ISSN 1981-2841

UMA APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA AGRICULTURA[1]

AN APPLICATION OF THE MATHEMATICAL MODELING IN AGRICULTURE

Marinela da Silveira Boemo[2] e Leandra Anversa Fioreze[3]

RESUMO

A modelagem, enquanto estratégia alternativa para o ensino da matemática, possibilita ao aluno estudar as aplicações da matemática. Nesta pesquisa, enfatizou-se a plantação de batatas inglesa, sendo explorado os conteúdos de cálculo tais como, limite, derivadas, funções, máximos e mínimos, de forma a maximizar a produção em uma área fixa.

Palavras-chave: modelagem matemática, cálculo, plantio de batatas.

ABSTRACT

The modeling, as an alternative strategy for the teaching of mathematics, allows the student to study the applications of mathematics. In this research, the calculation process involved in the planting of potatoes was explored, such as limits, derivatives, functions, maximum and minimum, so as to maximize the production of the area.

Keywords: *mathematical modeling, calculation, potato planting.*

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática, enquanto estratégia alternativa para o ensino da matemática, busca relacionar as vivências sociais e escolares do aluno com o conteúdo estudado em sala de aula, fazendo com que ele perceba a importância na

---

[1] Trabalho final de graduação - TFG.
[2] Acadêmico do Curso de Matemática - UNIFRA.
[3] Orientador - UNIFRA.

sua formação acadêmica. Para estudar o conteúdo programático pode-se utilizar, como ponto de partida, exemplos contextualizados que tenham relação com o dia a dia do aluno.

Segundo Mendonça (1993, p. 13),

> a Modelagem Matemática é vista como um processo de sentido global que tem início numa situação real problematizada, para a qual buscaremos a solução através de um modelo matemático que traduzirá, em linguagem matemática, as relações naturais do problema de origem.

Sabendo que a disciplina de Cálculo, muitas vezes, é considerada como difícil e bastante questionada, procurou-se conectar a matemática com alguma atividade que tivesse relação com a realidade.

Escolheu-se o tema “plantio de batata inglesa”, que é uma das atividades agrícolas predominantes da região da Quarta-Colônia. Pesquisaram-se, junto aos profissionais da área, subsídios técnicos sobre a plantação de batatas, para propiciar um trabalho desperte o interesse dos alunos.

A EMATER de Silveira Martins forneceu várias informações sobre como é realizado um plantio de batatas e quais os parâmetros que devem ser levados em conta. Estabeleceram-se, então, as distâncias que devem ser deixadas entre as covas e as linhas (chamadas de camaleões na região) para otimizar a quantidade de sacos de batatas a ser produzida por hectare.

DESENVOLVIMENTO

O primeiro passo para que realmente se pudesse começar a fazer algum tipo de cálculo relacionado ao plantio de batatas foi obter algumas informações necessárias de como é realizado seu plantio.

Os dados abaixo referem-se ao detalhamento do plantio de batatas:

1) O espaçamento entre duas “linhas de cultivo” deve ser no mínimo de 75 cm para que a operação de “amontoar” possa ser executada;
2) Cada planta isolada produz em média 7 batatas (graúdas e miúdas);
3) O peso médio de 7 batatas de uma mesma planta é 0,414 gramas;
4) A EMATER considera como produção normal, 330 sacos de 50 kg por hectare plantado (a metragem em hectare é 10.000 m^2);
5) Dados experimentais fornecem uma relação entre a distância das

plantas da mesma linha e a quantidade de batatas em cada planta, que é demonstrada pelo quadro 1 (BASSANEZZI, 2002) .

Quadro 1 - Distância entre as plantas de mesma linha e quantidade de batatas em cada planta.

Distância	Quantidade
0,25 m	4,5 batatas
0,30 m	6,5 batatas
0,35 m	7,5 batatas
0,40 m	8,0 batatas

Se a distância for maior de 40 cm, pode-se considerar que a variação da produção é desprezível. A partir dessas hipóteses e dos dados experimentais, objetivou-se determinar a distância entre as plantas (na mesma linha) de modo que a produção seja máxima.

a) Considera-se, inicialmente, como primeiro modelo, uma região plana quadrada de área igual a 1 hectare, usando regra-de-três, pode-se completar a seguinte tabela:

Tabela 1 - Modelo de uma região plana quadrada com área de 1 hectare.

