ISSN 1981-2841

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI: HISTÓRIA, PROPRIEDADES E RELAÇÕES COM A RAZÃO ÁUREA[1]

FIBONACCI SEQUENCE: HISTORY, PROPERTIES AND CONNECTIONS WITH THE GOLDEN PROPORTION

Lívia Da Cás Pereira[2] e Marcio Violante Ferreira[3]

RESUMO

Apresenta-se, neste trabalho, um estudo relacionado à conhecida sequência de Fibonacci. O enfoque principal está na investigação das principais propriedades dessa sequência e na sua relação com o Número de Ouro (ou Razão Áurea). Faz-se, também, uso de construções geométricas para a obtenção do Retângulo Áureo e da divisão Áurea de um segmento. Demonstra-se, assim, a relação intrínseca que há entre o limite da sequência formada pela razão entre os números de Fibonacci com o valor da Razão Áurea. Este estudo engloba, pois, questões importantes da Análise Matemática e alguns resultados da Geometria Euclidiana.

Palavras-chave: sequência de Fibonacci, Número de Ouro, divisão Áurea.

ABSTRACT

This work presents a study related to the well-known Fibonacci sequence. The main focus is on the research of the essential properties of that sequence and on its connection with the Golden Number (or Golden Proportion). The use of geometric constructions is also employed to obtain both the Divine Rectangle and Divine section of a segment. It shows, thus, the intrinsic connection that occurs between the limit of the sequence determined by the numbers of Fibonacci and the value of the Divine proportion. So, this study comprises important issues of Mathematical Analysis and some results of the Euclidean Geometry.

Keywords: *Fibonacci sequence, Golden number, Golden division.*

---

[1] Trabalho Final de Graduação - TFG.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática - UNIFRA.
[3] Orientador - UNIFRA.

INTRODUÇÃO

O matemático italiano Leonardo Pisano (ou Leonardo de Pisa) (1170-1250) nasceu em Pisa (Toscânia). Adquiriu o conhecimento matemático islâmico viajando pelo Mediterrâneo e, quando regressou a sua terra natal, utilizou os conhecimentos adquiridos em suas viagens para escrever trabalhos, dentre os quais se destacam três grandes obras**: Liber Abbaci** (1202), **Pratica Geometrae** (1220) e **Liber Quadratorum** (1225). O **Liber Abbaci** (Livro do Ábaco) refere-se ao estudo do cálculo aritmético e é considerado o melhor tratado sobre Aritmética e Álgebra da época. Nele estão contidas regras para o cálculo segundo os novos numerais indo-arábicos, assim como problemas relacionados ao cálculo de lucros, conversão de moedas, mensuração, problemas sobre movimento e o problema do Resto Chinês. Para a resolução de alguns desses problemas encontrados no livro, são utilizadas equações quadráticas, bem como justificativas geométricas de fórmulas quadráticas. O livro apresenta, ainda, alguns métodos para somar séries.

Dentre os problemas contidos no **Liber Abbaci**, destaca-se o conhecido "problema dos coelhos", que se refere ao número de casais em uma população de coelhos após doze meses, considerando-se que:

1) No primeiro mês tem-se apenas um casal;
2) Casais reproduzem-se somente após o segundo mês de vida;
3) Não há problemas genéticos no cruzamento cossanguíneo;
4) Todos os meses, cada casal fértil dá à luz um novo casal;
5) Os coelhos nunca morrem.

Tal problema questiona: *Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano?*

Ao fixar como mês um o início do processo, tem-se, no início do primeiro mês, um único casal jovem. Já no segundo mês, esse casal será adulto. Considerando-se que um par adulto produz um novo par a cada mês, no início do terceiro mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par adulto e outro recém-nascido.

No início do quarto mês o par adulto produzirá mais um par, enquanto que o outro par completará um mês de vida e ainda não estará apto a reproduzir. Assim, existirão três pares de coelhos, sendo um par adulto, um par com um mês de idade e mais um par recém-nascido.

No início do quinto mês existirão dois pares adultos, sendo que cada um já reproduziu um novo par e mais um par que completou um mês de vida. Logo, existirão cinco pares.

