ISSN 1981-2841

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO E O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DO DETERMINANTE[1]

GEOMETRIC TRANSFORMATIONS ON THE FLAT SURFACE AND THE DETERMINANT GEOMETRIC MEANING

Janaina de Ramos Ziegler[2] e Leila Brondani Pincolini[3]

RESUMO

Neste trabalho, fez-se um estudo, por meio de pesquisa bibliográfica, das transformações geométricas no plano, as isometrias, as homotetias, as semelhanças, as transformações afim e algumas de suas propriedades. Elas são importantes, pois, a partir das transformações afim de posto 2, pode-se obter uma interpretação geométrica para o determinante de uma matriz, a qual compreende que, o módulo do determinante da matriz de uma transformação afim de posto 2 é igual a razão entre a área da figura transformada e a área da figura original.

Palavras-chave: transformações no plano, posto, determinante.

ABSTRACT

This research involved a bibliographical study of the geometric transformations on the flat surface, isometry,, dilation, similarity, transformation and some of their properties. They are important, for, from the 2 stand transformations we can notice a geometric interpretation for the determinant of a matrix which implies that the module of the determinant of a stand 2 transformation matrix is equal to the reason between the area of the transformed figure and the area of the original figure.

Keywords: *transformations on the flat surface,stnd, determinant.*

---

[1] Trabalho de Complementação Acadêmica - PROADIS - UNIFRA.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática - UNIFRA.
[3] Orientadora - UNIFRA.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, fez-se um estudo das transformações geométricas no plano, sob o ponto de vista geométrico e algébrico, tendo como objetivo obter o significado geométrico do determinante. De acordo com Lima (2002), "a interconexão entre Geometria e Álgebra resultante desse ponto de vista foi responsável por extraordinários progressos na Matemática e suas aplicações". A concordância entre o pensamento geométrico e o pensamento algébrico manifesta-se também no fato de que, na investigação algébrica bem como nas considerações geométricas, perseguimos em cada momento a cadeia das operações mentais até aos axiomas.

Para alcançar o objetivo proposto, iniciou-se o estudo pelas isometrias, as quais são transformações que preservam distâncias logo após as homotetias, as quais são transformações que não preservam distâncias, mas são uma ampliação ou redução da figura original, ou seja, uma semelhança que preserva ou inverte o posicionamento da figura. Finalmente, estudou-se as semelhanças e as transformações afim, sendo que estas levam pontos não colineares em pontos não colineares e o determinante da parte linear da equação da transformação é diferente de zero, esta última sendo o alvo do objetivo principal da pesquisa: interpretar geometricamente o determinante de uma matriz.

DESENVOLVIMENTO

TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

A palavra transformação usualmente significa "mudança". É, portanto, natural pensar que, ao falar em "transformação geométrica", fala-se de mudanças em figuras geométricas.

Definição 1: Uma transformação no plano é uma função T: $\Pi \rightarrow \Pi$, isto é, T associa a cada ponto P do plano um outro ponto P_1 = T(P) do plano, em que o ponto P_1 = T(P) é a imagem do ponto P por T.

Definição 2: Uma transformação é injetiva quando quaiquer dois pontos distintos P $\neq$ Q em Π têm sempre imagens distintas T(P) $\neq$ T(Q), ou seja, T é injetiva quando T(P) = T(Q) implica P = Q.

Definição 3: Transformações são sobrejetivas quando todo ponto P_1 em Π é imagem de pelo menos um ponto P, ou seja, para todo P_1 em Π existe P em Π tal que T(P) = P_1.

Definição 4: Uma transformação é bijetiva quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva, isto é, para todo ponto P_1 em Π existe um único ponto P tal que $T(P) = P_1$.

Observação: Toda transformação bijetiva, possui uma inversa $T^{-1}: \Pi \to \Pi$, sendo que todo ponto P_1 em Π sua imagem $T^{-1}(P)$ pela inversa T^{-1} é o único ponto P de Π tal que $T(P) = P_1$.

Exemplo: Dada a transformação T, expressa nas equações.