Distância (d) entre plantas de mesma linha	Quantidade de batatas (b) por planta	Quantidade de planta por linha	Quantidade de plantas total 1 hectare	Produção por planta	Produção total do hectare
d: cm	b: média	média		kg	Sacos: 50kg
25 30 35 40 45	4,5 6,5 7,5 8,0 8,25			0,414	330

b) Quantidade de linhas em um hectare de forma quadrada:

Cada linha mede $\sqrt{100}$ m = 10 m. Se as linhas devem estar espaçadas em 75 cm, tem-se 100 m / 0,75 =133,333. Se o comprimento de uma linha for de 100 m, tem-se um espaço de 0 cm entre as extremidades das linhas e a divisa do terreno. Tomando 133 linhas tem-se um espaço de 0,25 m / 2 = 0,125 m entre as linhas e a divisa do terreno.

c) A produção em sacos (50 kg) é uma função da distância “d” entre duas plantas consecutivas da mesma linha e da quantidade “b” de batatas por planta:
P(d,b) = (peso de uma batata x qtde. de batatas por planta) . (n° de planta por linha x qtde. de linhas) . (qtde. de sacos)

$$P(d,b) = \left(\qquad \right) \cdot \left(\qquad \right) \cdot \left(\quad \right) \cong \frac{15,7}{d} b \qquad (1)$$

Obteve-se, desse modo, uma expressão de P em função de duas variáveis (d e b).

A produção é diretamente proporcional à quantidade de batatas por planta e inversamente proporcional ao espaçamento entre duas plantas consecutivas da mesma linha.

d) Expressando P em função de uma variável: deve-se encontrar uma relação entre b e d.
A partir dos dados do quadro 1 e de sua discretização, tem-se

$$b_0 = f(d_0)$$
$$b_1 = f(d_1)$$
$$b_2 = f(d_2)$$
$$b_3 = f(d_3)$$

Encontrando uma função b = f(d):

$$f(d_1) - f(d_0) = 6,50 - 4,5 = 2$$
$$f(d_2) - f(d_1) = 7,50 - 6,5 = 1$$
$$f(d_3) - f(d_2) = 8,00 - 7,5 = \tfrac{1}{2}$$
$$f(d_4) - f(d_3) = 8,25 - 8,0 = \tfrac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$f(d_n) - f(d_{n-1}) = (1/2)^{n-2}$$

Sendo assim, pode-se inferir que a partir da soma dos membros de cada expressão acima tem-se

$$f(d_n) - f(d_0) = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} ,$$

em que os termos à direita da igualdade representam a soma de uma progressão geométrica de n termos com $a_1 = 2$, razão $q = \frac{1}{2}$ e último termo $a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$.

Logo,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-2^{-n})}{1-\frac{1}{2}} = 4(1-2^{-n})$$

$$S_n = 4 - 2^{2-n}$$

Como $f(d_o) = 4{,}5$, pode-se escrever

$$f(d_n) - f(d_o) = 4 - 2^{2-n} \Rightarrow f(d_n) - 4{,}5 = 4 - 2^{2-n} \Rightarrow$$
$$b_n = f(d_n) = 8{,}5 - 2^{2-n} \tag{2}$$

A relação entre n e d é dada por:

Quadro 2 - Relação entre n e d.

n	d (em metros)
0	0,25
1	0,30
2	0,35
3	0,40

Ou seja, quando n aumenta 0 para 1, d aumenta 0,05. Portanto, a relação $\frac{n_i - n_j}{d_i - d_j}$ é constante para i x j. Em relação aos pontos (1; 0,30) e (0; 0,25), consegue-se determinar essa constante, que será chamada de α, ou seja, $\alpha = \frac{1-0}{0{,}30-0{,}25} = 20$.

De maneira geral, os pontos (n, d) e (n_i, d_i) estão relacionados por

$$\frac{n - n_i}{d - d_i} = \alpha$$

A partir de $(n_i, d_i) = (0; 0{,}25)$, obtém-se

$n = 20(d - 0{,}25)$

$n = 20d - 5$ (equação de uma reta) (3)

Desse modo, passando para forma discreta:

$$b_n = f(d_n) = 8{,}5 - 2^{n-2}$$

e para forma contínua:

$$b_n = f(d_n) = 8{,}5 - 2^{2-(20d\ -\ 5)}$$

ou

$$b_n = f(d_n) = 8{,}5 - 2^{(7-20d)} \qquad \text{(função potência)} \quad (4)$$

Como $P(d,b) = \frac{15{,}7}{d}.b$, substituindo b, tem-se a produção em sacos em função da distância entre duas plantas consecutivas:

$$P(d) = \frac{15{,}7}{d}\ (8{,}5 - 2^{(7-20d)})$$

ou

$$P(d) = \frac{15{,}7}{d}\{8{,}5 - \exp[(7 - 20d)\ln 2]\}. \qquad (5)$$

e) Encontrar o valor de d de modo que P(d) seja máximo.

Como P é uma função diferenciável em todo $\Re$ (função potência), se $d = d^*$ é um ponto de máximo para P, então sua derivada em d^* se anula, isto é, $P'(d^*) = 0$. Ainda, se $f(x) = a^{h(x)} \Rightarrow f'(x) = h'(x)a^{h(x)} \ln a$ (derivada de uma função exponencial).