No início do sexto mês existirão três pares adultos, sendo que cada um já produziu um novo par e mais dois pares que completam um mês de vida. Logo, existirão oito pares.

Seguindo-se o mesmo raciocínio para os outros meses, obtém-se a famosa *Sequência de Fibonacci*, cujos primeiros termos são:

1, 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 ,...

Uma análise rápida mostra que cada termo da sequência acima é dado recursivamente pela expressão

$$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n, \; n \geq 2 \; , \qquad (1)$$

em que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, e n é o número de meses.

Conforme Boyer (1974), tal sequência recebe o nome “Fibonacci” devido ao apelido dado a Leonardo por Baldassare Boncompagni, seu editor de trabalhos no século XIX, o qual significa “filho de Bonaccio”.

A proposta deste trabalho é fazer um estudo das propriedades da Sequência de Fibonacci, bem como apresentar algumas de suas aplicações. Além disso, faz-se algumas considerações sobre o Número de Ouro, o Retângulo Áureo e a Divisão Áurea, conceitos que têm uma relação intrínseca com a sequência (1).

Na próxima seção, apresentam-se alguns resultados sobre a Sequência de Fibonacci. Optou-se por relacioná-los na forma de lemas e teoremas. Na seção seguinte, estuda-se o Número de Ouro, buscando compreender sua relação com a sequência (1). Nas duas últimas seções, demonstram-se processos geométricos construtivos para a obtenção do Retângulo Áureo e da Divisão Áurea de um segmento qualquer.

PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A seguir, apresentam-se alguns resultados e/ou propriedades relacionados com a Sequência de Fibonacci, os quais serão dados na forma de lemas ou teoremas. Salienta-se que alguns desses resultados fazem parte de uma sequência de atividades propostas por Santos e Bianchini (2002).

Começa-se com uma propriedade referente à soma dos n primeiros números da Sequência de Fibonacci:

Teorema 1: A soma S_n, n> 1, dos n primeiros números da Sequência de Fibonacci é dada por

$$S_n = a_{n+2} - 1.$$

Demonstração: Tem-se que

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 - a_2 \\ a_2 &= a_4 - a_3 \\ a_3 &= a_5 - \alpha_4 \\ &. \\ &. \\ &. \\ a_{n-1} &= a_{n+1} - a_n \\ a_n &= a_{n+2} - \alpha_{n+1} \end{aligned}$$

Ao somar e simplificar termo a termo todas essas igualdades, obtém-se

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$$

Exemplo: Qual a soma dos doze primeiros números de Fibonacci?

Sendo $n = 12$, então

$$S_{12} = a_{12+2} - 1 = a_{14} -1 = 377 - 1 = 376.$$

Portanto, a soma dos doze primeiros termos é 376.

A próxima propriedade refere-se à soma dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci:

Teorema 2: A soma S_{n^2} dos quadrados dos n primeiros números de Fibonacci é dada por

$$S_{n^2} = a_n a_{n+1}$$

Demonstração: Por ser $a_1 = a_2 = 1$, tem-se que

$$(a_1)^2 = a_1 a_2,$$

e, para $k > 1$,

$$a_k a_{k+1} - a_{k-1} a_k = a_k (a_{k+1} - a_{k-1}) = (a_k)^2, \qquad (2)$$

já que, pela identidade (1),

$$a_{k+1} = a_{k-1} + a_k$$

Fazendo-se $k = 2,3,...,n$ na igualdade (2), obtém-se que

$$(a_1)^2 = a_1a_2$$
$$(a_2)^2 = a_2a_3 - a_1a_2$$
$$(a_3)^2 = a_3a_4 - a_2a_3$$
$$\vdots$$
$$(a_{n-1})^2 = a_{n-1}a_n - a_{n-2}\,a_{n-1}$$
$$(a_n)^2 = a_na_{n+1} - a_{n-1}a_n.$$

Ao somar membro a membro todas as n igualdades e simplificar a expressão resultante, tem-se

$$S_{n^2} = (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \ldots + (a_{n-1})^2 + (a_n)^2 = a_na_{n+1}$$

Exemplo: Qual a soma dos quadrados dos sete primeiros números da Sequência de Fibonacci?

