ISSN 1981-2841

A PROPORCIONALIDADE E ALGUMAS APLICAÇÕES[1]

PROPORTIONALITY AND SOME APLICATIONS

Ana Paula Magalhães de Abreu[2] e Adilção Cabrini Beust[3]

RESUMO

A finalidade deste trabalho é elucidar a noção fundamental de proporcionalidade, pois um aspecto importante do raciocínio com proporções implica em um domínio pleno de vários conceitos sobre números racionais, como, por exemplo, ordem e equivalência, relação entre a unidade e suas partes, significado e interpretação das razões e questões envolvendo a divisão. Assim, o desenvolvimento deste estudo foi realizado através da construção teórica dos conceitos sobre proporcionalidade, relacionando-os com aplicações em geometria e na vida cotidiana das pessoas. Concluindo-se, desse modo, que o raciocínio com proporção capacita os alunos com uma variedade de perspectivas e estratégias para a resolução de problemas, pois favorece um entendimento melhor por meio das ideias matemáticas.

Palavras-chave: proporções, números racionais, regra de três, problemas cotidianos.

ABSTRACT

This article aims to show the fundamental notion of proportionalities, for an important aspect of reasoning with proportions implies a sound understanding of several concepts of rational numbers, for instance, order and equivalence, relation between the unity and its parts, meaning and interpretation of reasons and questions involving division. Thus, the development of this study was made through the theoretical construction of proportionality concepts, relating them to geometry applications and in the daily life of people. We concluded that reasoning on proportion enables students with a variety of perspectives

---
[1] Trabalho Final de Graduação - TFG.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática - UNIFRA.
[3] Orientador - UNIFRA.

and strategies for the solving of problems, for it favors a better understanding through mathematical ideas.

Keywords: *proportionality, rule of three, applications.*

INTRODUÇÃO

O raciocínio com proporções é considerado um dos componentes do raciocínio formal adquirido na adolescência. A maioria das tentativas feitas no passado para definir o raciocínio com proporções levava em conta, primordialmente, as respostas individuais a problemas de valor ausente, em que se davam três dos quatro valores de duas razões ou taxas iguais e tinha-se de achar o quarto, nesse caso, o valor ausente. Os alunos que respondiam corretamente às situações numericamente complicadas, contendo múltiplos não inteiros nos pares-taxas, eram situados no nível mais elevado e considerados capazes de raciocinar com proporções. Hoje, acredita-se que se trata de uma visão limitada, uma condição necessária, mas não suficiente, especialmente porque esses problemas são utilizados apenas para aplicações em algoritmos.

O raciocínio com proporções é uma forma de raciocínio matemático. Ele envolve senso de covariação, comparações múltiplas e capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações.

Além disso, está muito ligado à inferência e à predição envolvendo métodos de pensamento qualitativos e quantitativos. O fato de muitos aspectos do mundo atual funcionar de acordo com regras de proporcionalidade faz com que a faculdade de raciocinar com proporções seja extremamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real.

O raciocínio com proporções também é necessário para se comparar duas razões ou taxas dadas em situações numéricas, podendo-se comparar $\frac{x'}{y'}$ com $\frac{x''}{y''}$, sendo dados x', y', x'' e y''. A tarefa consiste em determinar qual delas é maior, mais rápida, mais escura, mais cara, mais densa e assim por diante.

As proporções envolvem o pensamento qualitativo, pois respondem às questões, como: Essa resposta tem sentido maior ou menor? Esse tipo de raciocínio requer uma comparação que depende de valores específicos ou não? Assim, seja o seguinte exemplo: Se Gabriela corresse hoje menos voltas na pista e gastasse mais tempo do que ontem, sua velocidade seria maior, menor, igual, ou é impossível dizer? E quando fizesse menos voltas em tempo menor? Nesse tipo de situação, o raciocínio qualitativo exige a capacidade de interpretar o significado das duas taxas, guardar essa informação e, então, comparar as interpretações de acordo com alguns critérios pré-determinados. Esse processo requer uma capacidade mental, que Piaget classificou no nível operacional formal do desenvolvimento cognitivo. Refere-se a esse processo como operar com operações, ou seja, a interpretação de cada uma dessas razões é uma operação em si e por si, a comparação é outro nível de operação, e isso requer um raciocínio comparativo em níveis múltiplos, bastante diferentes de uma abordagem algorítmica, em que se usa uma regra para resolver problemas prognosticáveis por caminhos predeterminados.

Outro aspecto do raciocínio com proporções implica num domínio sólido de vários conceitos sobre números racionais, como, por exemplo, ordem e equivalência, a relação entre a unidade e as suas partes, significado e interpretação das razões e questões envolvendo a divisão, especialmente no que se refere a dividir um número menor por um maior. Para raciocinar com proporções é preciso ter a flexibilidade mental para abordar os problemas por vários ângulos, e, ao mesmo tempo, ter noções suficientemente sólidas para não se deixar afetar por números grandes e complicados ou pelo contexto em que se insere o problema. O aluno precisa ser capaz de distinguir situações proporcionais e não proporcionais e isso tem implicações diretas para o seu aprendizado.