Utilizando as propriedades da derivada, obtém-se

$$P'(d) = \frac{-15{,}7.8{,}5}{d^2} - \frac{15{,}7.2^{7-20d}(-20d.\ln 2) - 15{,}7.2^{7-20d}}{d^2}$$

$$P'(d) = \frac{15{,}7.2^{7-20d}(20d.\ln 2 + 1) - 15{,}7.8{,}5}{d^2} \qquad (6)$$

Assim,

$P'(d) = 0 \Leftrightarrow 2^{7-20d}(20d.\ln 2+1) - 8{,}5 = 0.$

Ao fornecer valores para d, observa-se o que acontece com $P'(d)$:

Quadro 3 - Valores da derivada de P(d).

d	$2^{(7-20d)}$	(20d.ln2+1)	P'(d)
0,25	4,0	4,4657	9,8628
0,30	2,0	5,1588	2,3176
0,35	1,0	5,8520	-2,1480
0,40	0,5	6,5451	-4,7274

Como a função P' é contínua e muda de sinal entre os valores d = 0,30 e d = 0,35, então existe um ponto $d^* \in$ (0,30; 0,35) tal que P'(d) = 0, pelo Teorema de Bolzano (ANTON, 2000). Desse modo, constrói-se:

$$d_1 = \frac{0,30 + 0,35}{2} = 0,325$$

e calcula-se P'(d_1):

$$P'(d_1) = 2^{7-20.0,325}(20.0,325.\ln 2+1) - 8,5 = -0,7141.$$

Portanto, a raiz de P'(d) deve estar entre d = 0,30 e d = 0,325. A partir de $d_2 = \frac{0,30+0,325}{2} = 0,3125$, calcula-se

$$P'(d_2) = 2^{7-20.0,3125}(20.0,3125.\ln 2+1) - 8,5 = 0,4676.$$

Continuando o processo (denominado método de bissecção), encontra-se, aproximadamente, a raiz de P'(d) (ANTON, 2000):

Quadro 4 - Método da Bissecção para encontrar a raiz de P'(d).

d	P'(d)	Sinal
0,30	1,8178	+
0,35	-2,6480	-
0,325	-0,7141	-
0,3125	0,4676	+
0,31875	-0,1430	-
0,315625	0,1572	+
0,3171875	0,0058	+
0,31796875	-0,0689	-
0,317578125	-0,0319	-
0,317382812	-0,0129	-
0,317285156	-0,0036	-
0,317236328	0,0011	+

A condição P'(d^*) = 0 é necessária para possuir um ponto crítico d^* que será um ponto máximo se P''(d^*) < 0 (condição suficiente).

Desse modo,

$$P''(d) = \frac{1}{d^4}\{d^2[15,7.2^{7-20d}(\ln 2(-20))](20d\ln 2+1)+15,7.2^{7-20d}.20\ln 2\} -$$

$$-\frac{1}{d^4}2d[15,7.2^{7-20d}(20d\ln 2+1)-15,7.8,5] \qquad (7)$$

Antes de efetuar tal conta, poderia, simplesmente, ser concluído que d^* $\cong$ 0,3172 é ponto de máximo de P(d). Considerando,

P(0,3) = 340,1666 , P(0,3172) = 342,7219 e P(0,32) = 342,6664

observa-se que P(d) cresce quando d < d^* e P(d) decresce quando d > d^*. Logo, d^* é ponto de máximo.

f) Supondo que o financiamento para o plantio de batatas pressupõe que se tenha uma colheita de 330 sacos por hectare, deseja-se saber a que distância deve-se plantar para que se colha ao menos 330 sacos por hectare.

Deve-se calcular d de modo que P(d) $\geq$ 330, ou seja,

$$\frac{15,7}{d}(8,5-2^{7-20d}) \geq 330 \qquad (8)$$

Como d > 0, tem-se

$$133,45 - 15,7.2^{7-20d} \geq 330d \Leftrightarrow$$
$$-15,7.2^{7-20d} \geq 330d - 133,45 \Leftrightarrow 2^{7-20d} \leq 8,5 - 21d$$
$$8,5 - 2^{7-20d} \geq 21d \qquad (9)$$

em que $b = f(d) = 8,5 - 2^{7-20d}$ é a função potência. Assim, $b \geq 21d$ e utilizando, novamente, o método da bissecção, tem-se

para d = 0,25 , 21,0191d = 5,2548 > b = 4,5
d = 0,30, 21,0191d = 6,3057 < b = 6,5
d = 0,275 , 21,0191d = 5,7802 > b = 5,6

$d = 0{,}27$, $\quad 21{,}0191d = 5{,}6751 > b = 5{,}4 \quad$ e $d_{mínimo} \cong 27$cm.