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \dfrac{y}{2} \end{cases}$$

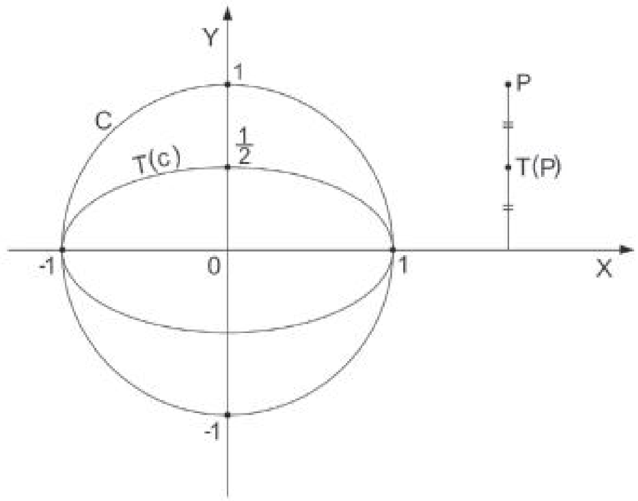

Figura 1 - Transformações no plano.

Ao observar a figura 1, nota-se que a transformação comprime verticalmente (reduz a ordenada à metade) e preserva horizontalmente sua área. Percebe-se, então, que é bijetiva, pois dado um ponto (x_1, y_1) do plano, ele é imagem de exatamente um ponto (x, y) do plano, com coordenadas dadas por $x = x_1$ e $y = 2y_1$.

No gráfico, está representada a circunferência unitária C, de equação $x^2 + y^2 = 1$, e o resultado T(C) de sua compressão vertical. Para obter a equação de T(C) substituem-se, na equação de C, as coordenadas x e y de suas expressões em torno de x_1 e y_1. Logo, a equação de T(C) é: $x_1^2 + 2y_1^2 = 1$, ou seja, $x_1^2 + 4y_1^2 = 1$, que é a equação de uma elipse de semieixos a = 1 e $b = \frac{1}{2}$.

PRINCIPAIS TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Nesta pesquisa, foram estudadas as principais transformações como: as isometrias, semelhanças, homotetias e transformações afim. Sendo também necessário o estudo do posto de uma transformação afim. A seguir, analisa-se cada uma delas individualmente.

ISOMETRIAS NO PLANO

Quando se aplica uma transformação a uma figura de modo que ela apenas possa ocupar outro lugar no plano, sem alterar sua forma e tamanho original, dizemos que a transformação aplicada é uma isometria, pois *iso* quer dizer igual, mesmo e *metria* está relacionada à medida.

Formalmente, uma isometria preserva distâncias. Por definição, uma transformação T é uma isometria quando se tem d (T(P), T(Q)) = d (P, Q) para quaisquer pontos P, Q no plano Π.

EQUAÇÕES DE UMA ISOMETRIA

Qualquer isometria T transforma um sistema de eixos ortogonais OXY noutro sistema de eixos ortogonais O'X'Y'. Além disso, T transforma um ponto qualquer P do plano noutro ponto P_1 = T(P), em que as coordenadas do sistema O'X'Y' são as mesmas de P no sistema OXY.

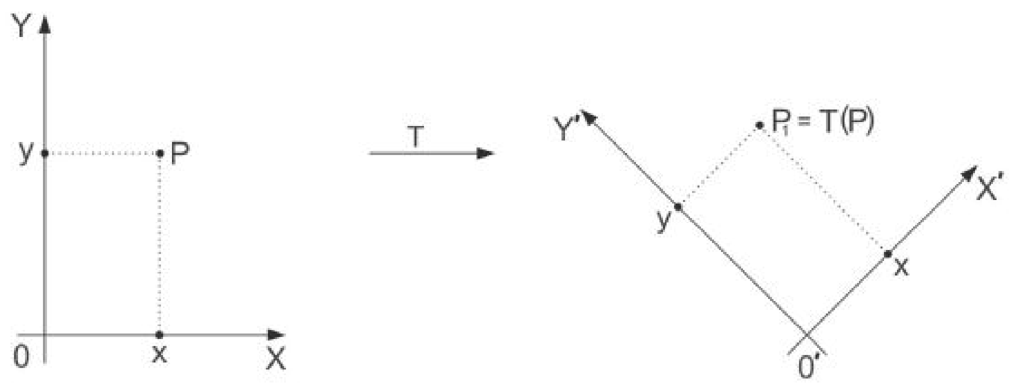

Figura 2 - Isometria no Plano.

