ISSN 1981-2841

O ENSINO DE FUNÇÕES ATRAVÉS DA INTERPRETAÇÃO GRÁFICA[1]

THE TEACHING OF FUNCTIONS THROUGH GRAPHIC INTERPRETATION

Daiana Aparecida de Siqueira[2] e Adilção Cabrini Beust[3]

RESUMO

A proposta do presente trabalho consiste em utilizar problemas concretos e atividades interessantes como metodologia para o ensino de funções. Sua importância decorre da necessidade dos professores repensarem suas metodologias, como também dos benefícios trazidos para os alunos na aprendizagem da matemática, em particular para a compreensão do conceito de função. Dessa maneira, este trabalho demonstra algumas dificuldades dos alunos na interpretação de gráficos, os pré-requisitos para o estudo de funções, a construção de tabelas e gráficos a partir de atividades concretas e, finalmente, estabelece o conceito de função. Ao final, constatou-se que o ensino de funções através da interpretação de gráficos permite a exploração de temas do cotidiano dos estudantes, o que possibilita o desenvolvimento de habilidades de investigação, estimula a criatividade e autonomia, bem como proporciona aos educadores um trabalho pedagógico estimulante e uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: problemas concretos, ensino de funções, aprendizagem da matemática, interpretação gráfica.

ABSTRACT

The proposal of this work is to use concrete problems and interesting activities as a methodology for the teaching of functions. Its importance stems from

[1] Trabalho Final de Graduação - TFG.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática - UNIFRA.
[3] Orientador - UNIFRA.

teachers´ need of rethink their methods, as well as the benefits for the students in the learning of mathematics, particularly to the understanding of the concept of function. Thus, this work shows some pupils' difficulties in the interpretation of graphs, the prerequisite to the study of functions, the construction of tables and graphs from concrete activities and, finally, it establishes the concept of function. In the end, it was found that the teaching of functions through graphic interpretation enables the exploration of students' daily life issues, which allows the development of research skills, stimulates creativity and autonomy, providing a stimulant pedagogical work for teachers and significant learning to students.

Keywords: *graphic interpretation, teaching of functions, concrete problems.*

INTRODUÇÃO

A inclusão do conceito de função através da interpretação gráfica é uma maneira de tentar superar as dificuldades e concepções erradas que os alunos, em geral, apresentam após cursar o Ensino Fundamental e Médio.

Entretanto, as deficiências foram observadas mais detalhadamente em uma turma de primeira série do Ensino Médio, quando foi realizado o estágio obrigatório por um dos autores deste artigo. Sabe-se que essa observação é apenas uma pequena amostra do desconhecimento dos estudantes em relação a esse conceito fundamental para a vida de qualquer cidadão, por isso, a motivação para desenvolver o tema.

Assim, neste trabalho procurou-se apresentar os principais erros cometidos pelos alunos quando realizam o estudo sobre funções, como, por exemplo, a capacidade de: classificar as relações em funções e não funções; dar o exemplo de uma relação que é função e de uma que não é; identificar o domínio, contradomínio e imagem de uma função; achar um domínio para uma imagem de uma função dada e vice-versa; identificar funções iguais e passar de uma forma de representação de função para outra.

Sabe-se que a complexidade do conceito de função também é parcialmente responsável pelas dificuldades dos alunos. A definição de função, conforme é ensinada atualmente, envolve muitos conceitos: domínio, contradomínio, conjunto imagem, regra de correspondência. Assim, ou tem-se certeza de que esses conceitos foram compreendidos, antes de dar continuidade ao conteúdo, ou é preciso optar por deixar de lado alguns aspectos importantíssimos do processo de ensino-aprendizagem.

Sendo assim, o presente trabalho pretende abordar o estudo por meio da representação algébrica. Inicialmente, será apresentada uma análise das dificuldades na interpretação de gráficos e algumas sugestões para superá-las. A partir dela, buscou-se diversas formas de representações gráficas e de linguagens algébricas, explorando situações cotidianas do aluno.

Finalmente, perceberam-se evidências de que foi mais fácil para os alunos lidar com funções dadas na forma gráfica do que na forma algébrica. Não é difícil encontrar as razões disso, pois a representação gráfica é mais visual; o domínio, o contradomínio e a regra de correspondência são dados simultaneamente e, assim, tem-se uma visão imediata do comportamento da função. Contudo, quase todos os professores ensinam a representação algébrica e após a representação gráfica. Desse modo, ao longo do trabalho, sugere-se que sejam muito mais trabalhadas as formas gráficas nos passos iniciais do desenvolvimento do conceito de função do que as formas algébricas.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Desde muito cedo, o aluno se depara com gráficos presentes em seu cotidiano. Eles podem ser encontrados em jornais, revistas, televisão, etc..

Conforme Tinoco et al. (1998, p. 12),

> [...] a familiarização do aluno com os diversos tipos de gráficos pode se dar ao mesmo tempo que o aluno adquire as noções de variável e dependência, básicas para a construção do conceito de função. Essas noções ficam cada vez mais claras ao passo que o aluno constrói e interpreta gráficos.

A partir do exposto, deve-se lembrar que, em muitas escolas, a representação gráfica é trabalhada no final do ensino fundamental, causando aos alunos grande dificuldade de interpretação. Com isso, pensa-se de que maneira trabalhar o estudo de função e qual o conceito de função que se espera passar aos alunos.

Segundo Smole (1989, p. 1),

> função é uma lei ou associação entre dois conjuntos que a cada elemento do primeiro conjunto associa um único elemento do outro. Intuitivamente, uma função é uma

> espécie de máquina na qual colocamos um certo dado (o elemento do primeiro conjunto) e ela atua sobre este dado e nos dá uma resposta que depende dele (elemento do segundo conjunto).

Para ajudar negativamente, os professores querem ensinar muito rapidamente o que é função, suas propriedades, representando as funções através de seus gráficos, sendo que se fossem bem trabalhadas e desenvolvidas as habilidades necessárias para o ensino de funções, os alunos teriam possibilidades e autonomia para entender, compreender e construir o conceito de função.

Ainda, Smole (1989, p. 1) argumenta:

> Nossa sugestão é que, a partir de problemas concretos e interessantes, o aluno seja capaz de construir e interpretar tabelas e gráficos, sendo que as situações apresentadas devem sempre se reportar ao universo mais próximo do aluno. No entanto, o material concreto não corresponde, necessariamente, a uma situação-problema real.

