

A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR COM CONDIÇÕES MISTAS DE FRONTEIRA¹

THE HEATING TRANSFERENCE EQUATION WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Lorens Buriol Siguenãs² e Marcio Violante Ferreira³

RESUMO

Apresenta-se, neste trabalho, uma aplicação do método de separação de variáveis na resolução da conhecida equação de transferência de calor, que modela o fluxo de calor numa barra condutora, cuja superfície lateral está isolada termicamente do meio. Inicialmente, considera-se um caso mais geral de equação parabólica linear de segunda ordem com condições de fronteira mistas e, posteriormente, faz-se uma análise de três casos particulares do problema de transferência de calor: barra com extremidades mantidas a temperatura constante, com extremidades isoladas e extremidades com fluxo proporcional à temperatura. Em cada um dos casos apresenta-se um esquema gráfico que mostra o comportamento da solução obtida utilizando-se, para isso, o *software* matemático *Maple* como ferramenta computacional.

Palavras-chave: equação do calor, separação de variáveis, condições mistas de fronteira.

ABSTRACT

This work presents an application of the separation of the variable method in solving the well-known heating transference equation, which shapes the heating flow in a conducting bar, whose side is thermally insulated from the environment. Initially it is considered a more general case of second order linear parabolic equation with mixed boundary condition and then, it is discuss three specific cases of the heating transfer problem: bar

¹ Trabalho de Iniciação Científica - PROBIC.

² Acadêmico do Curso de Matemática - UNIFRA.

³ Orientador - UNIFRA.

with constant temperature at the ends, insulated ends and ends with flux proportional to heating. In each case it is presented a graphic scheme showing the behavior of the reached solution, using for this, the Maple software as a computational tool.

Keywords: *heating equation, separation of variables, mixed boundary conditions.*

INTRODUÇÃO

Os estudos matemáticos sobre condução de calor começaram no século XIX com as primeiras investigações de Joseph Fourier (1768-1830), época na qual foram, concomitantemente, desenvolvidos alguns métodos para resolução desse problema. O mais importante, sem dúvida, é o método de separação de variáveis, que foi a alavanca para o desenvolvimento da teoria sobre séries de Fourier. A essência do método de separação de variáveis está no fato de que uma classe “grande” de funções pode ser desenvolvida como uma série de senos e/ou cossenos. Saliente-se que o método de separação de variáveis já tinha seus primeiros traços com D’Alembert, Daniel Bernoulli e Euler por volta de 1750, a partir de suas investigações sobre vibrações e ondas.

Neste trabalho, faz-se uma aplicação do método de separação de variáveis na resolução de uma classe de equações parabólicas que, em particular, contém a equação do calor. Apresenta-se, assim, um modelo geral com condições de fronteira mista e a posterior aplicação em casos particulares da equação de transferência de calor em uma barra: extremidades mantidas a temperatura constante, extremidades isoladas e extremidades com fluxo proporcional à temperatura.

Por se tratar, na maioria das vezes, de funções dadas por séries infinitas, o uso de ferramentas computacionais torna-se útil na análise qualitativa das soluções de equações diferenciais parciais. Em cada um dos casos analisados apresentam-se, portanto, gráficos que mostram o comportamento da solução do modelo. Os recursos utilizados para esse fim foram do *software Maple*, principalmente suas ferramentas de traçado de gráficos e de soma de séries de funções.

EQUAÇÃO PARABÓLICA LINEAR COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA MISTAS

Nesta seção, considera-se um caso geral de equação parabólica linear com condições de fronteira mistas:

$$u_t - u_{xx} + Au + Bu_x = 0 \quad 0 < x < L, t > 0, \quad (1)$$

$$Cu(0,t) = Du_x(0,t), \quad Cu(L,t) = Du_x(L,t) \quad t > 0, \quad (2)$$

em que $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ são constantes. O sistema acima é o modelo mais completo de equação do calor, representando, conforme os valores das constantes, uma situação física diferente. Considera-se, também, que seja conhecida a distribuição inicial de temperatura:

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 < x < L \quad (3)$$

O objetivo principal desta seção é obter a solução geral do sistema (1)-(3). O método a ser utilizado na resolução do sistema acima é o de separação de variáveis. Antes disso, faz-se uma mudança de variável adequada, tornando o sistema anterior mais simples. Com efeito, fazendo-se

$$v(x, t) = e^{\alpha t} e^{\beta x} u(x, t)$$

$$\alpha = A + \frac{B^2}{4} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{-B}{2}$$

obtem-se que $v(x, t)$ é solução da equação

$$v_t - v_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (5)$$

com condições de fronteira

$$(C + \beta D)v(0, t) = Dv_x(0, t), \quad (C + \beta D)v(L, t) = Dv_x(L, t), \quad t > 0 \quad (6)$$

O próximo objetivo é resolver a equação (5), com condições de fronteira (6), utilizando-se o método de separação de variáveis, que pode ser estudado com mais detalhes em Figueiredo (2003). Procura-se, portanto, uma solução $v(x, t)$ da equação (5) da forma

$$v(x, t) = X(x) T(t) \quad (7)$$

Substituindo-se (7) em (5), vê-se que $v(x, t)$ é solução da equação somente se $X(x)$ e $T(t)$ satisfazem a relação

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\sigma, \quad (8)$$

em que σ é constante (conhecida como constante de separação). De (8), conclui-se que $T(t)$ deve satisfazer a equação diferencial ordinária

$$T + \sigma T = 0 \quad (9)$$

e, de (6) e (8), que $X(x)$ satisfaz o problema de valor inicial (PVI)

$$X'' + \sigma X = 0, \quad (10)$$

$$(C + \beta D) X(0) = DX'(0) \quad (11)$$

$$(C + \beta D) X(L) = DX'(L) \quad (12)$$

A análise do problema de contorno de Sturm-Liouville (10)-(12) é feita, conforme Boyce e Di Prima (2001), considerando-se, separadamente, três possibilidades para a constante de separação σ :

1) Se $\sigma = 0$. Então, a solução geral da eq. (10) é da forma

$$X(x) = k_1 x + k_2 \quad (13)$$

Ao aplicar as condições de contorno (11) e (12) na solução (13), conclui-se que $k_1 = k_2 = 0$, levando-se à solução trivial $X(x) = 0$. No caso $\sigma = 0$, chega-se somente à solução identicamente nula $v(x,t) = 0$.

2) Se $\sigma < 0$. Para simplificar a notação, pode-se admitir que $\sigma = -\lambda^2$, com $\lambda > 0$. Separa-se esse caso em dois outros subcasos:

a) Se $(C + \beta D)^2 \neq \lambda^2 D^2$. Substituindo σ na eq. (10), tem-se que

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \quad (14)$$

cuja solução geral, conforme Coddington (1961), é

$$X(x) = k_1 e^{\lambda x} + k_2 e^{-\lambda x}. \quad (15)$$

Ao aplicar as condições de contorno (11) e (12) em (15), obtém-se o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (C + \beta D - \lambda D)k_1 + (C + \beta D + \lambda D)k_2 = 0 \\ (C + \beta D - \lambda D)e^{\lambda L}k_1 + (C + \beta D + \lambda D)e^{-\lambda L}k_2 = 0 \end{cases}$$

cujo determinante da matriz dos coeficientes é

$$\{C + \beta D^2 - \lambda^2 D^2\}(e^{-\lambda x} - e^{\lambda x}) \neq 0$$

Desse modo, resulta que $k_1 = k_2 = 0$ e, conseqüentemente, $X(x) = 0$. Novamente, obtém-se a solução trivial que, no presente estudo, não se tem interesse.

b) Se $(C + \beta D)^2 = \lambda^2 D^2$, ou seja, $\sigma = \frac{-(C + \beta D)^2}{D^2}$.