A proporcionalidade direta é um exemplo simples, mas importante, de função matemática e pode ser representada como uma equação linear. Desse modo, é uma ponte adequada e talvez necessária entre experiências e modelos numéricos comuns e relações mais abstratas, que se expressam de forma algébrica. As proporções são úteis numa grande variedade de situações de resolução de problemas, como muitos tipos de problemas sobre taxa - por exemplo, velocidade, mistura, densidade, escala, conversão, consumo, preço e outras formas de comparações. O raciocínio e o conhecimento algébrico, muitas vezes, envolvem modos diferentes de representação. Tabelas, gráficos, equações, desenhos e diagramas são maneiras importantes pelas quais se podem representar as ideias algébricas. A capacidade de criar e compreender traduções desses modos e de um para outro é um elemento essencial de competência matemática em todas as áreas e não apenas em álgebra.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em relação à proporcionalidade e algumas aplicações, três livros foram importantes para o ensaio. No primeiro dos livros, Lima (1991, p. 125-126), quando trata especialmente de Grandezas Proporcionais, diz:

> que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número [...] No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais [...] Nos casos examinados, a grandeza procurada depende apenas de uma outra espécie de grandeza. É muito frequente, porém, a grandeza procurada depender de várias outras, podendo, neste caso, ser diretamente proporcional a uma e inversamente proporcional a outras. Tudo claro, simples e elementar. Infelizmente, mais de cem anos depois da primeira edição de Trajano, vários autores contemporâneos de livros usados em nossas escolas ainda fazem confusão acerca de grandezas direta ou inversamente proporcionais, especialmente quando uma grandeza depende de várias outras.

No segundo livro de Coxford e Shule (1994, p. 92), quando tratam do algoritmo-padrão, afirmam que,

> embora se possa argumentar, de fato, que os alunos precisam automatizar certos processos matemáticos usados mais comumente (GAGNÉ, 1983), pode-se argumentar, igualmente, que os métodos mais eficientes são, com frequência, aqueles menos significativos, que devem, portanto, ser evitados nas fases de ensino iniciais. Infelizmente, muitas vezes confundimos eficiência com significação e, por descuido, embora com a melhor das intenções, introduzimos um conceito da maneira mais eficiente, porém menos significativa. O algoritmo-padrão da proporcionalidade - dados $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, a, b e c, achar x – é uma dessas áreas. O processo padrão de resolução consiste em multiplicar em cruz e achar x. Isto é, ax = cb, ou x = $\frac{cb}{a}$.
> Esse algoritmo, em si e por si, é um processo mecânico desprovido de significado no contexto do mundo real. Ele pode, porém, ser focalizado de maneira racional, como explicaremos a seguir.

Eves (1997, p. 176) argumenta sobre A Teoria das Proporções:

> É interessante notar a diferença entre as demonstrações pitagórica, eudoxiana e de textos modernos de uma proposição simples envolvendo proporções. Escolhamos a Proposição VI 1 cujo enunciado é *áreas de triângulos que têm mesma altura estão entre si como suas bases.* Permitir-nos-emos usar a Proposição I 38, segundo a qual *triângulos que têm bases e alturas iguais têm áreas iguais* e uma consequência de I 38 cuja informação é que dois triângulos quaisquer que têm mesma altura, o de maior área é o que tem maior base.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

Neste trabalho, o objetivo principal é abordar o conceito de proporcionalidade a fim de esclarecê-lo com relação a algumas controvérsias conceituais que possam existir e ao mesmo tempo mostrar em que situações aplicar as noções de proporções na geometria e no cotidiano.

Dadas duas grandezas x e y relacionadas, em que cada valor especificado de x corresponde a um valor de y, escreve-se que $y = f(x)$, ou seja, y é uma função de x.

Ao considerar x'e x'' dois valores que correspondem $y' = f(x')$ e $y'' = f(x'')$, tem-se que:

(i) Se $x' < x''$, então $y' < y''$, diz-se que y é uma função crescente de x;

(ii) Se $x' < x''$, então $y' > y''$, diz-se que y é uma função decrescente de x.

Nesses dois casos acima, tem-se que y é uma função monótona de x.

GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Definição**:** Seja a grandeza y a função de grandeza, isto é, $y = f(x)$. Diz-se que y é diretamente proporcional a x quando:

(i) y é uma função crescente de x;

(ii) Se x for multiplicado por um número natural n, y também será multiplicado por n, logo: $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, $\forall\, x \in \mathfrak{R}$ e $\forall\, n \in \mathrm{N}$.

Um exemplo pode ser dado a partir da definição acima, a qual permite afirmar que o peso de um arame homogêneo é diretamente proporcional ao comprimento desse arame, então o peso é função crescente do comprimento.