Por fim, essas atividades são de muita importância ao longo dos primeiros sete anos de escolaridade, para que o aluno participe e aprenda de forma eficaz o conhecimento e não seja apenas expectador. É importante desde cedo, no sentido de encaminhar melhor o ensino de funções, trabalhar com os alunos essa poderosa ferramenta que é a representação gráfica.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

DIFICULDADES NA INTERPRETAÇÃO DE GRÁFICOS

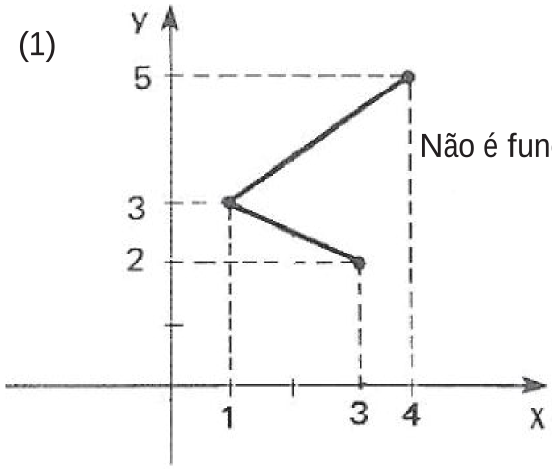
Nesta seção, faz-se uma investigação "intuitiva" sobre as dificuldades e concepções erradas nas interpretações gráficas referentes ao ensino de funções, bem como algumas sugestões para ajudar a superá-las.

Essa investigação é feita por meio da análise de alguns exemplos que integram o conceito de função, com o objetivo de descrever o que o aluno pensa, qual sua compreensão sobre este tema. Assim, para essa análise supõe-se que o aluno conheça o conceito de função e sua representação gráfica.

Primeiramente, analisa-se a capacidade de o aluno classificar ou identificar se determinada relação é função ou não é função.

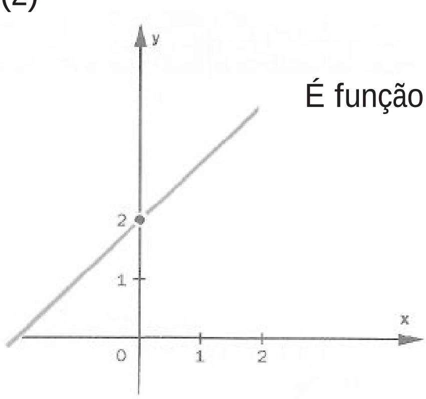
Exemplo 1: No caso dos exemplos 1 a 3, para identificar se é ou não uma função, o aluno deverá ter uma noção de que para cada x corresponde um único y, sendo, assim, uma função. Já no exemplo 4, esse tipo de problema representado por gráfico desconexo pode induzir o aluno a considerar o gráfico como não função, pois, na concepção do aluno, o fato de os pontos não estarem ligados identifica como não função. É importante ressaltar que, muitas vezes, os alunos têm a concepção errada de que toda função é uma função contínua.

(1)



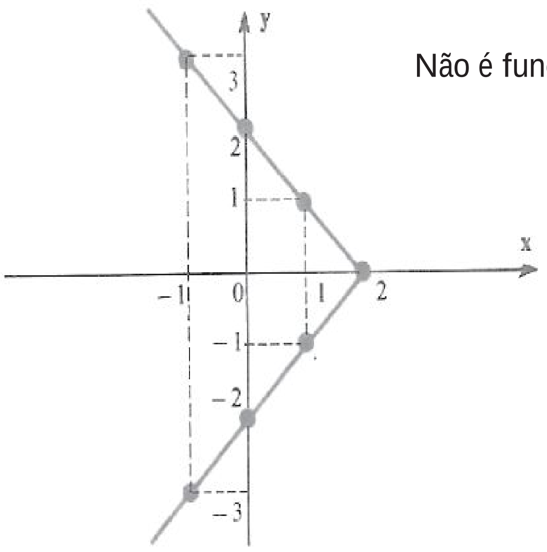
Não é função

(2)



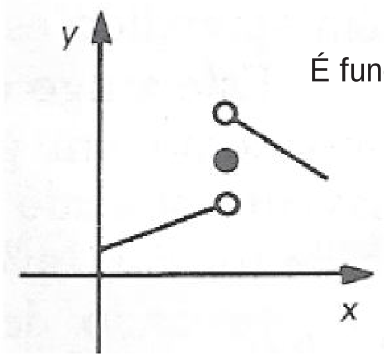
É função

(3)



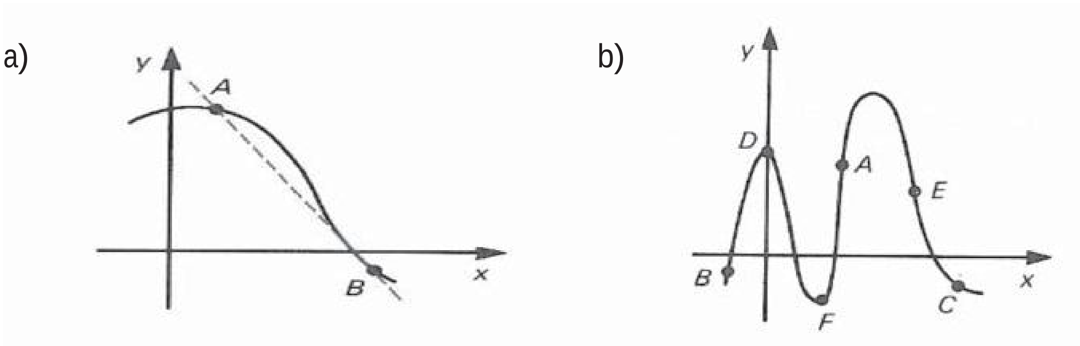
Não é função

(4)



É função

Exemplo 2: No sistema de coordenadas dado, trace o gráfico de uma função tal que as coordenadas de cada um dos pontos representem o domínio e a imagem correspondente da função, conforme Coxford e Shulte (1994).



Ao analisar o caso (a), a maioria dos alunos iria traçaria uma reta pelos pontos A e B (reta tracejada), pois sabem da Geometria que dois pontos podem ser ligados por uma só reta, bem como sobre a ideia de linearidade. Ou seja, o aluno não visualizaria uma função não linear, como mostra o gráfico (a).

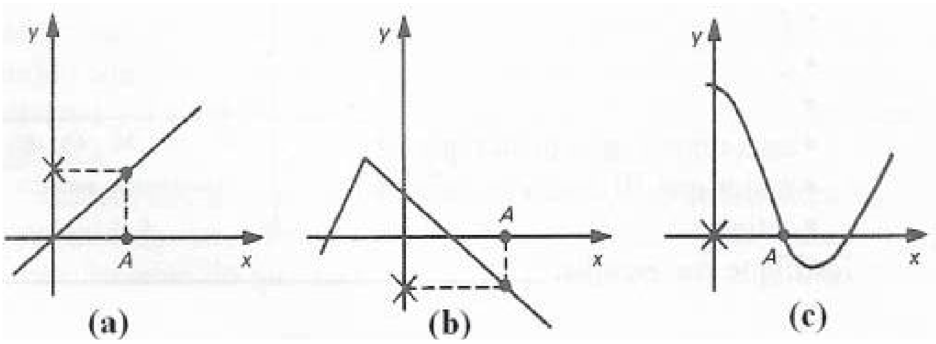
Já no caso (b), partindo da mesma ideia de linearidade, os alunos não traçariam gráfico algum, pois por quatro ou mais pontos não existe a função pedida, reforçando a ideia de que o aluno não conseguiria visualizar uma função não linear, como mostra o gráfico (b).

