e  $t = 2\pi$ .



**Figura 4** – Comportamento das componentes de Fourier para dois valores fixos de  $t$ .

## A EQUAÇÃO DE KORTWEG-DE-VRIES LINEARIZADA

A observação feita na seção anterior mostra que todas as componentes da solução em série da equação de ondas deslocam-se com mesma velocidade, ou seja, a solução geral é a superposição de ondas de transporte que se deslocam com mesma velocidade. Esse fenômeno não acontece, por exemplo, com as soluções da equação

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (28)$$

conhecida como equação de Airy ou equação de Korteweg-de-Vries linearizada.

Com o objetivo de verificar esse fato, suponha-se que é dada a condição inicial

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^n a_k \text{sen}(k\pi x). \quad (29)$$

Para resolver a equação diferencial parcial (28), com condição inicial (29), utiliza-se, novamente, o método de separação de variáveis, ou seja, procura-se uma solução da forma

$$u(x,t) = X(x) T(t).$$

Chega-se, como antes, a duas equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + \sigma X = 0$$

e

$$T' + \sigma T = 0.$$

Ao analisar as possibilidades para a constante de separação  $\sigma$ , pode-se concluir que a solução de (28)-(29) é da forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^n a_k (\cos k^3 \pi^3 t \text{sen } k\pi x + \text{sen } k^3 \pi^3 t \cos k\pi x). \quad (30)$$

Observa-se, então, que as diferentes componentes de Fourier da solução são da forma

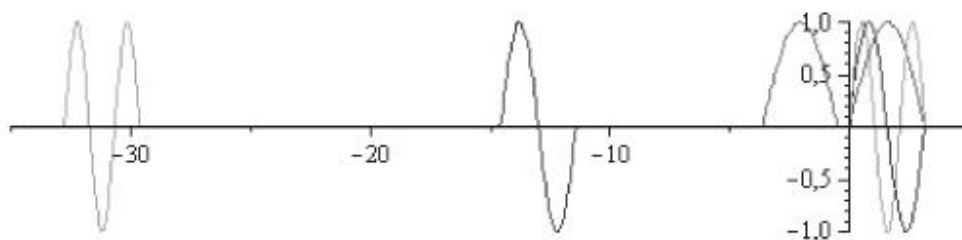
$$\begin{aligned} \cos(k^3 \pi^3 t) \text{sen}(k\pi x) + \text{sen}(k^3 \pi^3 t) \cos(k\pi x) &= \\ &= \text{sen}(k\pi x + k^2 \pi^2 t) = f_k(x + k^2 \pi^2 t), \end{aligned}$$

com

$$f_k(y) = \text{sen}(k\pi y).$$

Portanto, cada componente de Fourier propaga-se a uma velocidade distinta  $-k^2\pi^2$ .

A figura 5 ilustra o comportamento das três primeiras componentes de Fourier da solução (30), para os valores distintos  $t = 0$  e  $t = \pi + 1$ . Pode-se observar, por meio da figura, uma tendência de dispersão das componentes de Fourier da solução quando  $t$  varia.



**Figura 5** – Comportamento das três primeiras componentes de Fourier para dois valores fixos de  $t$ .

## CONCLUSÃO

A partir deste estudo, conclui-se que o método de separação de variáveis é uma importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais parciais e, conseqüentemente, para um entendimento de importantes fenômenos físicos, como no caso da equação de ondas e da equação de Korteweg-de-Vries.

É importante salientar também a importância do *software Maple* para a análise gráfica e para uma melhor compreensão do comportamento das soluções obtidas. Sem o uso dessa ferramenta computacional ficaria inviável fazer, por exemplo, a soma e o gráfico das soluções em série para valores muito grandes de  $n$  ou a análise dos efeitos dispersivos. Um estudo interessante sobre séries de Fourier, utilizando ferramentas computacionais, é feito também por Rodriguez e Zuazua (2003) e por Logan (1998).

## REFERÊNCIAS

BOYCE, William; DI PRIMA, Richard. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

CODDINGTON, Earl, A. **Introduction to Ordinary Differential Equations**. New York: Dover Publications Inc., 1961.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise de Fourier e Equações diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2003.

LOGAN, John David. **Applied Partial Differential Equations**. New York: Springer, 1998.

MEDEIROS, Luiz Adauto; ANDRADE, Nirzi. G. **Iniciação às equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: LTC, 1978.

RODRÍGUEZ-DEL-RÍO, Roberto; ZUAZUA, Enrique. **Series de Fourier y fenómeno de Gibbs**. Cubo, Mat. Educ., n. 2, p. 185-224, 2003.