Substituindo-se em (10), tem-se que

$$X'' + \sigma X = 0, \tag{16}$$

cuja solução geral é

$$X(x) = k_1 e^{(-\sigma)x} + k_2 e^{-(\sigma)x}. \tag{17}$$

Ao aplicar as condições de contorno (11) e (12) em (17), conclui-se que, além da solução trivial, o problema de valor inicial (10)-(12) possui outras soluções, a saber:

$$X(x) = ke^{(-\sigma)x}, \text{ se } \lambda D = (C + \beta D)$$

e

$$X(x) = ke^{-(\sigma)x}, \text{ se } \lambda D = -(C + \beta D).$$

Para encontrar $T(t)$ basta substituir σ em (9), obtendo-se

$$T(t) = ke^{-\sigma t}.$$

Portanto, nesse caso 2-b o sistema possui soluções da forma

$$u(x,t) = ke^{-\sigma t} e^{\pm(-\sigma)x}, \text{ se } \lambda D = \pm(C + \beta D).$$

De (4) segue, então, que a solução de (1)-(2) é

$$u(x,t) = ke^{\left(\frac{-B^2}{4} - A\right)t} \cdot e^{\frac{B}{2}x} e^{-\sigma t} e^{\pm(-\sigma)x} \tag{18}$$

É importante ressaltar que, apesar da função $u(x,t)$ dada por (18) ser uma solução do sistema (1)-(2), a condição inicial (3) é satisfeita somente para uma classe bem restrita de funções $f(x)$.

Observação: Para a análise anterior, deve-se trabalhar com a hipótese de que $D \neq 0$. O caso em que $D = 0$ pode ser tratado como em 2-a.

3) Se $\sigma > 0$. Nesse caso, $\sigma = \lambda^2$, com $\lambda > 0$. Substituindo em (10), obtém-se a equação

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (19)$$

cuja solução geral é

$$X(x) = k_1 \cos \lambda x + k_2 \operatorname{sen} \lambda x. \quad (20)$$

Das condições de contorno (11) e (12), tem-se, juntamente com (20), que

$$(C + \beta D) k_1 = \lambda D k_2$$

e

$$[(C + \beta D) k_2 + \lambda D k_1] \operatorname{sen} \lambda L = 0.$$

Se for $[(C + \beta D) k_2 + \lambda D k_1] = 0$, então $k_1 = k_2 = 0$ e, novamente, chega-se à solução trivial $X(x) = 0$. Escolhem-se, então, valores de λ para os quais $\operatorname{sen} \lambda L = 0$, ou seja,

$$\lambda L = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Segue-se que

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \sigma. \quad (21)$$

Assim, para $\sigma > 0$, encontra-se um conjunto enumerável de autofunções não nulas de (10)-(12), da forma

$$X_n(x) = \frac{n\pi D}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + (C + \beta D) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Para encontrar $T(t)$, basta substituir a expressão (21), para σ , na equação (9). Obtém-se, portanto,

$$T_n(t) = K_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

Segue-se, pois, que toda função da forma

$$v_n(x, t) = \left(\frac{n\pi D}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + (C + \beta D) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \quad (24)$$

é solução da equação (5) e satisfaz as condições de fronteira (6). Do princípio da superposição, conclui-se que a solução geral do sistema (5)-(6) é

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n\pi D}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + (C + \beta D) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}}$$

Finalmente, voltando-se à identidade (4), chega-se à solução geral do sistema (1)-(3)

$$u(x, t) = e^{-\left(\frac{B^2}{4} + A\right)t} \cdot e^{\frac{B}{2}x} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n\pi D}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} + (C + \beta D) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \right\}, \quad (25)$$

em que as constantes C_n são os coeficientes de Fourier da função $f(x)$, que é dada pela condição inicial (3).

A solução geral obtida acima permite estudar, separadamente, alguns modelos de propagação de calor numa barra, com diferentes condições de fronteira. Isso será feito nas seções a seguir. Obviamente, um estudo mais rigoroso da solução do sistema (1)-(3) exige uma análise sobre a convergência da série de funções (25), o que foge, no entanto, da proposta do presente trabalho, que está mais centrado no comportamento da solução para diferentes valores das constantes A , B , C e D . Um estudo mais detalhado sobre isso é encontrado em Figueiredo (2003) e Medeiros e Andrade (1978).

BARRA COM EXTREMIDADES MANTIDAS A TEMPERATURA CONSTANTE

Analisa-se, nesta seção, o modelo

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (26)$$

A função $u(x, t)$ fornece a temperatura do ponto x da barra no instante de tempo t . As condições de fronteira indicam que as extremidades da barra são mantidas em temperatura constante zero. O modelo acima é obtido do sistema (1)-(3)

quando se toma $A = B = D = 0$ e $L = \pi$. Como visto na seção anterior, a solução geral é dada, nesse caso, por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \text{sen}(nx),$$

em que as constantes C_n são os coeficientes da série de Fourier de senos da função $f(x)$.