Assim, para que essas dificuldades e concepções erradas sejam superadas, é importante que os professores ao trabalharem com funções, além da função linear, incluam também funções não lineares.

Num segundo momento, analisa-se, a partir de uma função dada, a capacidade do aluno localizar o domínio e a imagem nos eixos em representações gráficas.

Na maioria das vezes, os alunos localizam incorretamente o domínio e a imagem no gráfico da função, pois não percebem na representação gráfica que no eixo x localiza-se o domínio e a imagem no eixo y. Por exemplo, segundo Coxford e Shulte (1994), pode-se perceber essa situação:

Exemplo 3: Assinale os elementos do contradomínio que são imagens do ponto A do domínio.



As flechas podem ser possíveis respostas de alunos. Nelas identifica-se bem a falta da ligação entre conceito de função e representação gráfica visual.

Uma sugestão para superar essa dificuldade depende de que o professor questione os alunos por meio de perguntas a respeito da ligação entre definição verbal e sua representação gráfica.

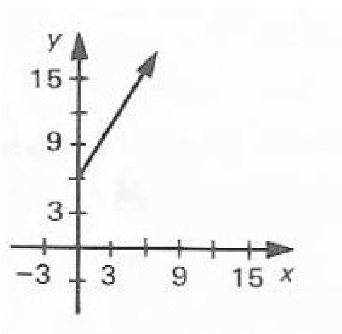
Ainda, pode-se analisar a capacidade do aluno de identificar funções iguais. Em muitos problemas, a função é a “lei”, em que os alunos ignoram o domínio e o contradomínio e, às vezes, nem os especificam, embora tenham sido solicitados, como se observa nos exemplos a seguir, segundo Coxford e Shulte (1994) e Signorelli (1992).

Exemplo 4: Dada a função f:{número naturais} -> {números naturais}, f(x) = 4x + 6 decida quais das funções seguintes são iguais a f. Justifique.

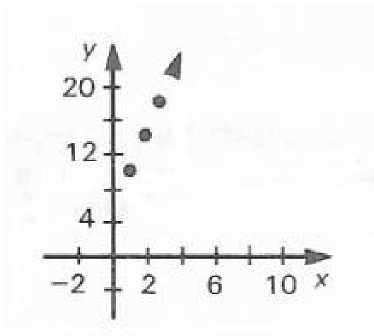
a) g: {números reias} -> {números reais}: g(x) 4x + 6

b) g:{números naturais} -> {números naturais}: g(x) = 2x + 3

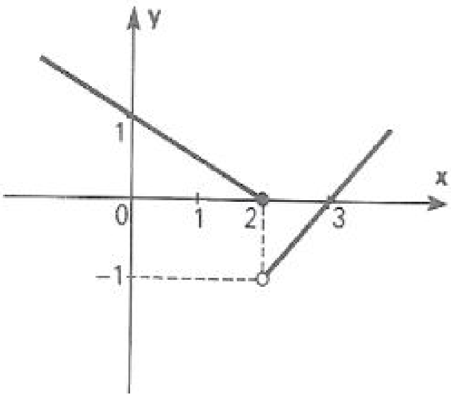
c)



d)



Exemplo 5: Determine a forma algébrica da função mostrada no gráfico e especifique o domínio e a imagem.



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{2} + 1, & x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$$

* O domínio representa todos os valores reais de x.

* A imagem representa todos os valores reais maiores que –1.

Ao analisar o exemplo 4 (a), muitos alunos considerariam a função f(x) = g(x), pois observariam somente que a lei da f(x) é igual a g(x), ignorando o domínio e o contradomínio. Em (b), de imediato responderiam que as funções não são iguais pelo motivo de (a), observariam somente a lei. E, nas atividades (c) e (d), o aluno atribuiria valores para x reconhecendo o gráfico ou não.

Já no exemplo 5, pelo fato do exercício ter mais que uma ordem, o aluno deve estar atento e cumprir todas as ordens que o exercício exigir, o que, muitas vezes, não acontece, deixando passos sem fazer.

Cabe ao professor orientar os alunos nessas atividades que exigem mais de uma ordem a ser cumprida ou passos que precisam ser analisados para a identificação de funções iguais, ou seja, uma função não depende apenas da regra de correspondência, mas também do domínio.

PRÉ-REQUISITOS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES

Nesta seção, aborda-se a familiarização do aluno com os diversos tipos de gráficos, a linguagem algébrica e a representação gráfica e analítica, importantes na construção do conceito de função.

Primeiramente, dar-se-á ênfase à importância dos gráficos que se constituem em um meio de representar as funções. Sabe-se que existem diversos tipos de gráficos, como, por exemplo, gráficos de barra, de setor, de coluna, etc.. Dessa maneira, pode-se perceber que os gráficos são encontrados em jornais, revistas, televisão, ou seja, os gráficos estão presentes na vida do aluno.

Sendo assim, o professor não poderá deixar de explorar esses recursos com seus alunos no momento em que trabalhar com gráficos. É importante a familiarização do aluno com os vários tipos de gráficos, pois ele adquire as noções de variável e dependência, básicas para a construção do conceito função.

A seguir, mostra-se um exemplo de como explorar um gráfico a fim de que o aluno interpretante sob vários aspectos, conforme Tinoco et al. (1998) e Silveira (2003).

Exemplo 1: Interpretando a figura, responda:

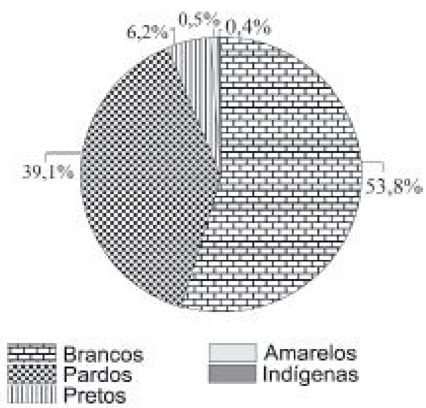


Figura 1 – Distribuição da população segundo a cor da pele.

A maior porcentagem representa qual população?

a) Quais as populações que estão mais próximas em valores percentuais?

b) Qual é o total de porcentagem das populações que não são brancos?

c) Qual é o total em porcentagem da população que é amarela, ou preta, ou parda?