Pelo Teorema 2,

$$\sum_{n=1}^{7} a_j^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = a_7a_8 = 13 \cdot 21 = 273.$$

Nesse caso, pode-se calcular diretamente:

$$1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 = 273$$

Outra propriedade da sequência ressalta que quaisquer dos números consecutivos de Fibonacci são primos entre si.

Teorema 3: Quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si, isto é,

$$mdc\ (a_n,\ a_{n+1}) = 1,$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: A ideia da demonstração é utilizar o algoritmo de Euclides para determinar o $mdc\ (a_n,\ a_{n+1}) = a_2 = 1$.

Observa-se que

$$a_{n+1} = 1 \cdot a_n + a_{n-1}$$
$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$a_4 = 1 \cdot a_3 + a_2$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 0.$$

Portanto,

$$mdc\ (a_{n,}\ a_{n+1}) = a_2 = 1.$$

Observação: Os números de Fibonacci $a_3 = 2$, $a_5 = 5$, $a_7 = 13$, $a_{11} = 89$ são todos primos. No entanto, não é verdade que a_n é primo para todo índice primo n > 2. Basta utilizar, por exemplo, n = 19. Percebe-se que $a_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$.

O NÚMERO DE OURO

A seguir, mostrar-se-á a conexão da Sequência de Fibonacci com o Número de Ouro (também chamado Razão Áurea).

Considere-se a sequência $r_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $n > 1$, em que os a_n's são os termos da Sequência de Fibonacci. Ela representa a taxa de crescimento do número de coelhos entre o (n + 1)-ésimo e o n-ésimo mês. Tal sequência é dada por:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\ldots \text{, ou seja, } 1{,}2{,}1.5{,}1.666\ldots{,}1.6{,}\ldots$$

Por meio do gráfico abaixo, em que o eixo horizontal indica o índice n e o eixo vertical indica os respectivos valores de r_n, pode-se perceber que a sequência tende a um valor entre 1.5 e 2.

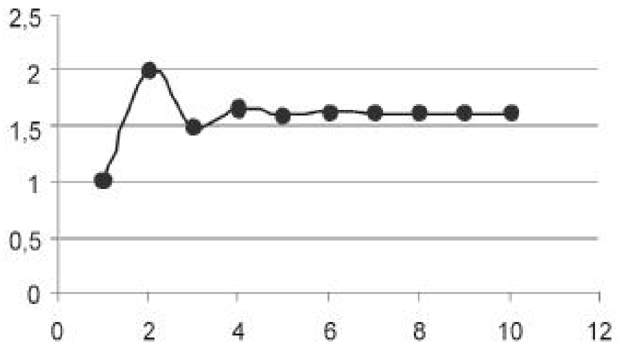


Figura 1 – Gráfico da sequência r_n.

Teorema 4: Tem-se que (r_n), $n \geq 1$, é dada recursivamente por

$$r_1 = 1 \quad e \quad r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1,\ n \geq 2\ .$$

Demonstração: A partir da sequência anterior, dada por $r_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, lembrando que $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$, segue-se que

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}}$$

o que prova que $r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1,\ n \geq 2$.

Por meio da relação anterior, nota-se que o limite r da sequência (r_n), caso exista, é solução da equação $r^2 - r - 1 = 0$, que tem uma única raiz positiva.

De fato, do Teorema anterior sabe-se que

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r_{n-1}} + 1\right),$$

ou seja,

$$r = \frac{1}{r} + 1 ,$$

em que

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Segue-se, pois, que

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como $r_n \geq 0$, para todo n, conclui-se que

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749895...$$

Nota-se que r é o conhecido "Número de Ouro", comumente representado pela letra grega Phi (ϕ).

O procedimento anterior, no entanto, é meramente formal. O que foi mostrado é que se a sequência r_n é convergente, então seu limite é

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para justificar a passagem ao limite na expressão

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1,$$

deve-se mostrar que, de fato, r_n é uma sequência convergente.