Para $d = 0{,}35$, $\quad 21{,}0191d = 7{,}3567 < b = 7{,}5$

$d = 0{,}40$, $\quad 21{,}0191d = 8{,}4076 > b = 8{,}0$

$d = 0{,}375$, $\quad 21{,}0191d = 7{,}8821 > b = 7{,}7$

$d = 0{,}40$, $\quad 21{,}0191d = 8{,}4 > b = 8{,}0 \quad$ e $d_{máximo} \cong 40$cm

g) O gráfico de $P(d) = \frac{15{,}7}{d}(8{,}5 - 2^{(7-20d)})$ é dado por:

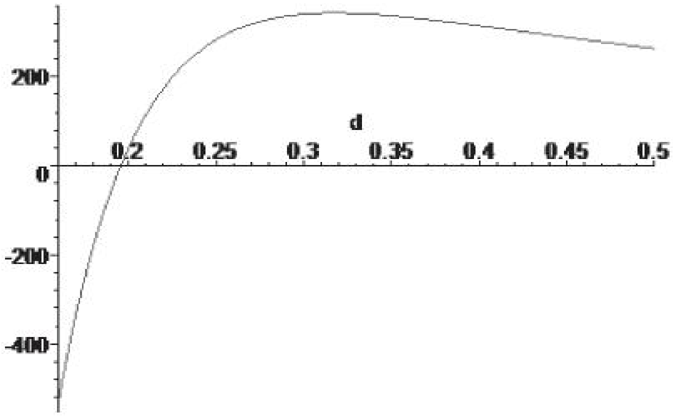

Figura 1 - Produção em função da distância.

Sendo $P(d) = \frac{15{,}7}{d}(8{,}5 - 2^{7-20d})$, P é uma função do tipo exponencial definida para todo d > 0.

A partir do gráfico, tem-se que P(d) anula-se para algum d próximo de 0,2. Efetuando os cálculos:

$$P(d) = 0 \Leftrightarrow 8{,}5 - 2^{7-20d} = 0 \Leftrightarrow 8{,}5 = 2^{7-20d} \Leftrightarrow \ln 8{,}5 = \ln 2^{7-20d}$$

$$\ln 8{,}5 = (7-20d)\ln 2$$

$$\frac{\ln 8{,}5}{\ln 2{,}0} = 7-20d$$

$$20d = 7 - \frac{\ln 8{,}5}{\ln 2{,}0}$$

$$d = \frac{1}{20}\left(\qquad \right)$$

em que d = 0,1956, conclui-se que P(d) > 0 se d > 0,1956 e P(d) < 0 se d < 0,1956.

Ao calcular o limite quando d se aproxima de zero pela direita, obtém-se:

$$\lim_{d \to 0^+} P(d) = -\infty$$

e calculando o limite quando d cresce sem limitação:

$$\lim_{d \to +\infty} P(d) = 0$$

Assim, as retas P = 0 e d = 0 são assíntotas horizontal e vertical de P(d), respectivamente.

Como $P'(d) = \dfrac{15,7.2^{7-20d}(20d.\ln 2 + 1) - 15,7.8,5}{d^2}$, tem-se que $P'(d) = 0$ quando $d^* \cong 0,3172$ (como se verificou que d^* é ponto de máximo e $P(d^*) = 342,7219$).

Se a distância for de $d \cong 0,3172$ cm, tem-se a produção máxima que é de $P(d) \cong 342,7219$ sacos de 50 kg de batatas por hectare, o que comprova a inferência ao se analisar o gráfico dado na figura 1.

CONCLUSÃO

Este problema, inicialmente de aparência despretensiosa, despertou o interesse em buscar o conhecimento do cálculo não só como conteúdo, mas também como uma maneira para resolver o problema em questão.

A partir do tema "plantação de batatas", outros enfoques poderão ser avaliados, como, por exemplo, a adubação e os insumos colocados nas plantas, ou a precipitação de chuva e a produtividade.

Isso mostra que se deve apontar vários caminhos para que, em algum momento, possam ser planejadas atividades em que a essência da modelagem matemática revele-se, em aplicações de problemas na vida do modelador, ao aluno.

REFERÊNCIAS

ALBÉ, M. Q.; GROENWALD, C. L. O. **Proposta de Trabalho em Modelagem e Simulação Matemática.** Ano 8, n. 11,p. 41-49, dez. São Paulo: SBEM, 2001.

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**, Porto Alegre: Bookman, 2000.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

MENDONÇA, M. C. D. **Problematização**: Um caminho a ser percorrido em Educação Matemática. Tese (Doutorado) - UNICAMP, 1993.