A homogeneidade do arame significa que dois pedaços do mesmo comprimento (tirados de qualquer parte do arame) têm o mesmo peso. Assim, o peso total de n pedaços com o mesmo comprimento é igual a n vezes o peso de cada um desses pedaços, ou seja, multiplicando-se o comprimento do arame por n, seu peso será também multiplicado por n.

GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Definição: Seja a grandeza y a função de grandeza, isto é, y = f(x). Diz-se que y é inversamente proporcional a x quando:

(i) y = f(x) é uma função decrescente de x;

(ii) Se x for multiplicado por um número natural n, o valor correspondente a y fica dividido por n, logo $f(n \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(x),\ \forall\ x \in \Re$ e $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Por exemplo, quando o tempo necessário para ir através de uma linha reta, de um ponto A a um ponto B, com velocidade constante, é inversamente proporcional à velocidade. De fato, o tempo diminui quando a velocidade aumenta, e, ainda, ele reduz a metade, a um terço, a um quarto, etc., quando a velocidade duplica, triplica, multiplica etc..

Observação: É importante salientar que y pode ser uma função crescente (ou decrescente) de x sem que seja diretamente (ou inversamente) proporcional a x, como mostram as situações abaixo.

Por exemplo, se a cada dia metade do volume contido num certo reservatório evapora-se, o volume y de água existente no reservatório é uma função decrescente do número x de dias decorridos. Se o volume da água inicialmente contida no reservatório era V, então o volume y, depois de decorridos x dias, será $y = \frac{V}{2^x} = f(x)$. Como, $2^{nx} \neq n \cdot 2^x$, segue-se que $\frac{V}{2^{nx}} \neq \frac{1}{n} \cdot \frac{V}{2^x}$, ou seja, $f(n \cdot x) \neq \frac{1}{n} \cdot f(x)$ quando $n \neq 1$. Consequentemente, o volume de y, mesmo sendo decrescente do número x de dias, não é inversamente proporcional a x.

A área de um quadrado é uma função crescente do lado, mas, ao dobrar o lado, a área fica multiplicada por quatro (em vez de dois), pois um quadrado de lado 2a decompõe-se em quatro quadrados justapostos de lado a.

A partir dos exemplos acima, conclui-se que as definições dadas para grandezas diretamente ou inversamente proporcionais ocorrem por meio de duas condições, a primeira condição apenas não é suficiente, ou seja, a segunda não é consequência dela, surge, então, a pergunta: A segunda condição acarretaria a primeira condição?

Dessa maneira, tem-se o seguinte: Se existisse somente números racionais e se duas grandezas da mesma espécie fossem sempre comensuráveis, a igualdade $f(n.x) = n.\ f(x)$, $\forall\, x \in \Re$ e $\forall\ n \in \mathrm{N}$. Concluí-se que $y = f(x)$ é crescente. Analogamente de $f(n\ .\ x) = \dfrac{f(x)}{n}$, concluí-se que $y = f(x)$ é decrescente, o que mostrar-se-á a seguir.

LEMA

Se $f(n\ .\ x) = n.\ f(x)$, $\forall\, x > 0$, $n \in \mathrm{N}$, então $f(r.x) = r\ .\ f(x)$, para todo número racional $r = \dfrac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathrm{N}$.

Demonstração: Tem-se que $q.\ f(r\ .\ x) = f(q\ .\ r\ .\ x) = f(q\ .\ \dfrac{p}{q}\ .\ x) = f\ (p\ .\ x) = p.\ f(x)$.

Portanto, $f(r\ .\ x) = \dfrac{p}{q}\ .\ f(x) = r.\ f(x)$.

Com o mesmo raciocínio, pode-se demonstrar analogamente que se $f(n\ .\ x) = \dfrac{f(x)}{n}$, $\forall\, x > 0$ e $\forall\, n \in \mathrm{N}$, então $f(r\ .\ x) = \dfrac{f(x)}{r}$, para todo número racional $r > 0$.

Provar-se-á que a condição $f(n\ .\ x) = n.\ f(x) \Rightarrow y = f(x)$ é crescente.

Ao considerar que $x < x'$, então $x' = c.\ x$, $c > 1$.

Se c for racional (as grandezas x e x' são comensuráveis), $f(x') = f(c\ .\ x) = c.\ f(x)$, em que $f(x) < f(x')$, pois $c > 1$. Se c for irracional (x pode ser o lado e x' a diagonal de um quadrado), não se pode usar o lema acima.

O teorema a seguir, que é fundamental em relação às grandezas proporcionais, vem esclarecer a dúvida deixada anteriormente.

TEOREMA 1

Ao considerar que $y = f(x)$ são equivalentes:

a) y é diretamente proporcional a x;

b) $\forall\ c > 0$, tem-se $f(c\ .\ x) = c.\ f(x)$;

c) Existe um número k, chamado a “constante de proporcionalidade”, entre x e y, tal que f(x) = k. x, $\forall$ x $\in \Re$.