Atividades como o exemplo anterior podem desenvolver nos alunos habilidades necessárias à construção e interpretação de gráficos e sugere-se que os gráficos relacionem assuntos da realidade ou de disciplinas como geografia, conforme o exemplo abordado.

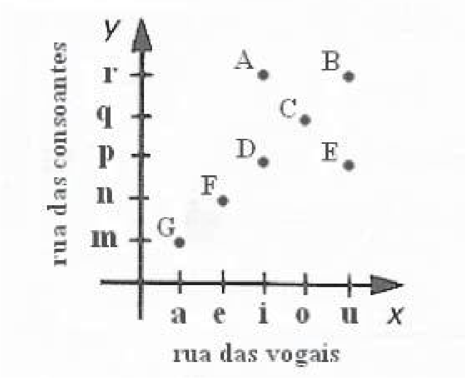
Assim, podem-se explorar vários conteúdos junto com a matemática desde que se tenha cuidado com o enfoque do conteúdo, ou seja, os conteúdos devem ser complementares.

Entretanto, fala-se na construção e interpretação de gráficos cartesianos, mas, ao trabalhar eles com os alunos, é importante ressaltar que antes os alunos precisam conhecer o plano cartesiano. O professor deverá explorar cada eixo do gráfico, a correspondência entre pares de números, os pontos, bem como as informações que cada ponto engloba. É interessante, também, que o aluno tenha oportunidade de experimentar situações em que ele seja questionado, levado a descobrir as informações referentes a um determinado gráfico para a localização de seus pontos, conforme o exemplo a seguir, segundo Tinoco et al. (1998).

Exemplo 2: Cada ponto do gráfico abaixo representa a localização de endereços das seguintes pessoas:

Alice: Rua “i” esquina com a rua “r”.
Brenda: Rua “u” esquina com a rua “r”.
Camila: Rua “o” esquina com a rua “q”.
Daniel: Rua “i” esquina com a rua “p”.
Érico: Rua “u” esquina com a rua “p”.
Fernanda: Rua “e” esquina com a rua “n”.
Gabriel: Rua “a” esquina com a rua “m”.

Associe cada ponto à pessoa correspondente, indicando seu par de coordenadas.



a) Quais as pessoas que não possuem ruas em comum?
b) O que Fernanda e Daniel têm em comum?
c) A rua “p” é comum para quem?

Exemplo 3: Leia e responda:

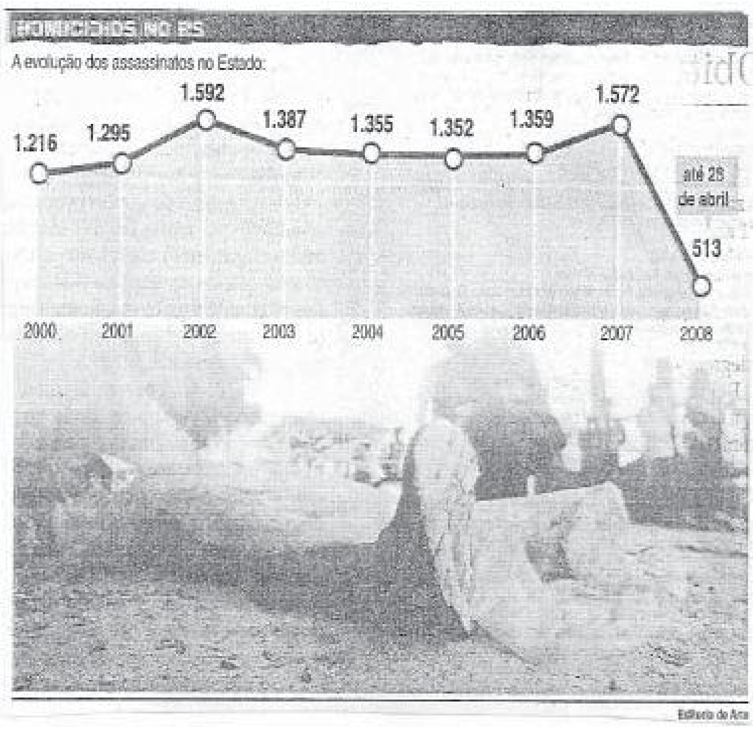
Andei 4 unidades no sentido de crescimento horizontal e 5 unidades no sentido de decrescimento vertical. Cheguei no ponto (3,2). De que ponto saí?

As atividades acima fazem com que o aluno consiga localizar-se e estabelecer correspondência entre pontos e pares de números.

Anteriormente, já foi mencionado que os gráficos estão presentes em nossas vidas, como, por exemplo, nos jornais. O que se deseja ressaltar é a sua importância em sala de aula, o quanto são ricos em informações, as quais permitem explorar tópicos ligado à realidade aplicando a matemática.

Percebe-se isso no exemplo 4, matéria do jornal “Zero Hora”, publicada na edição de 04 de maio de 2008 (COSTA, 2008).

Exemplo 4: A partir da análise do gráfico, responda:



a) Qual a temática do gráfico?
b) Se colocado em um plano cartesiano, que grandezas variam nesta situação?
c) Em que ano ocorreu um maior número de homicídios no RS?
d) Em que período pode-se encontrar uma aproximação de homicídios?

e) Qual é o total de homicídios no período entre 2000 e 2002? É aproximado ao do período entre 2002 e 2004?

f) Qual a diferença de homicídios entre os anos de 2001 e 2002? É aproximada àquela entre os anos de 2006 e 2007?

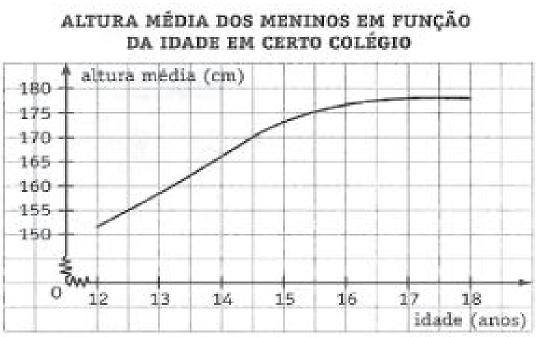
g) Se até 28 de abril de 2008 tem-se 513 homicídios no RS, até 31 de dezembro de 2008, você acha que os homicídios irão ultrapassar, ficar próximos ou menos que os de 2007? Justifique.

