ISSN 1981-2841

APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR AO MODELO ECONÔMICO DE LEONTIEF[1]

APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA TO LEONTIEF'S ECONOMIC MODEL

Rafaeli Oleques Pires[2] e Ana Maria Coden Silva[3]

RESUMO

Neste trabalho, fez-se um estudo, por meio de pesquisa bibliográfica, dos Modelos Econômicos de Leontief: o modelo fechado, ou modelo input-output, e o modelo aberto, ou modelo de produção. Em cada um, são dados certos parâmetros que descrevem as inter-relações entre as "indústrias" do modelo econômico sob consideração. Para analisar o comportamento desses modelos, utilizam-se resultados básicos da Álgebra Linear, como matrizes e sistemas de equações lineares.

Palavras-chave: matrizes, sistemas de equações lineares, Modelos Econômicos de Leontief.

ABSTRACT

This work has been a bibliographical study of Leontief's Economic Models: the closed model, or input-output model, and the open model or model of production. In each certain parameters are given that describe the interrelations between "industries" of the economic model under consideration. To analyze the behavior of these models basic results of Linear Algebra, as matrices and linear equation systems were used.

Keywords: *matrices, linear equation systems, Leontief's Economic Models.*

---

[1] Trabalho de Iniciação Científica - PROBIC.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática - UNIFRA.
[3] Orientadora - UNIFRA.

INTRODUÇÃO

A Economia Matemática não é um ramo especial da Economia. Ela consiste em uma abordagem à análise econômica, na qual o economista usa símbolos matemáticos na formulação do seu problema e também recorre a teoremas matemáticos conhecidos para ajudar o seu raciocínio. A Álgebra Matricial fornece um modo compacto de se escrever um sistema de equações lineares, inclusive um sistema extremamente grande; gera um modo de testar a existência de uma solução pelo cálculo de um determinante e fornece um método para achar essa solução (se ela existir). A teoria das matrizes tem muito sucesso na descrição da inter-relação de preços, produção e demanda em sistemas econômicos.

Desse modo, percebe-se uma grande aplicabilidade da Álgebra Linear a modelos econômicos que apresentam um número muito grande de parâmetros, tendo como restrição a sua aplicabilidade somente a sistemas de equações lineares. Tendo em vista que, geralmente, os alunos percebem a Matemática como um simples conjunto de regras que não conseguem compreender e relacionar a fatos concretos, neste trabalho, apresenta-se a aplicação da Álgebra Linear ao Modelo Econômico de Leontief. Para tanto, inicialmente, delimitam-se alguns resultados da Álgebra Linear que serão utilizados no decorrer do trabalho:

1. Sistema Linear homogêneo: um sistema de equações lineares é dito homogêneo se os termos constantes são todos zero e sua forma matricial é $Ax = 0$.

2. Todo sistema homogêneo de equações lineares tem pelo menos uma solução: a solução trivial ou a solução nula; se existirem outras soluções, elas serão chamadas de não triviais.

3. Se A é uma matriz n x n, então as seguintes afirmações são equivalente:

   a) A é invertível.
   b) $Ax = 0$ só tem a solução trivial.
   c) $\det(A) \neq 0$

4. Se A é uma matriz invertível nxn, então, para cada matriz b de tamanho n x 1, o sistema de equações $Ax = b$ tem exatamente uma solução: $x=A^{-1}b$.

5. Se A é qualquer vetor ou matriz , a notação $A \geq 0$ ($A > 0$) significa que cada entrada de A é não negativa (positiva).

6. Se $A \geq B$ ($A > B$), significa que $A - B \geq 0$ ($A - B > 0$).

MODELO FECHADO (DE INPUT-OUTPUT) DE LEONTIEF

Exemplo: Três proprietários de casas – um pedreiro, um eletricista e um hidráulico – pretendem fazer consertos em suas três casas. Eles concordam trabalhar um total de 10 dias cada conforme a tabela dada:

	Trabalho executado pelo		
	Pedreiro	Eleticista	Hidráulico
Dias de trabalho na Casa do Pedreiro	2	1	6
Dias de trabalho na Casa do Eletricista	4	5	1
Dias de trabalho na Casa do Hidráulico	4	4	3

Para efeitos de impostos, eles devem declarar e pagar um ao outro um salário diário, mesmo para o trabalho que cada um faz em sua própria casa. Seus salários diários normais são, aproximadamente, R$ 100,00, mas eles concordam em ajustar seus respectivos salários diários, de tal modo que o total pago por cada um é igual ao total recebido. Desse modo,

p_1= salário diário do pedreiro
p_2 = salário diário do eletricista
p_3 = salário diário do hidráulico

Para satisfazer a condição de "equilíbrio", precisa-se do total de gastos igual ao total recebido para cada um dos proprietários pelo período de dez dias. Ou seja,

$$2p_1 + p_2 + 6p_3 = 10p_1$$
$$4p_1 + 5p_2 + p_3 = 10p_2$$
$$4p_1 + 4p_2 + 3p_3 = 10p_3$$

Essas são as equações de equilíbrio para o pedreiro, o eletricista e o hidráulico, respectivamente. Dividindo por 10 essas equações e reescrevendo-as na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

É possível reescrever a equação (1) como um sistema homogêneo $\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,6 \\ -0,4 & 0,5 & -0,1 \\ -0,4 & -0,4 & 0,7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ cuja solução é $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$, em que t é uma constante arbitrária. Essa constante pode ser escolhida convenientemente.