Demonstração: Provar-se-á que: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a)

a) $\Rightarrow$ b), por absurdo, y = f(x) seja diretamente proporcional a x, mas que se consiga achar um número real c tal que f(c . x) $\neq$ c. f(x). Seja f(c . x) < c. f(x), isto é, $\frac{f(c.x)}{f(x)} < c$.

Entre quaisquer dois números reais, existe sempre um número racional. Acha-se r racional, tal que $\frac{f(c.x)}{f(x)} < r < c$, isso significa que f(c . x) < r . f(x) < c. f(x). O Lema anterior permite escrever essas desigualdades como: f(c . x) < f(r . x) < c. f(x).

A desigualdade f(c . x) < f(r . x), em que r < c está em contradição com a hipótese de y ser diretamente proporcional a x e ser uma função crescente de x.

Analogamente, mostra-se que não pode ser f(c . x) > c. f(x). Logo, f(c . x) = c. f(x), isto é, a) $\Rightarrow$ b).

Ao mostrar que b) $\Rightarrow$ c), toma-se k = f(1), na hipótese b), usada com x no lugar de c, tem-se f(x) = f(x . 1) = x. k, logo f(x) = k. x.

c) $\Rightarrow$ a), as grandezas usadas são números positivos, logo k = f(1) > 0, então x < x’ $\Rightarrow$ k . x < k. x’, e f(x) < f(x’), ou seja, y = f(x) é uma função crescente de x. Ainda, f(n.x) = k.n.x = n.k.x = n.f(x). Então, conclui-se que y é diretamente proporcional a x.

É importante observar que se sabe que f(n . x) = n. f(x), $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, pode-se mostrar que f(r . x) = r. f(x) para todo número racional r, mas somente consegue-se mostrar que f(c . x) = c. f(x) para c irracional, quando se sabe também que y = f(x) é uma função crescente de x. Com outras técnicas, podem-se achar exemplos de funções que satisfazem f(r . x) = r. f(x), para r racional, mas não são monótonas e não satisfazem f(c . x) = c. f(x), para todo c irracional. Funções desse tipo são obtidas de modo abstrato e não resultam de nenhuma comparação entre grandezas habituais. Entretanto, por existir tais funções, mostra-se que, na definição de grandezas direta ou inversamente proporcionais, são necessárias as duas condições que foram estipuladas, não podendo omitir nenhuma delas.

TEOREMA 2

Ao considerar que y = f(x) são equivalentes:

a) y é inversamente proporcional a x;

b) Para todo número real c tem-se f(c . x) = $\frac{f(x)}{c}$;

c) Existe um número k, chamado a “constante de proporcionalidade” entre x e y, tal que $f(x) = \frac{k}{x}$, $\forall x \in \Re^*$.

Demonstração: Utilizando o raciocínio análogo ao Teorema 1, demonstra-se também esse Teorema, fazendo, simplesmente, y é inversamente proporcional a x, se, e somente se, é diretamente proporcional a $\frac{1}{x}$.

Nas aplicações, entretanto, essas três maneiras de definir proporcionalidade não são equivalentes. Em problemas, a tarefa de verificar se y é proporcional a x (direta ou inversamente) é bem mais fácil de se resolver com as definições dadas. É necessário saber propriedades das grandezas em questão, propriedades que encerram a verdadeira noção de proporcionalidade, expressa pelas condições que se adota. A fórmula y = k. x raramente é dada no problema, é necessário deduzi-la - ela contém todas as informações que venham a ser solicitadas.

Assim, y = k. x e $y = \frac{k}{x}$ caracterizam a proporcionalidade (direta e inversa) entre x e y e conduzem a outra maneira de definir o mesmo conceito:

Sejam x’, x”, x’”, etc. valores assumidos por x e y’, y”, y’” valores correspondentes de y. Então, para que y seja diretamente proporcional a x é necessário e suficiente que: $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = ... =$ k, em que k é a constante de proporcionalidade. Assim, pode-se afirmar que y’ = k. x’; y” = k . x”; y’” = k.x’” , etc.

Da mesma maneira, a fim de que y seja inversamente proporcional a x, é necessário e suficiente que x’. y’ = x”. y” = x’”. y’” = ... = k.

Observa-se que se k é a constante de proporcionalidade (direta) entre x e y, a constante de proporcionalidade entre y e x é $\frac{1}{k}$, mas se x e y são inversamente proporcionais, a constante de proporcionalidade entre x e y é a mesma que entre y e x.

Um resultado básico de proporcionalidade em Geometria é o Teorema de Tales, que se apresenta a seguir, como exemplo de aplicação.

TEOREMA DE TALES

Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.