Se (a, b) são as coordenadas de O' = T(O) no sistema OXY e α o ângulo de OX para O´X´, as coordenadas (x_1, y_1) do ponto P_1 = T(P) no sistema OXY são dadas por

$$\begin{cases} x_1 = \quad - \quad + a \\ y_1 = \quad + \quad + b \end{cases} \quad \textbf{(1)} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = \quad + \quad + a \\ y_1 = \quad - \quad + b \end{cases} \quad \textbf{(2)}.$$

Conforme OXY e O' X' Y' sejam igualmente orientados ou não. Tem-se que no caso **(1)**, T preserva e, no caso **(2)**, T inverte a orientação do plano.

Assim, quando se fixa um sistema de eixos ortogonais OXY, uma isometria qualquer do plano transforma o ponto P = (x, y) no ponto T(P) = P_1 = (x_1, y_1) cujas coordenadas, nesse mesmo sistema OXY, são dadas pelas equações **(1)** ou **(2)** acima, sendo que (a, b) são as coordenadas de T(O) e α é o ângulo entre OX e O'X' = T(OX).

Observa-se que as equações de uma isometria T têm uma das formas

$$\begin{cases} x_1 = \quad - \quad + a \\ y_1 = \quad + \quad + b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \quad + \quad + a \\ y = \quad - \quad + b \end{cases}.$$

No primeiro caso, a matriz da "parte linear" de T é $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$, em que T preserva orientação e o determinante $\Delta = c^2 + d^2 = 1 > 0$.

No segundo caso, a matriz é $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ e T inverte orientação e o determinante $\Delta = -c^2 - d^2 < 0$.

Portanto, o sinal do determinante permite distinguir as isometrias que preservam das que invertem a orientação do plano.

HOMOTETIA

Trata-se de uma transformação que não preserva distâncias, é uma ampliação ou redução da figura original, ou seja, uma semelhança que preserva ou inverte o posicionamento da figura, pois *homo* significa mesmo e *tetia* está relacionada ao posicionamento. Formalizando essa ideia, tem-se que: homotetia é uma transformação H: $\Pi \to \Pi$ que associa a cada ponto P em Π o ponto P = H(P) tal que $\overrightarrow{OP_1} = r\,\overrightarrow{OP}$, $r \in \Re$. Se **r** = 1, a homotetia H reduz-se à transformação identidade: H(P) = P para todo P.

Às vezes é conveniente considerar transformações K: $\Pi \to \Pi$, que consistem numa homotetia H de centro O e razão r > 0, seguida da rotação de 180º em torno de O. Nesse caso, para todo ponto P do plano Π, temos K(P) = P_1, em que $\overrightarrow{OP_1} = -r\,\overrightarrow{OP}$. Por isso, a transformação K é chamada a homotetia de razão negativa (-**r**).

Exemplos:

Abaixo, apresentam-se figuras em que ocorrem homotetias que ampliam ou reduzem a figura, igualam e invertem a orientação das figuras, respectivamente:

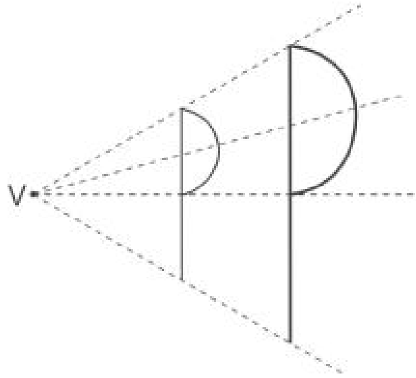

Figura 3 - Homotetia que amplia a figura.