Como exemplo, considera-se o caso em que a distribuição inicial de temperatura da barra, $f(x)$, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

Desenvolvendo-se $f(x)$ como uma série de Fourier de senos, obtém-se que

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \text{sen}[(2n-1)x]$$

A solução geral do sistema (26) é, portanto,

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 t} \text{sen}[(2n-1)x]$$

A figura 1 mostra o comportamento da solução $u(x, t)$ e da distribuição da temperatura na barra para alguns valores fixos de t . Nota-se, como era de se esperar, que $u \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

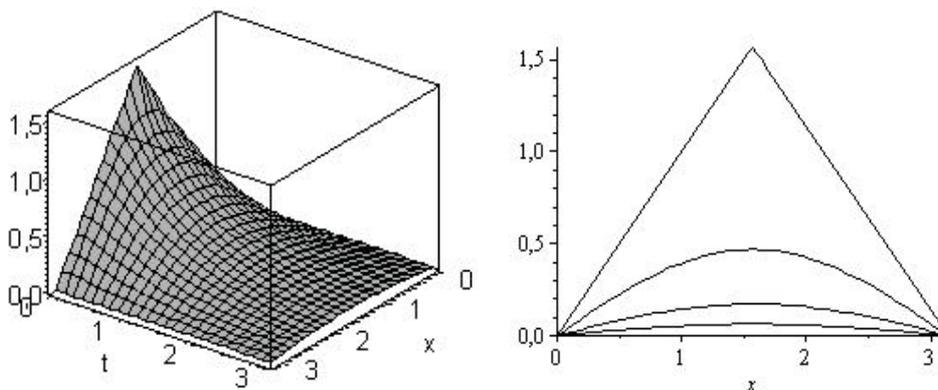


Figura 1 – (a) Gráfico da solução $u(x, t)$ e (b) Distribuição de temperatura para $t = 0, 1, 2$ e 3 .

BARRA COM EXTREMIDADES ISOLADAS

No caso em que as extremidades da barra estão isoladas, não há fluxo de calor através das mesmas. Um sistema que modela essa situação é dado por

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (27)$$

O modelo acima é obtido do sistema (1)-(3) quando se toma $A = B = C = 0$ e $L = \pi$. Da expressão (25), percebe-se que a solução, nesse caso, é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \cos nx,$$

sendo que as constantes C_n são os coeficientes de Fourier da função $f(x)$.

Ao considerar, como exemplo de distribuição inicial de temperatura, a função

$$f(x) = x, \quad 0 < x < \pi,$$

obtém-se que

$$u(x, t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2 t} \cos[2n-1 x].$$

A seguir, estão os gráficos da função $u(x, t)$ (Figura 2-a) e da distribuição de temperatura na barra para alguns valores fixos de t (Figura 2-b).

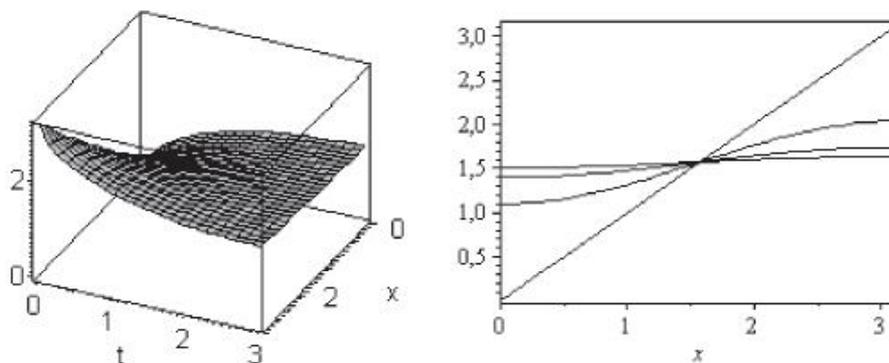


Figura 2 – (a) Gráfico da solução $u(x, t)$ e (b) Distribuição de temperatura para $t = 0, 1, 2$ e 3 .

Pode-se observar, por meio dos gráficos acima, ou mesmo pela expressão em série da solução, que $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$, mostrando que o calor na barra tende a uma distribuição uniforme não nula.