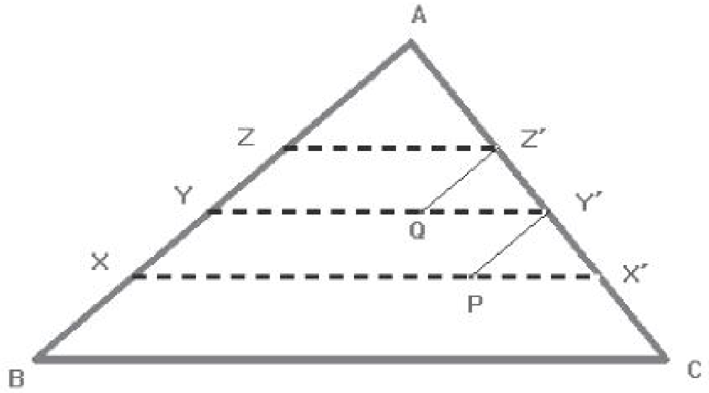

Figura 1 – Teorema de Tales.

Demonstração: Seja ABC o triângulo, para cada ponto X do lado AB corresponde o ponto X’ do lado AC, em que XX’ seja paralela a BC. Mostra-se que o comprimento X’C é diretamente proporcional ao comprimento XB. Em primeiro lugar, é evidente que se X, Y são pontos de AB, tais que XB < YB, então XB < Y’B porque XX’ e YY’ são paralelos. Após, afirma-se que se os pontos X, Y, Z do lado AB são tais que XY = YZ, então X’Y’ = Y’Z’. Para perceber isso, toma-se os pontos P em XX’ e Q em YY’ de modo que Y’P e Z’Q sejam paralelos a AB. Os triângulos PX’Y’ e QY’Z’ são congruentes, porque têm um lado igual (PY’ = QZ’) compreendido entre ângulos iguais. Desse modo, se X, Y são pontos de AB com YB = n. XB, então seus correspondentes X’, Y’ no lado AC são tais que Y’C = n. X’C. Portanto, concluiu-se que X’C é diretamente proporcional a XB. Para o Teorema 1 existe uma constante k em que, para todo ponto X do segmento AB, tem-se X’C = k. XB (*). E para X = A, em que A’ = A, obtém-se AC = = k. AB(**). Ao subtrair (*) de (**) tem-se:
AX’ = k. AX (***) e dividindo (***) por (*) obtém-se: $\frac{AX'}{AC} = \frac{AX}{XB}$, que é o que determina o Teorema de Tales.

A seguir, destaca-se uma exposição segundo Howard Eves sobre a Teoria das Proporções.

DIFERENÇAS ENTRE AS DEMONTRAÇÕES NA TEORIA DAS PROPORÇÕES

Consideram-se os triângulos ABC e ADE, cujas bases BC e DE estão na mesma reta MN (Figura 2). Os Pitagóricos, antes da descoberta dos números irracionais, assumiam a comensurabilidade de dois segmentos de reta quaisquer.

Assim, admitia-se que BC e DE tinham uma unidade de medida comum contida p vezes em BC e q vezes em DE. Marcam-se os pontos de divisão de BC e os de DE e liga-se ao vértice A. Desse modo, os triângulos ABC e ADE ficam divididos, respectivamente, em p e q triângulos menores, todos com mesma área. Segue-se que Δ ABC : Δ ADE = p : q = = BC : DE. Com a descoberta de que dois segmentos de reta não são necessariamente comensuráveis, a demonstração tornou-se inadequada e o perturbador "escândalo lógico" veio à tona.

A Teoria das Proporções de Eudoxo resolveu inteligentemente o escândalo da seguinte forma: no prolongamento de CB, marque, sucessivamente, a partir de B, m – 1 segmentos iguais a CB e ligue os pontos de divisão B_2, B_3, ..., B_m ao vértice A como mostra a figura II. Analogamente, no prolongamento de DE, marque, sucessivamente, a partir de E, n – 1 segmento iguais a DE e ligue os pontos de divisão E_2, E_3, ..., E_n ao vértice A. Então, B_mC = m (BC), Δ AB_mC = m (Δ ABC), D E_n = n (DE), ΔAD E_n = = n (Δ ADE). Devido à definição Eudoxiana de proporção, Δ ABC: Δ ADE = BC : DE . Não se fez menção nenhuma a quantidades comensuráveis e incomensuráveis, uma vez que a definição Euclidiana se aplica igualmente às duas situações.

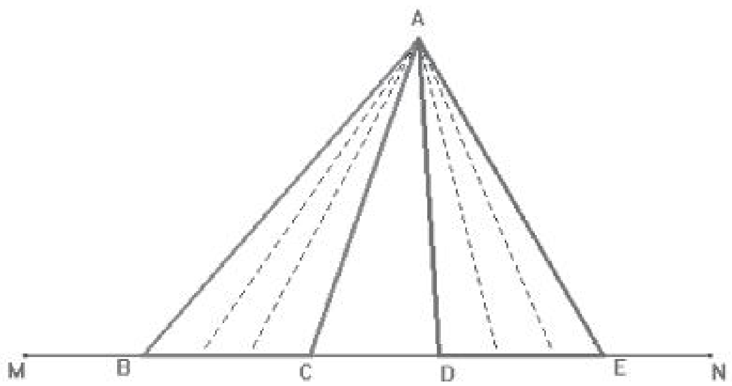

Figura 2 – Teoria das Proporções.