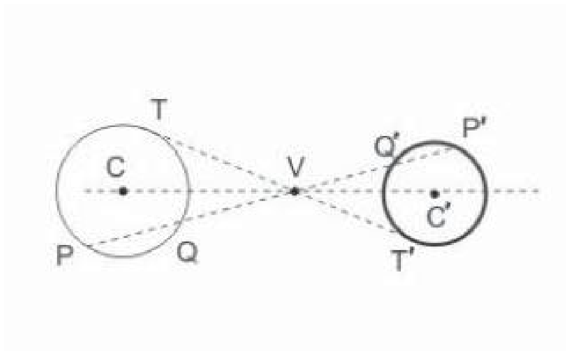

Figura 4 - Homotetia que reduz a figura.

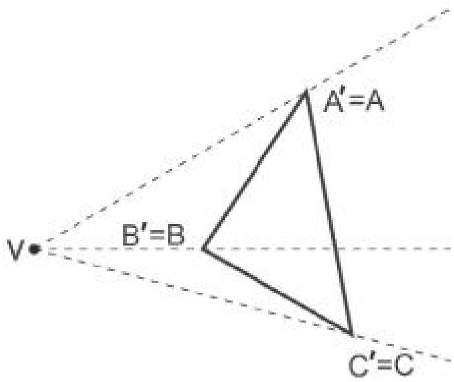

Figura 5 - Homotetia de razão **r** = 1.

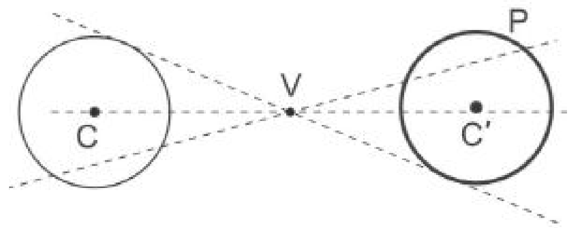

Figura 6 - Homotetia que inverte a orientação.

SEMELHANÇA

A semelhança de figuras constitui um tópico muito importante na aprendizagem de Matemática, devido às suas aplicações. Ela é fundamental na representação de objetos e na confecção de plantas e mapas, para que se obtenha uma redução fiel, "guardando as mesmas proporções", isto é, de modo que a razão entre as dimensões da figura original e da sua representação seja constante. Vale lembrar que o termo "semelhante", em Matemática, significa ter exatamente a mesma forma, podendo os tamanhos ser diferentes.

Atenção! Não basta que duas figuras tenham a mesma "forma aparente" para que sejam semelhantes, ou seja, não basta que as figuras sejam "parecidas", é preciso que os ângulos e as proporções entre as medidas sejam mantidos. Em resumo, duas figuras planas são **semelhantes** se uma pode ser obtida como ampliação ou redução da outra. Falando matematicamente seria: Seja **r** um número real positivo. Uma semelhança de razão **r** no plano Π é a transformação σ: $\Pi \rightarrow$

Π que multiplica por **r** a distância entre dois pontos P, Q quaisquer em Π, isto é, d(σ(P), σ(Q)) = **r** d(P, Q).

Exemplo:

Um retângulo de lados medindo x e y é transformado pela semelhança σ num retângulo cujos lados medem **r**x e **r**y, sendo **r** a razão de σ.

Observação 1: Um sistema de eixos ortogonais OXY é levado por σ noutro sistema $O_1X_1Y_1$ de eixos ortogonais. Se as coordenadas do ponto P no ponto P no sistema OXY são (x, y), então as coordenadas do ponto $P_1 = \sigma$ (P) no sistema $O_1X_1Y_1$ são (**r**x, **r**y).