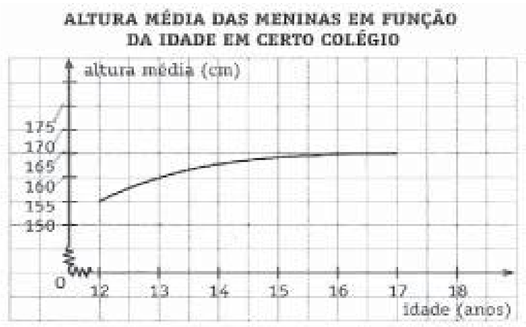
Além de trabalhar com os alunos questões de análise numérica, pode-se explorar, também, os problemas sociais, políticos e econômicos, como a atividade sugerida no exemplo anterior.

Além disso, é possível trabalhar os chamados gráficos não padronizados, ou seja, aqueles que não correspondem a nenhuma expressão algébrica. É interessante que os alunos saibam ou tenham uma noção sobre esses gráficos não padronizados. O próximo exemplo aborda gráficos contínuos e descontínuos que possibilitam aos alunos a aprendizagem da interpretação de gráficos e tabelas.

Exemplo 5: Para um grupo de meninos e meninas, estabeleça uma relação entre altura média e a idade dos mesmos, conforme Imenez e Lellis (2002).

		Idade em anos							
Altura média (cm)	meninos	0	12	13	14	15	16	17	18
		0	152	159	166	174	176	178	178
	meninas	0	155	160	163	164	165	165	-





a) No grupo dos meninos, com que idade eles param de crescer? E no grupo das meninas?

b) Qual é a altura média máxima dos meninos desse grupo? E das meninas?

c) Com que idade meninos e meninas têm a altura próxima no intervalo entre 155 cm e 160 cm?

d) Qual é a sua idade e a sua altura? Você está acima ou abaixo da média em relação ao grupo considerado?

Exemplo 6: Promoção de Carne de 1ª, conforme Tinoco et al. (1998).

Observe o cartaz que está afixado na porta de um açougue.

a) De que se trata o cartaz?

b) Que grandezas variam nesta situação?

c) O que representam os números que estão nos eixos?

d) Ao observar o cartaz, responda:

- Se uma pessoa comprar exatamente 2 kg de carne de 1ª, quanto pagará?
- Se comprar 4 kg, quanto pagará por quilo? E se comprar 7 kg?
- E se compra 9 kg e 100 g, quanto pagará por kg?

Ao tentar fazer uma tabela, o açougueiro escreveu:

Peso (kg)	Preço (R$/kg)
1,0	10,70
2,0	10,70
3,0	10,70
4,0	10,00
5,0	10,00
6,0	10,00
7,0	9,00
8,0	9,00
9,0	9,00
10,0	9,00

a) Você pagará mais se comprar 6 kg ou 7 kg de carne?

b) Quanto de carne é possível comprar com 9,60 reais nessa promoção?

c) Um cliente pediu um pedaço de carne, que pesou 2 kg e 800 g. O açougueiro sugeriu completar 4 kg? Você aceitaria a sugestão? Por quê?

No exemplo 5, a atividade engloba interpretação de gráfico e tabela, bem como a construção de um gráfico a partir de uma tabela. Já no exemplo 6, tem-se um gráfico não contínuo, que em cada intervalo a função é constante e a exploração desse fato pode levar o aluno a entender melhor o significado da função constante.

Ainda, deve-se cuidar que nos pontos de abscissa 4 e 7, o ponto preto representa o valor correspondente da função e não onde a vertical termina como os alunos tendem a escolher. É importante destacar a dificuldade em representar e marcar no eixo dos pesos 9 kg e 100 g, pois a maioria dos alunos não tem familiaridade com os números racionais. Com a tabela, é importante fazer com que o aluno perceba que o gráfico fornece informações sobre intervalos nos quais o preço é constante, de 0 a 4 kg, de 4 kg a 7 kg e de 7 kg em diante.

Logo após, depois de um longo trabalho de interpretar e construir gráficos pode-se avançar para a próxima etapa, a familiarização com a linguagem algébrica e a capacidade de abstração do aluno. Assim, Imenez e Lellis (2002) trazem uma boa sugestão.

Exemplo 7: Um prêmio de loteria de R$ 120.000,00 será dividido igualmente entre n ganhadores. Cada um receberá P reais.

a) Escreva a expressão que representa o cálculo para n ganhadores.
b) Se tiver 4 ganhadores, quanto receberá cada um?
c) É possível cada ganhador receber exatamente R$ 16.000,00? Por quê?

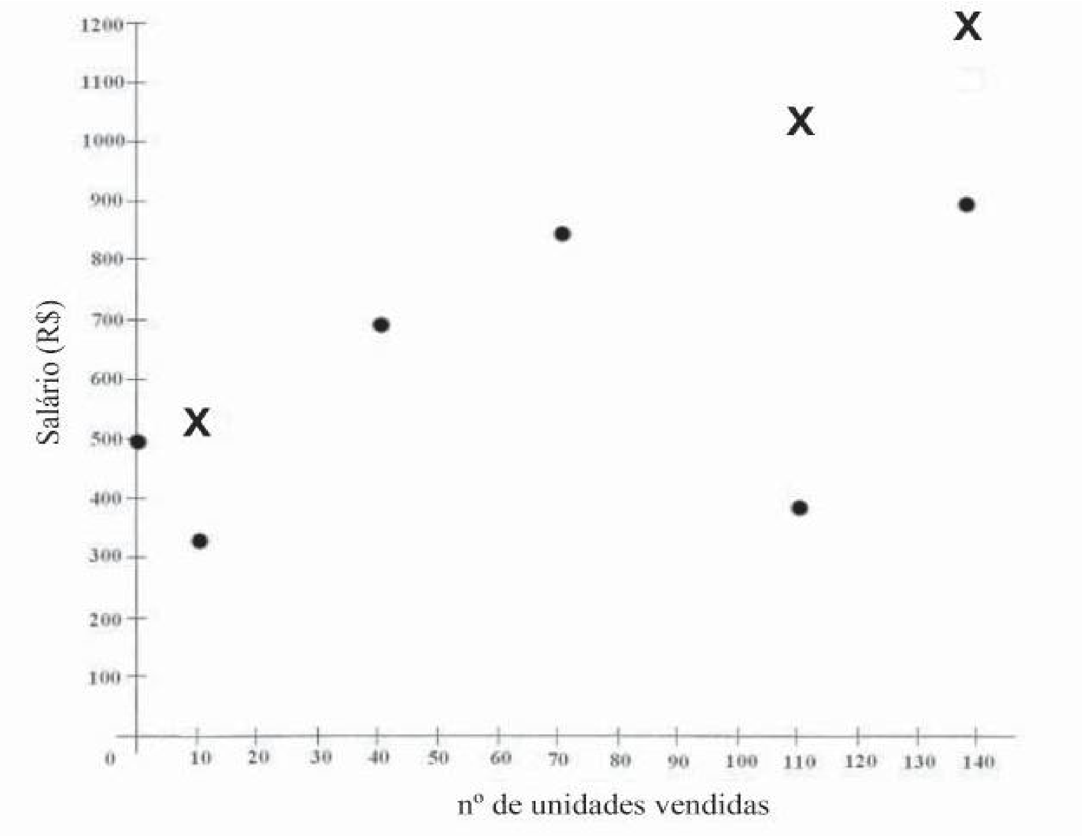
Nesse caso, o aluno pode realizar a atividade utilizando uma tabela ou gráfico, mas o objetivo é expressar a lei matemática sem a utilização dos mesmos. No entanto, o autor sugere ao professor que utilize a tabela para alunos com dificuldade de abstração.