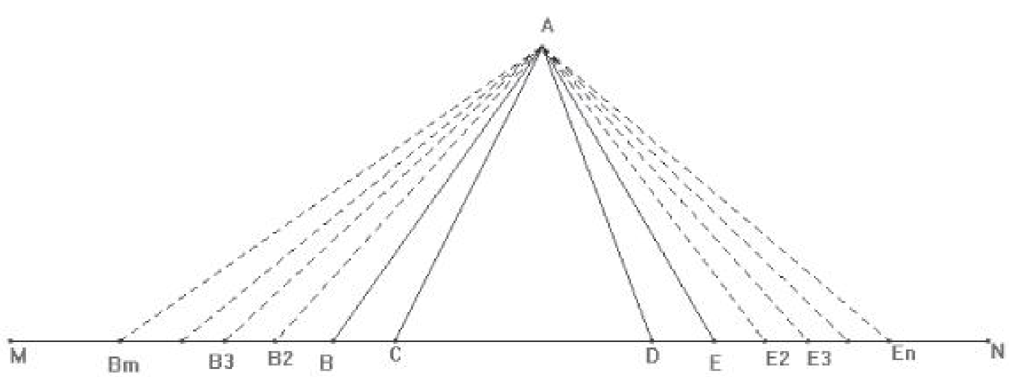

Figura 3 – Teoria das proporções de Endoxo.

Ainda no século XX, por muito tempo, muitos textos de geometria defendiam uma demonstração desse teorema em dois casos, conforme BC e DE fossem ou não comensuráveis. O primeiro era abordado da maneira Pitagórica referida e o segundo com algumas noções simples envolvendo limites. Assim, suponha-se que BC e DE sejam incomensuráveis. Dividindo-se BC em n partes iguais, sendo BR uma delas (Figura 3). Sobre DE marque uma sucessão de segmentos iguais a BR até chegar a um ponto F de DE tal que FE < BR. Devido ao caso comensurável, já estabelecido, Δ ABC : Δ ADF = = BC : DF. Faz-se agora n $\rightarrow \infty$. Então, DF $\rightarrow$ DE e ADF $\rightarrow$ ADE; em que, no limite, Δ ABC : Δ ADE = BC : DE. Essa abordagem, que usa o fato de qualquer número irracional, pode ser considerada como limite de uma sequência de números racionais e foi desenvolvida rigorosamente nos tempos modernos por Georg Cantor (1845 – 1918).

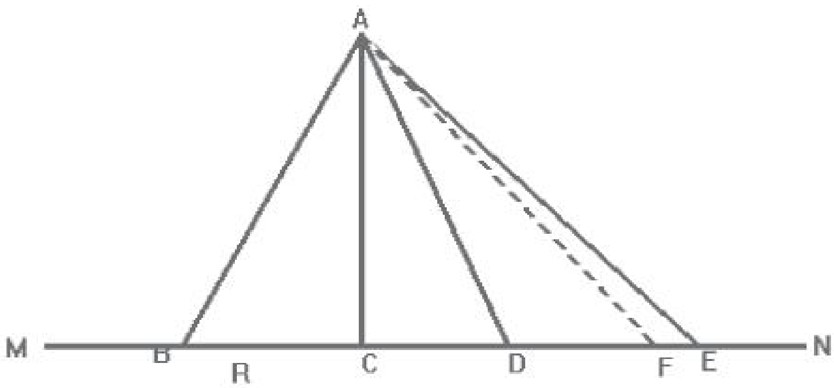

Figura 4 – BC e DE são incomensuráveis.

REGRA DE TRÊS

É uma das mais antigas aplicações de proporcionalidade. Nela, tem-se uma grandeza y (direta ou inversamente proporcional) a x. Os valores x’, x” correspondem, respectivamente, a y’, y”. Ao conhecer três desses valores, o problema consiste em determinar o quarto valor, caso y seja direta ou inversamente proporcional a x, tendo-se *uma regra de três direta ou uma regra de três inversa.* Comprovado que y é proporcional a x, conforme definições anteriores, não há dificuldade em resolver a regra de três.

Por exemplo, supondo-se conhecer x’, x” e y’. Assim:

(i) Se a regra de três é direta, tem-se que y’ = k. x’ e y” = k . x”, logo k = $\frac{y'}{x'}$ e, substituindo, percebe-se que y” = y’ . $\frac{x''}{x'}$;

(ii) Se a regra de três é inversa, tem-se x'. y' = x" . y" = k, logo y" = x' . $\frac{y'}{x''}$.

Os resultados mostram que se pode calcular o valor y" quando se conhecem x', y' e x", sem precisar do valor de k. É importante observar quando se afirma que uma grandeza y é proporcional à outra grandeza x, nesse caso, deve-se deixar claro que isso ocorre dentro de certos limites de variação para y e x.