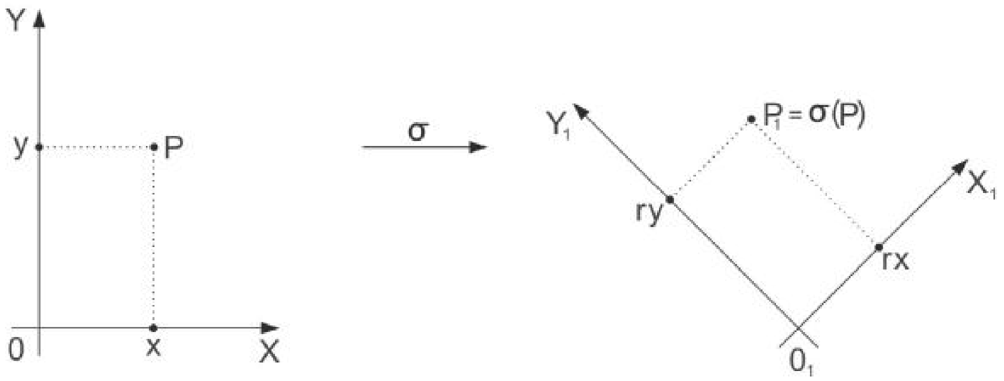

Figura 7 - Semelhança no Plano.

Observação 2: Toda semelhança σ: $\Pi \to \Pi$ é uma transformação sobrejetiva, pois dado um ponto arbitrário P_1, cujas coordenadas no sistema $O_1X_1Y_1$ são (x_1, y_1), pode-se encontrar $P_1 = \sigma$ (P), sendo que P é o ponto do plano, cujas coordenadas no sistema original OXY são $\left(\frac{x_1}{r}, \frac{y_1}{r}\right)$.

EQUAÇÕES DE UMA SEMELHANÇA

Ao fixar um sistema OXY de eixos ortogonais, uma semelhança σ de razão **r** transforma um ponto qualquer P = (x, y) do plano no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ e (ra, rb) são as coordenadas do ponto $O_1 = \sigma$ (O).

$$\begin{cases} x_1 = (\quad) - (\quad) + ra \\ y_1 = (\quad) + (\quad) + rb \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = (\quad) + (\quad) + ra \\ y_1 = (\quad) - (\quad) + rb \end{cases},$$ conforme σ preserve ou inverta a orientação do plano.

Agora, ao escrever m = r cosα, n = r senα, p = ra e q = rb, tem-se $\begin{cases} x_1 = \quad - \quad + p \\ y_1 = \quad + \quad + q \end{cases}$ ou $\begin{cases} x_1 = \quad + \quad + p \\ y_1 = \quad - \quad + q \end{cases}$, sendo que a matriz da "parte linear" de σ é $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

No primeiro caso, a matriz tem determinante positivo $m^2 + n^2$ e, no segundo caso, o determinante é igual a $-m^2 - n^2$, logo é negativo.

Aqui, $m^2 + n^2 = \mathbf{r^2}$, em que **r** é a razão da semelhança σ.

Observação: Se a razão **r** da semelhança σ é igual a 1, a transformação σ é uma isometria.

TRANSFORMAÇÃO AFIM

Definição: Diz-se que F: Π → Π é uma transformação afim do plano quando, para quaisquer pontos P, Q em Π e todo número real t, vale:

$F((1-t)P + t\,Q) = (1-t)P_1 + t\,Q_1$, sendo $P_1 = F(P)$, $Q_1 = F(Q)$.

A igualdade acima pode também ser escrita sob a forma:

$F(P + t\,PQ) = P_1 + t\,P_1Q_1$. Se $P_1 \neq Q_1$. Essa igualdade significa que F transforma a reta PQ na reta P_1Q_1 de modo que, mantendo P e Q fixos e fazendo t variar quando o ponto $R = P + t\,PQ$, e ainda sendo PQ constante, sua imagem $R_1 = P_1 + t\,P_1Q_1$.

Significa que, restrita à reta PQ, a transformação afim F se comporta como se fosse uma semelhança, pois multiplica as distâncias por um fator constante c.