Por fim, a última etapa é trabalhar representação gráfica e analítica de uma função, juntamente com o uso da linguagem oral e escrita. Essas têm por objetivo auxiliar na passagem de uma dessas formas de representação para a outra. Analisa-se o exemplo abaixo conforme Tinoco et al. (1998) e Bongiovanni, et al. (1993).

Exemplo 8: A loja de Mariana é muito frequentada, pois os preços são bons, o atendimento excelente e funcionários satisfeitos. Nessa loja, o salário mensal fixo de um vendedor é de 500 reais. Além disso, ele ganha 5 reais por unidades vendidas.

a) Qual expressão representa o ganho mensal desse vendedor em relação ao número x de unidades vendidas?
b) Quantas unidades ele deve vender para receber um salário de mil e duzentos reais?
c) Se vender 70 unidades, o seu salário será de quantos reais?
d) Um aluno, ao realizar um trabalho escolar, representou o ganho mensal em função do número de unidades vendidas por meio de um gráfico. Complete-o, corrigindo o que estiver errado (os pontos em forma de X são os corrigidos).

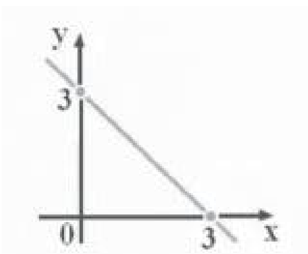
Tente responder, a partir da analise do gráfico:



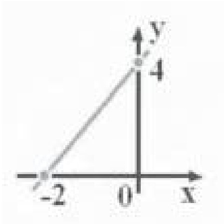
1) O ponto (30,450) pertenceria ao gráfico? E o ponto (50,750)? E o ponto (100,900)?
2) Qual a segunda coordenada do par (70,_) do gráfico?
3) Qual a primeira coordenada do par (____, 500) do gráfico?
4) O que acontece com a "altura" dos pontos do gráfico quando o número x aumenta? O que isso significa?
5) Observe a expressão que dá o ganho mensal em função do número x de unidades vendidas, e veja se tem sentido o que você observou no gráfico. Explique qual é a expressão?

Os exemplos 9 e 10 baseiam-se na obra de Bongiovanni et al. (1993).

Exemplo 9: Esboce o gráfico y - x + 3**.**



Exemplo 10: Ao analisar o gráfico, dê a lei matemática que o represente.



Deve-se cuidar, no exemplo 8, que é comum os alunos igualarem quase sempre a zero a expressão analítica, por terem apenas trabalhado com equações. Objetiva-se, com os exemplos 9 e 10, fazer com que o aluno aprenda a analisar gráficos cartesianos, relacioná-los com sua expressão analítica e construir gráficos a partir da lei matemática.

CONSTRUÇÃO DE TABELAS E GRÁFICOS A PARTIR DE PROBLEMAS CONCRETOS

Analisadas as dificuldades e algumas concepções erradas referentes ao ensino de funções, bem como os seus pré-requisitos, registra-se, agora, alguns exemplos do cotidiano e atividades concretas que podem ser trabalhadas com os alunos no início do desenvolvimento do conteúdo ensino de função.

Ao desenvolver essas atividades, procura-se que os alunos tenham a noção intuitiva de função antes de chegar propriamente à definição de função e as suas principais propriedades.

Primeiramente, a noção de função surgiu da necessidade de registro das regularidades observadas em fenômenos e de generalização das leis ou padrões. Isso pode ser verificado no exemplo a seguir, conforme Bongiovanni et al. (1993).

Exemplo 1: Seu João tem 9 cães e resolveu fazer um canil para melhor acomodá-los. Mas para construir um canil retangular ele dispõe de 12 m de tela, sendo que em um dos lados irá aproveitar uma parede de seu galpão. Com esses dados, obtém-se uma expressão que relaciona a área do canil com a medida de um dos lados.

Solução:

Dados: $x(m)$: medida de um lado do retângulo

$y(m^2)$: área do canil

Se dois lados medem x, o outro mede $12 - 2x$.

Então, $y = x\,(12 - 2x)$

$y = 12x - 2x^2$

Tem-se que a expressão $y = 12x - 2x^2$ relaciona y com x.

Além disso, pode-se explorar a construção da tabela de valores e do gráfico cartesiano. Primeiro, atribui-se alguns valores para x e aplica-se na expressão dada. Obtém-se que:

x(m)	0	1	2	3	4	5	6
y(m^2)	0	10	16	18	16	10	0

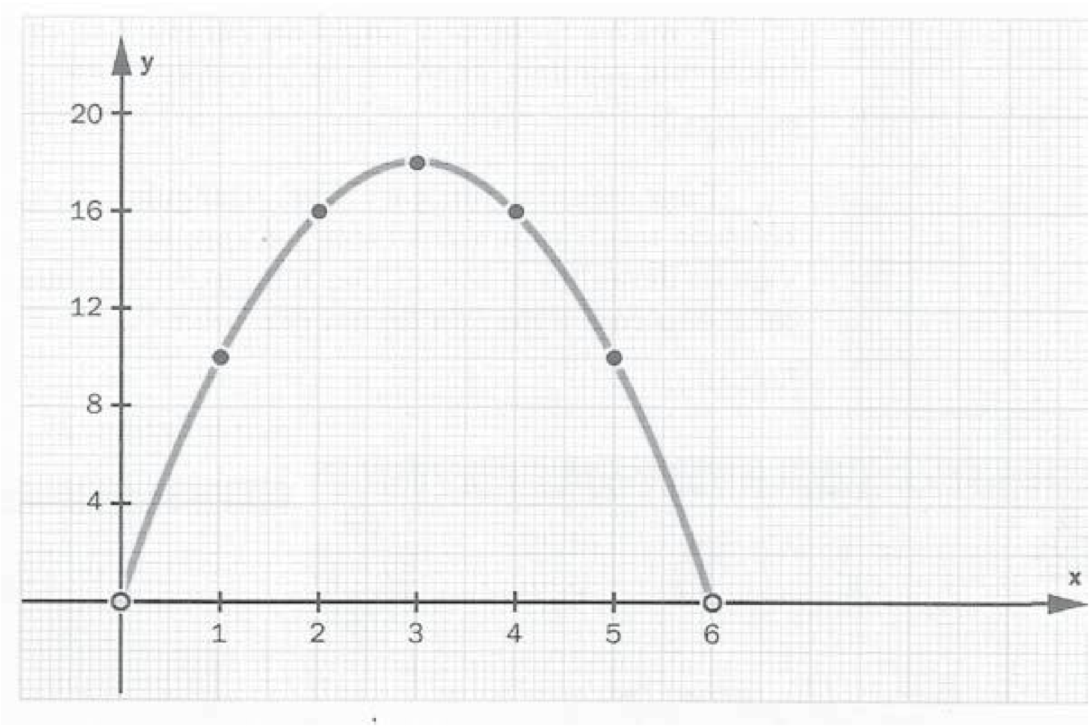
Quando $x = 0$, tem-se: $y = 12.0 - 2.0^2 = 0$;