Sejam os exemplos:

1º) Os problemas de operários ao construir uma casa ou de datilógrafos ao executar um serviço: supõe-se que o tempo necessário para terminar o trabalho é inversamente proporcional ao número de pessoas utilizadas, se isso fosse sem restrições, aumentando-se o número de pessoas suficientemente, pode-se construir uma casa ou digitar um livro num tempo pequeno: um segundo, por exemplo;

2º) A Lei de Hooke aplicada a uma mola diz que a deformação sofrida por essa mola é diretamente proporcional à intensidade da força aplicada, ou seja, d = k. F (em que d é a deformação, F é a intensidade da força e k é a constante de elasticidade). A força F não pode ser muito pequena, pois, nesse caso, mesmo positiva não deslocaria a mola e, também, não pode ser muito grande, pois assim a mola arrebentaria (e seu alongamento seria menos do que proporcional a F).

O modelo de proporcionalidade nem sempre é o mais adequado em situações econômicas, desse modo, vale o princípio dos retornos decrescentes, pois se os investimentos aumentarem muito, os lucros adicionais serão relativamente menores. Assim, consideram-se os exemplos:

1º) Num certo terreno, planta-se o dobro de sementes, então, pode-se dobrar a colheita, mas se dobrar, ano a ano, o número de sementes plantadas, não é certo esperar que dobrem sempre as colheitas, pois, a partir de certo ponto, começa-se a notar a lei dos retornos decrescentes;

2º) O mesmo caso ocorre na fisiologia, se aumenta o estímulo cresce a sensação, mas com o passar do tempo, o acréscimo da sensação é cada vez menor em relação ao acréscimo do estímulo;

3º) Com o imposto de renda ocorre situação oposta, a renda líquida do contribuinte é classificada por intervalos, que se chamam de faixas, neles, o imposto a pagar é proporcional ao acréscimo da renda líquida em relação à faixa anterior. O coeficiente de proporcionalidade varia de uma faixa a outra, aumentando quando se passa de uma faixa de renda a outra maior.

Como exemplo de interpretação gráfica das proporções, esboce o gráfico da função y = f(x) nas situações descritas acima.

No caso de y ser diretamente proporcional a x, tem-se y = k. x. Quando y é inversamente proporcional a x, tem-se $y = \frac{k}{x}$. No primeiro caso, o gráfico é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas e, no segundo caso, é uma hipérbole.

A GRANDEZA “Z” DE VÁRIAS VARIÁVEIS

É comum ter um número muito grande de problemas nos quais uma grandeza z está relacionada a várias outras.

Assim dadas: x, y, u, v e w, em que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para z. Diz-se, então, que z é uma função das variáveis x, y, u, v e w, e escreve-se z = f(x , y , u , v , w).

z é diretamente proporcional a x quando

i) Valores fixados de y, u, v, w; a grandeza z é uma função crescente de x, isto é, a desigualdade $x' < x'' \Rightarrow f(x', y, u, v, w) < f(x'', y, u, v, w)$;

ii) Para x, y, u, v, w e $n \in N$, tem-se f(n . x , y , u , v , w) = n. f(x , y , u , v , w).

z é inversamente proporcional a x quando

i) Valores fixados de y, u, v, w; a grandeza z é uma função decrescente de x, isto é, tem-se $x' < x'' \Rightarrow f(x', u, v, w) > f(x'', u, v, w)$;

ii) Para x, y, u, v, w e $n \in N$, tem-se que $f(n . x , y , u , v , w) = \frac{f(x,y,u,v,w)}{n}$.

É importante observar que definições semelhantes podem ser dadas para as outras variáveis y, u, v e w.

O Teorema a seguir vale para um número qualquer de variáveis (x_1, x_2, ..., x_n), mas ele será apresentado em relação as variáveis x, y, u, v e w.

TEOREMA 3

Seja z = f(x , y , u , v , w), então as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) z é diretamente proporcional a x, y e inversamente proporcional a u, v, w;

b) Existe uma constante k tal que $z = k. \frac{x.y}{u.v.w}$.

Demonstração: Supondo válida a afirmação (a) e escrevendo k = f(1 , 1 , 1 , 1 , 1), pelos teoremas 1 e 2, tem-se:

$z = f(x , y , u ,v , w) = f(x . 1 , y , u , v , w) = x. f(1 , y . 1 , u , v , w) =$

$= x . y. f(1 , 1 , u , v , w) = \frac{x.y}{u} . f(1 , 1 , 1 , v , w) = \frac{x.y}{u.v} . f(1 , 1 , 1 , 1 , w) =$

$= \frac{x.y}{u.v.w} . f(1 , 1 , 1 , 1 , 1) = k . . \frac{x.y}{u.v.w}$

Reciprocamente, vale-se a afirmação (b), então (a) é também verdadeira. Pelo Teorema 3 e também pela definição, tem-se que uma grandeza é diretamente ou inversamente proporcional a várias outras, se, e somente se, é diretamente ou inversamente proporcional ao produto dessas outras.