Inicialmente, observa-se que

$$r_n = 2 - \frac{1}{r_{n-2} + 1},\ n \geq 3\ .$$

Considerem-se, agora, as subsequências (r_{2n}) e (r_{2n-1}) de (r_n), ou seja, as subsequências de índices pares e ímpares, respectivamente. Mostrar-se-á por indução que (r_{2n}) é decrescente e (r_{2n-1}) é crescente. Com efeito, tem-se que:

(i) $r_2 = 2 > r_4 = \frac{5}{3}$.

(ii) Supõe-se válido para $n = k$, isto é,

$$r_{2k} > r_{2k+2}.$$

Como a função

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1},\ x \geq 0$$

é crescente, tem-se que

$$r_{2k+2} < r_{2k} \Rightarrow f(r_{2k+2}) < f(r_{2k}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{r_{2k+2} + 1} < 2 - \frac{1}{r_{2k} + 1} \Rightarrow r_{2k+4} < r_{2k+2}.$$

Isso mostra que (r_{2n}) é decrescente. De modo análogo, demonstra-se que (r_{2n-1}) é crescente.

É importante observar que (r_{2n}) é limitada inferiormente por 1 e (r_{2n-1}) é limitada superiormente por 2. De acordo com Lima (1976), ambas são convergentes. Além disso, como satisfazem a mesma relação de recorrência

$$r_n = 2 - \frac{1}{r_{n-2} + 1},$$

conclui-se que seus limites são iguais e, consequentemente, toda a sequência (r_n) converge para esse mesmo limite, que é o valor r encontrado anteriormente.

Considera-se, agora, a seguinte sequência de frações:

$$1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \ldots \tag{3}$$

Conclui-se, facilmente, que tal sequência é exatamente a sequência

$$\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \ldots$$

Com efeito, a sequência (3) é dada recursivamente por $q_1 = 1$ e

$$q_n = \frac{1}{1+q_{n-1}}, n \geq 2.$$

Por outro lado, sabe-se do lema anterior que $r_1 = 1$ e

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{r_{n-1}}}.$$

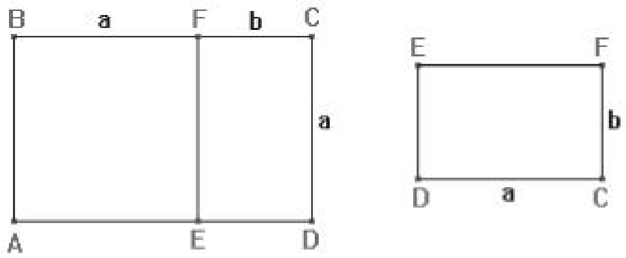
Com $q_n = \frac{1}{r_n}$. O limite q da sequência q_n pode ser facilmente calculado. Com efeito, lembrando que r_n é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \neq 0$, obtém-se que

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r_n}\right) = \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

É importante ressaltar que o limite q encontrado acima é exatamente o inverso do Número de Ouro ϕ.

O RETÂNGULO ÁUREO

Diz-se que um retângulo *ABCD* qualquer é áureo quando ele apresenta a seguinte propriedade: se dele retira-se o quadrado ABFE, o retângulo CDEF restante será semelhante ao retângulo original,

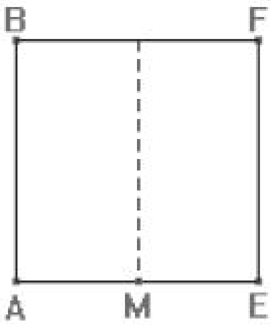


ou seja,

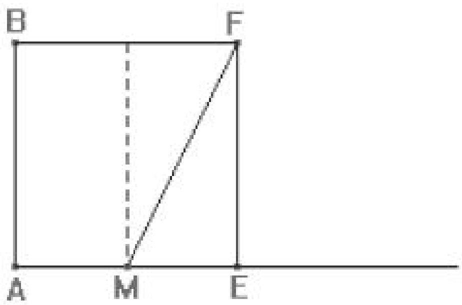
$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}. \qquad (4)$$