Conforme se observa, as principais características do Modelo de input-output de Leontief são:

- Na equação (1), a soma de cada coluna da matriz de coeficientes é 1, correspondendo ao fato de que o produto do trabalho de cada um dos proprietários está completamente distribuído entre eles nas proporções dadas pelas entradas da coluna.
- O problema consiste em determinar "preços" para esses trabalhos de tal modo a colocar o sistema em equilíbrio, ou seja, de modo que o gasto total de cada proprietário seja igual ao total recebido em salário.

MODELO GERAL

O modelo geral consiste de um sistema econômico com um número finito de "indústrias", que foram ordenadas de 1 a k. Ao longo de algum período fixo de tempo, cada indústria gera um produto, que pode ser algum bem ou serviço, o qual é completamente utilizado de uma maneira predeterminada por k_s indústrias.

O problema consiste em encontrar "preços" convenientes que devem ser cobrados por esses k_s produtos de maneira que, para cada indústria, o total dos gastos se iguale ao total recebido.

Para este estudo, utilizam-se alguns teoremas cujas demonstrações encontram-se na bibliografia citada.

Para o período fixado de tempo dado, escreve-se

p_i = preço cobrado pela i-ésima indústria pela sua produção total;

e_{ij} = fração da produção total de j-ésima indústria que é comprada pela i-ésima indústria para $i, j = 1, 2, \cdots, k$.

Por definição,

$$(i)\ p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

$$(ii)\ e_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, k$$

$$(iii)\ e_{1j} + e_{2j} + \cdots + e_{kj} = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, k$$

Seja o vetor-preço $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$ e a matriz de troca ou *matriz de input-output*

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix}$$

Como no exemplo, para que os gastos das indústrias igualem-se aos seus rendimentos, a seguinte equação deve ser satisfeita:

$$Ep = p \tag{2}$$

ou

$$(I - E)\,p = 0 \tag{3}$$

A equação (3) é um sistema linear homogêneo para o vetor-preço p.

Além de mostrar que (3) tem uma solução não trivial para a qual $p \geq 0$, precisa-se mostrar que os preços p_i dos k_s produtos são números não negativos. Isso é válido, conforme o seguinte teorema:

Teorema: Se E é uma matriz de troca, então $Ep = p$ sempre tem uma solução não trivial p cujas entradas são não negativas.

Considera-se dois exemplos desse teorema.

Exemplo 1: Seja $E = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ e $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$. Então, $(I - E)p = 0$ tem a solução geral $p = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, em que s é uma constante arbitrária. Para qualquer $s > 0$, tem-se uma solução não trivial $p \geq 0$.

Exemplo 2: Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$. Então, $(I - E)p = 0$ tem a solução geral $p = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, em que s e t são constantes arbitrárias independentes.

Para quaisquer $s \geq 0$ e $t \geq 0$, em que ambos não são nulos, tem-se soluções não triviais $p \geq 0$.

No primeiro exemplo, determina-se que, em algumas situações, um dos preços precisa ser zero para a condição de equilíbrio ser satisfeita. No segundo exemplo, podem haver várias estruturas de preços linearmente independentes. O teorema a seguir dá condições para excluir ambos os casos.

Teorema: Seja E uma matriz de troca tal que todas as entradas de E^m são positivas para algum inteiro positivo m. Então, existe exatamente uma solução linearmente independente de $(I - E)\,p = 0$ e ela pode ser escolhida com todas suas entradas positivas.

Exemplo: A matriz de troca da equação (1) era $E = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}$.

Como $E > 0$, pelo teorema acima, existe exatamente uma solução linearmente independente de $(I - E)\,p = 0$ e pode ser escolhida tal que $p > 0$. No exemplo, verificou-se que a solução é $\begin{bmatrix} 31 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$.

MODELO ABERTO (DE PRODUÇÃO) DE LEONTIEF

Ao contrário do modelo fechado, no qual os produtos de k indústrias são somente distribuídos entre as próprias indústrias, o modelo aberto tenta satisfazer uma demanda externa para os produtos. Nesse modelo, os preços são fixados e o objetivo é determinar os níveis de produção das indústrias necessários para satisfazer a demanda externa.

Para algum período fixado de tempo, escreve-se:

$x_i =$ valor monetário da produção total da i-ésima indústria;

$d_i =$ valor monetário da produção da i-ésima indústria necessária para satisfazer a demanda externa;

$c_{ij} =$ valor monetário da produção da i-ésima indústria que é necessária para a j-ésima indústria produzir uma unidade do valor monetário de seu próprio produto.