Sejam os exemplos:

1º) A área A = A(x , y) de um retângulo com base x, e altura y é diretamente proporcional a x e a y, se x' < x", logo A(x' , y) < A(x" , y), pois o retângulo de base x' e altura y está contido no retângulo de base x" e mesma altura y. Ainda, o retângulo de base n.x e altura y decompõe-se como reunião de n retângulos justapostos, todos de base x e altura y, então A(n . x , y) = n . A(x , y). Pelo Teorema 3, existe uma constante k tal que A(x , y) = k . x . y, em que k = A(1 , 1) é a área de um retângulo de base e alturas iguais a 1(quadrado unitário) e o quadrado de lado 1 é tomado como unidade de área, então A(1 , 1) = 1. Portanto, k = 1 e A(x , y) = x . y;

2º) A "Lei de Coulomb" diz que "uma carga elétrica q' atrai outra carga elétrica q". Situadas a uma distância d uma da outra, atraem-se mutuamente com uma força cuja intensidade F é diretamente proporcional a q' e q", e inversamente proporcional a d^2. Segue-se do Teorema 3 que F = k. $\frac{q'.q''}{d^2}$, em que a constante k depende do mesmo sistema de unidades utilizado.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

A noção de proporcionalidade é muito antiga em Matemática e uma das mais úteis, com aplicações na Geometria, Física, Astronomia e também no cotidiano das pessoas. Sua importância está relacionada também com o fato de que ela pode ser representada por um modelo matemático de extrema simplicidade, expresso por: $y = k . x$ e $y = \frac{k}{x}$, no caso de uma só variável, ou por equações como: $y = \frac{k.x.y}{u.v.w}$, no caso de muitas variáveis.

Entretanto, é fundamental que ao estudar uma questão que possa envolver proporcionalidade, seja ela de natureza científica ou prática, que a equação seja a etapa final da resolução do problema. Quando um cientista, um engenheiro, um geômetra ou um comerciante se depara com um problema, a fórmula $y = k.\, x$ não vem junto com os dados. Então, compete à pessoa verificar se o modelo $y = k.\, x$ adapta-se ao seu caso, pois antes de usá-lo é preciso comprovar se y é realmente proporcional a x.

Em certos exemplos, observa-se, como no Teorema de Tales, que a fórmula $y = k.\, x$ é irrelevante, ou simplesmente não cabe no contexto da discussão. No caso exemplificado, a constante k pode exprimir-se como o quociente de dois senos, o que é um fato curioso. O seno de um ângulo só foi definido mais tarde e mesmo assim só tem sentido por causa do Teorema de Tales. Seja a área A de um retângulo de base b e altura h, a razão pela qual A é diretamente proporcional aos lados h, b não é a fórmula $A = h\, .b$, mas o contrário. Primeiro, prova-se que A é diretamente proporcional a h e b e, então, deduz-se a fórmula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir deste trabalho, percebe-se que existe uma propriedade básica presente nas verificações da proporcionalidade, na qual as iguais variações de x correspondem a variações iguais a de y.

Como princípio geral, tem-se que: se acréscimos (positivos) iguais de x correspondem acréscimos iguais (e positivos) de y, então, fixando-se um valor x_0 e seu correspondente y_0, tem-se $y - y_0$ diretamente proporcional a $x - x_0$. Em particular, se $x_0 = 0$ corresponder a $y_0 = 0$, então y é diretamente proporcional a x. Vale a recíproca: se y é diretamente proporcional a x, então, a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais de y. Dessa maneira, muitas vezes, define-se a álgebra como a aritmética generalizada. Assim, os alunos deverão perceber as conexões entre as equações abstratas da álgebra e o mundo real da aritmética. Para tanto, o conceito de utilização de uma variável constitui um importante suporte conceitual àquilo que o aluno irá estudar em níveis mais adiantados. A introdução à álgebra deve basear-se na noção de que as variáveis podem ser manipuladas de uma maneira que corresponde exatamente a muitos aspectos do mundo real.

As situações de proporcionalidade estudadas neste trabalho fornecem uma porta ideal para o campo da representação algébrica, uma vez que seus antecedentes aritméticos são justificáveis por meio de abordagens do senso comum. Desse modo, para raciocinar com proporções, é preciso ter a habilidade mental para abordar os problemas por vários ângulos e também ter noções matemáticas que sejam suficientemente sólidas, a fim de não se deixar afetar pelo contexto do problema proposto. Isso trará, certamente, implicações diretas para melhorar o ensino-aprendizagem. Em geral, equipar os alunos com uma variedade de perspectivas e estratégias de resolução favorece não só uma compreensão melhor, como também uma abordagem mais segura e flexível da resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

COXFORD, Arthur F.; SHULE, Alberto P. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** 2. ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.