Quando $x = 1$, tem-se: $y = 12.1 - 2.1^2 = 10$;

Quando $x = 2$, tem-se: $y = 12.2 - 2.2^2 = 16$ e assim com o restante dos valores.

A partir da tabela ou da expressão, é possível construir o gráfico cartesiano.

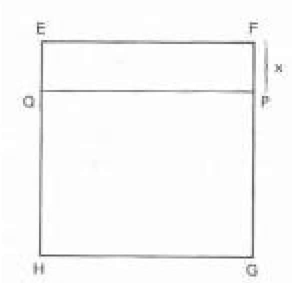
Traçam-se os eixos x e y, colocando-se os valores dados em seus respectivos eixos. Assim, consegue-se o gráfico cartesiano:



Pode-se concluir, por meio da expressão, da tabela e do gráfico, que para todo x corresponde um único valor de y. Portanto, y é função de x.

Ainda, por meio de atividades que envolvam material concreto, cada aluno confeccionará o seu material, tornando-se uma aula motivadora e diferente das usuais. A seguir, mostra-se a atividade proposta em Nery e Jakubovic (1986).

Exemplo 2: Um pedaço de cartolina EFGH de forma quadrangular, tem lados de 20 cm. Na parte superior, será recortado um retângulo EFPQ, com x cm de largura.



$$A_q = 20.20 = 400cm^2$$
$$A_r = 20.x = 20xcm^2$$
$$y = 400 - 20x$$

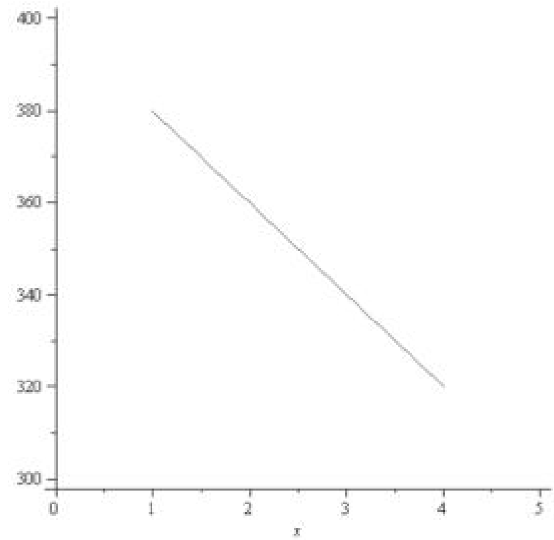
O ponto P pode ser qualquer ponto do lado FG, exceto suas extremidades F e G. Seja y a área do retângulo PGHQ (em cm²), calcule a área do retângulo quando se tem x = 1.

Agora, calcule a área quando x = 2, x = 3 e x = 4. Para uma definição, pode-se montar a tabela:

x(cm)	y(cm^2)
1	380
2	360
3	340
4	320

Analogamente ao exemplo anterior, a partir da tabela ou da expressão, é possível construir o gráfico cartesiano.

Traçam-se os eixos x e y, colocando-se os valores dados em seus respectivos eixos. Assim, tem-se o seguinte gráfico cartesiano:



Nesse exemplo, observa-se, também, que para todo x que for possível corresponde um único valor de y. Portanto, tem-se que y é função de x.

Ainda, nos exemplos anteriores, pôde-se dar enfoque na questão do domínio e da imagem da função, mas o objetivo é construir tabelas e gráficos a partir de atividades que se relacionem com a realidade. Deixa-se como sugestão que cada professor crie as suas atividades conforme as necessidades da turma com que trabalha.

Nota-se, nas atividades acima, que em momento algum aborda-se ou aparece explicitamente o conceito de função. Atividades desse tipo são interessantes de trabalhar com o aluno, pois ele não memoriza o que é função, mas constrói o seu conceito de uma forma intuitiva.

CONCEITO DE FUNÇÃO

Conforme as propostas apresentadas no decorrer do trabalho, percebe-se que as atividades apresentadas são importantes para os alunos, pois elas têm o objetivo de dar condições para que se desenvolvam as noções básicas envolvidas no conceito, principalmente a noção de variável, antes de apresentar uma definição de função.

Para autores como Tinoco et al. (1998), a identificação de função com expressão analítica, a introdução do conceito como conjunto de pares ordenados e o caso particular de relação são duas características marcantes no ensino de funções, pois em ambas ignora-se a origem do conceito, que surgiu para analisar fenômenos de variação.

O fato de que uma variável é perfeitamente determinada a partir do conhecimento de outra deve ser explorado pelo professor em todas as atividades. Percebe-se que, só após um longo trabalho, é possível sistematizar o conceito e apresentar uma definição. Na obra de Tinoco et al. (1998, p. 49), ela é construída da seguinte forma: “Se uma variável y é relacionada à variável x, de modo que, sempre que um valor é dado a x, existe uma regra segundo a qual um único valor de y é determinado, então y é dito uma função da variável independente x”.

Ou, ainda, como Bongiovanni et al. (1993, p. 171):

> Sempre que duas grandezas, x e y, estão relacionadas entre si, de modo que: x pode assumir qualquer valor em um conjunto A; a cada valor de x corresponde um único valor de y em um conjunto B; dizemos que a grandeza que assume valores y é uma função da grandeza que assume valores x, isto é, que y é uma função de x.

No processo de sistematização, as atividades trabalhadas anteriormente serão referências aos alunos para ressaltar aspectos a serem formalizados e cabe ao professor incentivar o processo de recorrência.

Desse modo, após a preparação dos alunos na compreensão do conceito de função, deve-se fazer uma apresentação formal das funções com notação, nomenclaturas, classificação, operações (composição, inversão, etc.), ou seja, trabalhar os conceitos que se encontram nos livros didáticos e são pertinentes no processo de ensino e aprendizagem desse tema. Assim, faz-se uso de um exemplo retirado da obra de Signorelli (1992) para a definição de função.