Assim, definine-se o vetor-produção $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$, o vetor demanda

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} \text{ e a matriz de consumo } C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}.$$

Desse modo, $x \geq 0$, $d \geq 0$ e $C \geq 0$.

A partir da definição de c_{ij} e x_j, percebe-se que a quantidade $c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{ik}x_k$ é o valor da produção da i-ésima indústria que é necessária pra todas as k indústrias produzirem um total especificado pelo vetor de produção x. Essa é a i-ésima entrada do vetor-coluna Cx e, assim, a i-ésima entrada do vetor-coluna $x - Cx$ é o valor do excesso de produção da i-ésima indústria que está disponível para satisfazer a demanda externa. Consequentemente,

$$x - Cx = d$$

ou (4)

$$(I - C)x = d$$

em que a demanda é satisfeita, sem sobras nem faltas.

A partir dos dados C e d, o objetivo é encontrar o vetor-produção $x \geq 0$ que satisfaz a equação (4).

Exemplo: Uma certa cidade tem três indústrias principais: uma mina de carvão, uma usina elétrica e uma rede ferroviária local. Para produzir R$ 1 de carvão, a mina precisa comprar R$ 0,25 de eletricidade para seu equipamento e R$ 0,25 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para produzir R$ 1 de eletricidade, a usina requer R$ 0,65 de carvão para combustível, R$ 0,05 de sua própria eletricidade para equipamento auxiliar e R$ 0,05 da ferrovia para suas necessidades de transporte. Para fornecer R$ 1 de transporte, a rede ferroviária precisa de R$ 0,55 de carvão para combustível e R$ 0,10 de eletricidade para seu equipamento auxiliar. Em uma determinada semana, a mina recebe pedidos de R$ 50.000,00 de carvão de fora da cidade e a usina recebe pedidos de R$ 25.000 de eletricidade de fora da cidade. Não há demanda externa para a ferrovia. Quanto cada uma dessas três indústrias deve produzir naquela semana para atender exatamente suas próprias demandas e a demanda externa?

Para o período de uma semana, sejam:

x_1= valor da produção total da mina;

x_2= valor da produção total da usina;

x_3= valor da produção total da ferrovia.

A matriz de consumo do sistema é $C = \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}$.

O sistema linear $(I - C)x = d$ é $\begin{bmatrix} 1,00 & -0,65 & -0,55 \\ -0,25 & 0,95 & -0,10 \\ -0,25 & -0,05 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Como a matriz de coeficientes é invertível, a solução é dada por:

$$x = (I - C)^{-1} d = \frac{1}{503} \begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102.087 \\ 56.163 \\ 28.330 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a produção total da mina deveria ser R\$ 102.087, a da usina deveria ser R\$ 56.163 e a da ferrovia deveria ser de R\$ 28.330.

Reconsiderando a equação (4):

$$(I - C)\, x = d$$

Se a matriz quadrada $I - C$ for invertível, pode-se escrever

$$x = (I - C)^{-1} d \qquad (5)$$

E, se a matriz $(I - C)^{-1}$ tiver somente entradas não negativas, então a equação (5) terá uma única solução não negativa x, para qualquer $d \geq 0$.

Definição: Uma matriz de consumo C é produtiva se $(I - C)^{-1}$ existe e $(I - C)^{-1} \geq 0$.

A seguir, serão citados os critérios que garantem que uma matriz de consumo é produtiva.

Teorema: Uma matriz de consumo C é produtiva se, e somente se, existir um vetor-produção $x \geq 0$, ou seja, cada indústria produz mais do que consome.

Corolário: Uma matriz de consumo C é produtiva se cada soma das entradas das linhas de C é menor do que 1.

Corolário: Uma matriz de consumo C é produtiva se cada soma das entradas das colunas de C é menor do que 1.

Esse corolário diz que uma matriz de consumo é produtiva se todas as k indústrias do sistema econômico são lucrativas.

Exemplo: Seja a matriz de consumo do exemplo anterior,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,55 \\ 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{bmatrix}.$$

As três somas de colunas dessa matriz são todas menores do que 1, portanto, as três indústrias são lucrativas. Desse modo, a matriz de consumo C é produtiva. Isso também pode ser concluído pelo fato de que $(I - C)^{-1} \geq 0$.

CONCLUSÃO

A Álgebra Linear tem amplo campo de aplicações. Por meio do uso da teoria de matrizes, é possível calcular parâmetros adicionais, como os preços e níveis de produção para satisfazer um objetivo econômico desejado. Na economia, analisou-se o comportamento dos Modelos Econômicos de Leontief. No modelo fechado, determinaram-se preços que igualam o total dos gastos como o total recebido e, no modelo aberto, níveis de produção das indústrias para satisfazer a demanda externa.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

CHIANG, Alfha. **Matemática para Economistas**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil: Ed. da Universidade de São Paulo, 1982.

LEONTIEF, W. **A economia do Insumo-Produto**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.