A construção de um Retângulo Áureo pode ser feita a partir dos seguintes passos:

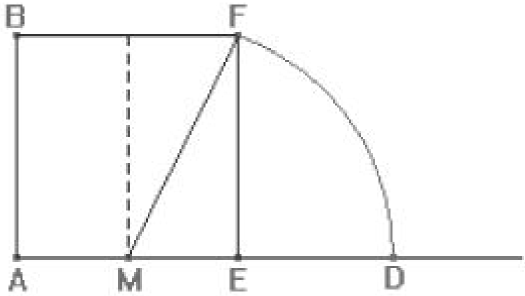
1) Constrói-se um quadrado *ABFE* de lado *a* e divide-se um dos lados desse quadrado ao meio. O ponto que intercepta a base do quadrado será chamado de ponto *M*.



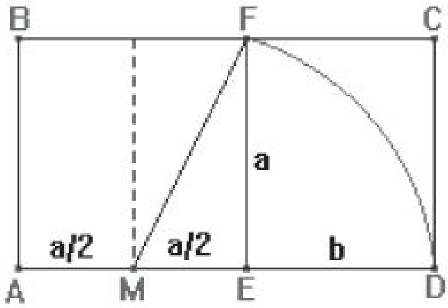
2) Em seguida, traça-se a diagonal que liga o ponto *M* ao seu vértice oposto, ou seja, o ponto *F*.



3) Com o compasso fixado no ponto *M*, traça-se o arco de comprimento *MF* até que ele encontre o prolongamento da base. O ponto de intersecção do arco com o prolongamento da base será o ponto *D*.



4) A partir do ponto *D*, traça-se um segmento de reta perpendicular à base do quadrado. Depois, prolonga-se o lado superior até que este encontre o segmento de reta. O retângulo é exatamente o Retângulo Áureo, o qual foi construído a partir de seu lado menor AE = EF = *a*, como mostra a figura a seguir.



Para comprovar que o retângulo *ABCD* é de fato áureo, basta observar que

$$MF = MD = b + \frac{a}{2}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo *MEF*, obtém-se

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

ou seja,

$$b^2 + ab = a^2,$$

o qual equivale à relação (4).

O Retângulo Áureo está intimamente ligado com a chamada Divisão Áurea de um segmento ou Divisão em Média e Extrema Razão, que será apresentada na seção seguinte.

DIVISÃO ÁUREA

Diz-se que um ponto C de um segmento de reta AB divide este segmento em média e extrema razão se

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} \cdot \qquad (5)$$

Essa relação é idêntica a relação (4), quando considera-se $AC = a$ e $CB = b$. Dela, conclui-se que

$$b^2 + ab = a^2. \qquad (6)$$

O número $m = \dfrac{a}{b}$ é conhecido como Razão Áurea. Ao dividir os membros da equação (6) por b^2, tem-se

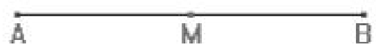
$$m^2 = m + 1.$$

A equação do segundo grau é a mesma obtida para o limite r da sequência estudada na seção 2. Portanto,

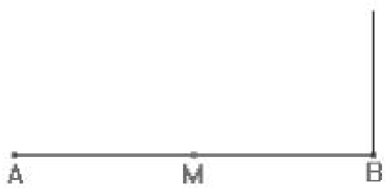
$$m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Uma forma de se dividir um segmento em média e extrema razão ocorre a partir dos seguintes passos:

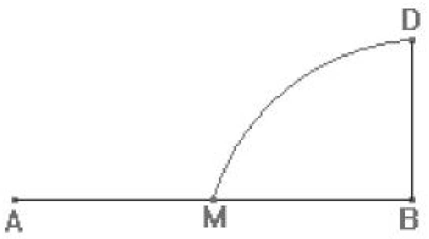
1) Utilizando o compasso, pode-se obter o ponto médio M do segmento AB.