Exemplo 1: Um piloto de Fórmula 1 corre a uma velocidade média de 180 km/h durante uma corrida prevista para x sobre horas, num percurso de y quilômetros.

Sabe-se que a velocidade média é calculada da seguinte maneira: $v_m = \frac{y}{x}$, em que y é espaço percorrido e x o tempo gasto para percorrê-lo.

Ao imaginar diferentes horas de duração para a prova (2h, 4h, 6h), atribuem-se vários valores para *x*. Então, determinam-se os correspondentes valores de *y* e monta-se uma tabela.

Tem-se que:

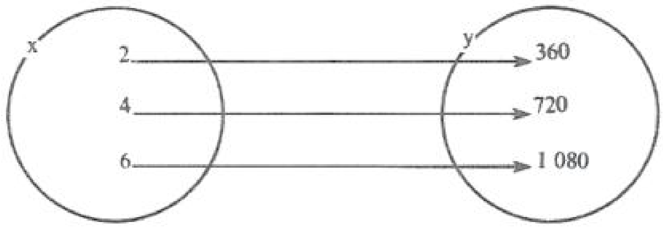
- para $x = 2h$: $v_m = \frac{y}{x} \Rightarrow 180 = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 360km$.
- para $x = 4h$: $v_m = \frac{y}{x} \Rightarrow 180 = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 720km$.
- para $x = 6h$: $v_m = \frac{y}{x} \Rightarrow 180 = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 1080km$.

Após conhecer os valores de x e y, monta-se a seguinte tabela:

x(h)	y(km)
2	360
4	720
6	1080

Com isso, pode-se introduzir o conceito de função. A partir da tabela, representa-se essa função:

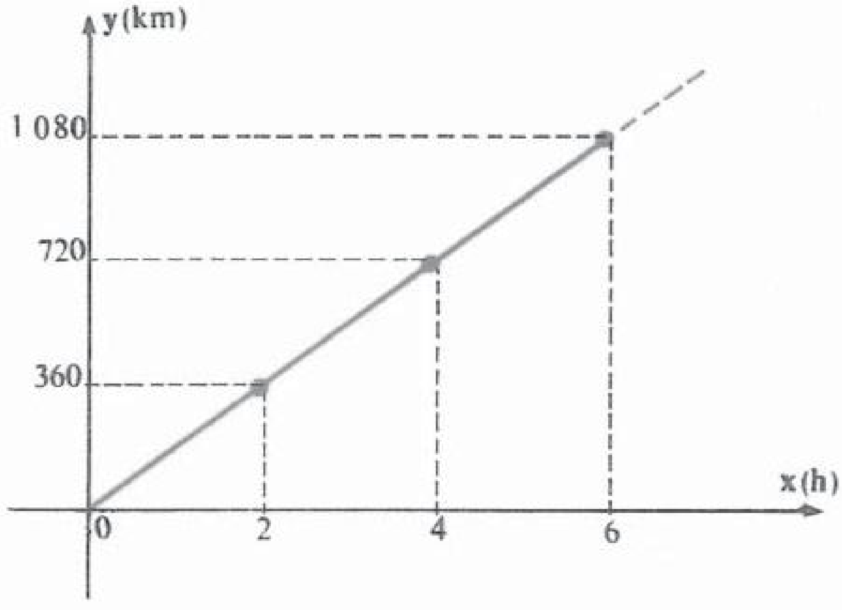
a) através do diagrama de setas:



b) através do gráfico cartesiano:

Nota-se, no gráfico, que a corrida ainda não teve início na origem zero (zero horas de duração), então, a velocidade é nula e a reta passa pelo ponto (0,0).

Desse modo, formula-se o conceito de função baseada em termos de conjuntos. Tem-se que uma relação $R:A \to B$ é função ou aplicação de A em B se, e somente se, para todo e qualquer $x \in A$ existe um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in R$.



Logo, a função é uma relação em que todos os elementos do conjunto A possuem um correspondente em B e cada elemento de A possui apenas um correspondente em B. Conclui-se, dessa forma, que a definição de função torna-se mais atrativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou atividades envolvendo interpretação de gráficos e problemas concretos como uma metodologia para o ensino de funções. Percebeu-se que a compreensão do conceito de função é facilitada por meio do uso de representações gráficas, pois se tem uma impressão visual do comportamento da função. Além disso, para alguns alunos, a inclusão de situações-problemas nas tarefas faz com que haja um melhor entendimento, em comparação a tarefas formuladas apenas matematicamente.

Outro ponto importante que se deve ressaltar é a questão do plano cartesiano, pois é necessário fixar a origem, os eixos e as unidades de medida de comprimento sobre os eixos, considerando que os alunos apresentam dificuldades de perceberem esses elementos. Dessa forma, sugere-se que o professor trabalhe com atividades como: a localização dos alunos na sala de aula de acordo com um referencial estipulado, o desenho de uma planta com a localização das carteiras da sala de aula e os respectivos pares, etc..

No decorrer do trabalho, mostrou-se que as atividades concretas devem se reportar ao universo do aluno. Certamente, será mais produtivo se o próprio aluno construir suas atividades, criando e resolvendo situações-problemas, tornando, assim, o ensino-aprendizagem uma tarefa cada vez mais desafiadora e empolgante.

Por fim, resta destacar que as atividades de interpretação gráfica e as atividades concretas são importantes no ensino de funções, pois por meio delas pode-se estimular os educadores e motivar os educandos, cumprindo seu principal objetivo: proporcionar uma maior aprendizagem de funções.

REFERÊNCIAS

BONGIOVANNI, V., VISSOTO, O. R., LAUREANO, J. L. **Matemática e Vida**. 2º Grau. V.1. São Paulo: Ática, 1993.

COSTA, José Luís. Polícia comemora índice. **Zero Hora**, Porto Alegre, p. 52, 4 maio. 2008.

COXFORD, A. F; SHULTE, A. P. Tradução de Hygino H. Domingues. **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

IMENES, M. L., LELLIS, M. **Matemática para todos**. São Paulo: Scipione, 2002.

NERY, C., JAKUBOVIC, J. **Curso de Matemática**. V. 1. São Paulo: Moderna, 1986.

SIGNORELLI, Carlos Francisco. **Matemática**. 2º Grau. V. 1. São Paulo: Ática, 1992.

SILVEIRA, Ieda. **A Geografia da gente:** o olhar geográfico. V. 1. São Paulo: Ática, 2003.

SMOLE, K. C. S.; CENTURIÓN, M. R.; DINIZ, M. I. A interpretação Gráfica e o Ensino de Funções. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 14, 1º número de 1989.

TINOCO, L. A. A. et al. **Construindo o conceito de Função no 1º Grau**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 1998.