BARRA COM FLUXO DE CALOR NAS EXTREMIDADES PROPORCIONAL À TEMPERATURA

Por fim, considera-se um caso, também interessante, em que o fluxo de calor $u_x(0, t)$ e $u_x(\pi, t)$ nas extremidades da barra é proporcional à temperatura u nesses extremos. O sistema que modela esse fenômeno é dado por

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = u(0, t) \quad u_x(\pi, t) = u(\pi, t) & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (28)$$

Chega-se a esse modelo, a partir de (1)-(3), quando se considera $A = B = 0$, $C = D \neq 0$ e $L = \pi$. A solução geral de (28) é, portanto, da forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [n \cos(n\pi x) + \text{sen}(n\pi x)] e^{-n^2 t},$$

em que os coeficientes C_n são obtidos do desenvolvimento da função $f(x)$ em termos das autofunções (22). Por exemplo, se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n^3} \text{sen}(n\pi x) \right],$$

então,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} \cos(n\pi x) + \frac{1}{n^3} \text{sen}(n\pi x) \right] e^{-n^2 t}$$

Abaixo, apresenta-se o gráfico de $u(x, t)$ (Figura 3) e da distribuição de temperatura na barra para alguns valores fixos de t (Figura 4). Quando $t = 0$, tem-se a distribuição inicial de temperatura $f(x)$ e, quando t cresce, a temperatura na barra tende a zero.

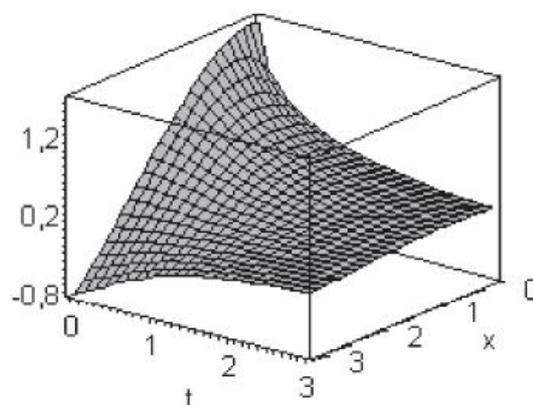


Figura 3 – Gráfico da função $u(x, t)$.

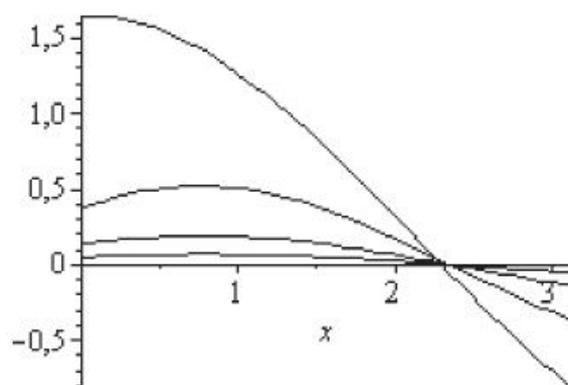


Figura 4 – Distribuição de temperatura para $t = 0, 1, 2$ e 3 .

CONCLUSÃO

O estudo demonstrou que o método de separação de variáveis é uma poderosa ferramenta matemática na resolução de equações diferenciais parciais. Além disso, o auxílio computacional, por meio do *software Maple*, também foi importante na análise do comportamento das soluções de alguns modelos distintos de equação do calor. Isso se evidencia não só no traçado dos gráficos, mas também na possibilidade de aproximar as soluções em série com erro mínimo. Outras importantes aplicações do *Maple*, no estudo de equações diferenciais parciais, podem ser encontradas em Logan (1998). Esse tipo de estudo pode ser feito para outras equações diferenciais parciais de grande apelo físico, como, por exemplo, a equação de ondas e a equação de Korteweg de Vries.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William; DI PRIMA, Richard. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

CODDINGTON, Earl, A. **Introduction to Ordinary Differential Equations**. New York: Dover Publications Inc., 1961.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise de Fourier e Equações diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 2003.

LOGAN, John David. **Applied Partial Differential Equations**. New York: Springer, 1998.

MEDEIROS, Luiz Adauto; ANDRADE, Nirzi. G. **Iniciação às equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: LTC, 1978.