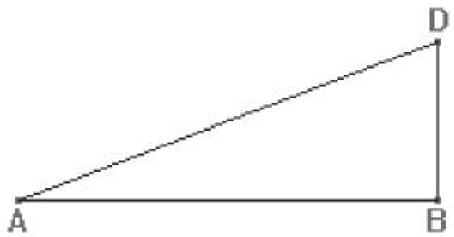
2) Em seguida, traça-se uma reta perpendicular ao segmento AB, passando pelo ponto B.



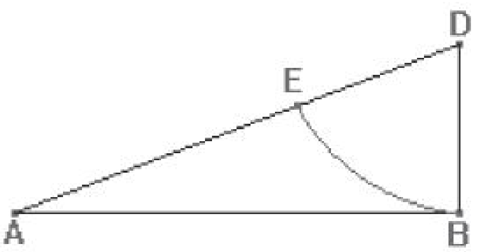
3) Com o compasso fixado no ponto B, traça-se um arco de comprimento MB até que este cruze a reta perpendicular ao segmento AB. Obtém-se, assim, um segmento BD medindo exatamente a metade do seguimento AB.



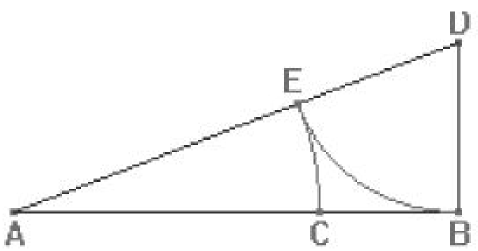
4) Unindo o ponto *D* ao ponto *A*, constrói-se o triângulo *ABD*.



5) Com o compasso fixado no ponto *D*, traça-se um arco de comprimento *DB* até que ele cruze a hipotenusa *AD* do triângulo, obtendo o ponto *E*.



6) Finalmente, com o compasso fixado no ponto *A*, traça-se um arco de comprimento *EA* até que este encontre o segmento *AB*. Chega-se, desse modo, ao ponto *C*, que divide o segmento *AB* em média e extrema razão.



Com efeito, se $AC = a$ e $CB = b$, então, da construção anterior, segue-se que

$$AB = a + b,\ AE = a,\ e\ ED = BD = \frac{a+b}{2}.$$

Assim, pelo Teorema de Pitágoras,

$$(a+b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(a + \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ou seja,

$$b(a+b) = a^2,$$

que é equivalente à expressão (6).

CONCLUSÃO

O presente trabalho mostrou uma interessante conexão entre a Sequência de Fibonacci, a Razão Áurea de um segmento e o Número de Ouro ϕ. Pôde-se, por meio deste estudo, abordar conceitos importantes da Análise Matemática, principalmente na demonstração de algumas das propriedades dos números de Fibonacci. Outro ponto importante refere-se ao uso da Geometria Euclidiana, tanto na construção de um Retângulo Áureo e da Divisão Áurea de um segmento quanto na justificativa dessas construções.

Obviamente, este estudo não se encerra com este trabalho, pois muitas outras sequências numéricas têm relações com os números de Fibonacci e com o número de ouro ϕ e podem servir de base para trabalhos futuros. Um exemplo dessas sequências, e que não foi tratado aqui, é aquela cujo termo geral é dado pela soma $\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$, estudada por Ferreira, Bisognin e Bisognin (2007).

Da mesma forma, encontram-se exemplos de muitas figuras geométricas que possuem interessantes propriedades relacionadas à Razão Áurea e que há séculos vem sendo motivo de estudos para muitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de. **Teoria Elementar dos Números.** São Paulo: Nobel, 1981.

BOYER, Carl. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

FERREIRA, Marcio Violante; BISOGNIN, Eleni; BISOGNIN, Vanilde. Matemática no Ensino Superior: uma experiência usando a metodologia da resolução de problemas. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 2007. **Anais...** Canoas: ULBRA, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise.** Rio de Janeiro: Projeto Euclides – IMPA, 1976.

SANTOS, Ângela Rocha; BIANCHINI, Waldecir. **Aprendendo Cálculo com Maple.** Rio de Janeiro: LTC, 2002.