Teorema: Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano Π. Uma transformação F: Π → Π é afim se, e somente se, existem constantes a, b, c, d, p, q tais que F leva cada ponto P = (x, y) do plano no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, em que

$$\begin{cases} x_1 = \quad + \quad + p \\ y_1 = \quad + \quad + q \end{cases} \quad \textbf{(1)}.$$

Demonstração: Dada a transformação afim F: Π → Π, sejam:

U = (1,0);

V = (0,1);

$F(O) = O_1 = (p, q)$;

$F(U) = U_1 = (a + p, c + q)$;

$F(V) = V_1 = (b + p, d + q)$.

Dado P = (x, y) tem-se P = O + x OU+ y OV, logo, pela definição de transformação afim, se $P_1 = F(P)$ então:

$P_1 = O + x\,OU + y\,OV$

$P_1 = (p, q) + x\,(a, c) + y\,(b, d) = (ax + by + p, cx + dy + q)$.

Portanto, as coordenadas (x_1, y_1) do ponto P_1 são dadas pelas equações **(1)**. Reciprocamente, se F: $\Pi \rightarrow \Pi$ é uma transformação que, relativamente ao sistema OXY, leva o ponto P = (x, y) no ponto $P_1 = (x_1, y_1)$, cujas coordenadas são expressas pelas equações **(1)**, então F é uma transformação afim, pois a relação $F((1 - t)\,P + t\,Q) = (1 - t)\,P_1 + t\,Q_1$ decorre imediatamente daquelas equações.

POSTO DE UMA TRANSFORMAÇÃO AFIM

Observação: A constante Δ é o determinante Δ = ad - bc da matriz, cujas colunas são (a, c) e (d, b), nessa ordem.

As transformações afim são classificadas em transformações de posto zero, um ou dois.

Diz-se que uma transformação afim tem posto zero quando transforma três pontos não colineares em um único ponto, a transformação afim de posto um transforma pontos de uma reta em pontos de uma reta totalmente distinta, ou seja, F tem posto um se, e somente se, algum dos coeficientes lineares for diferente de zero, mas o determinante Δ é igual a zero. Já a transformação de posto dois transforma pontos não colineares em pontos não colineares e o determinante Δ é diferente de zero.

O SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DO DETERMINANTE

Teorema: Seja F uma transformação afim de posto dois. Existe uma constante Δ = ad - bc tal que F transforma o triângulo ABC do plano num triângulo

$A_1B_1C_1$ e $\dfrac{\text{área}\left(A_1B_1C_1\right)}{\text{área}\left(ABC\right)} = |\Delta|$,

sendo que $|\Delta|$ é chamado determinante da transformação F.

Demonstração: Seja F: $\Pi \rightarrow \Pi$ uma transformação afim. Ao fixar um sistema de eixos ortogonais no plano Π, F transforma cada ponto P = (x, y) no ponto P = (ax + by + p, cx + dy + q). Dados os pontos: $A = (x_0, y_0)$; $B = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$.

F os transforma em:

$A_1 = (ax_0 + by_0 + p, cx_0 + dy_0 + q)$;

$B_1 = (ax_1 + by_1 + p, cx_1 + dy_1 + q)$;
$C_1 = (ax_2 + by_2 + p, cx_2 + dy_2 + q)$.

Como se sabe que as áreas dos triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ são, respectivamente, os valores absolutos dos determinantes

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) & c(x_1 - x_0) + d(y_1 - y_0) \\ a(x_2 - x_0) + b(y_2 - y_0) & c(x_2 - x_0) + d(y_2 - y_0) \end{vmatrix}$$

sendo $a = \left(\quad \right)$ e $x = \left(\quad \right)$, tem-se $\text{área}(ABC) = \frac{1}{2}|\det x|$ e

$$\text{área}(A_1B_1C_1) = \frac{1}{2}|\det a.x| = \frac{1}{2}|\det a|.|\det x|$$

Portanto, $\dfrac{\text{área}(A_1B_1C_1)}{\text{área}(ABC)} = |\det a| = |\Delta|$.

A seguir, apresenta-se um exemplo para ilustrar as propriedades do teorema.

Exemplo:

Considera-se a transformação F(x, y) = (2x, 2y), de posto dois, que leva o triângulo ABC no triângulo $A_1B_1C_1$.

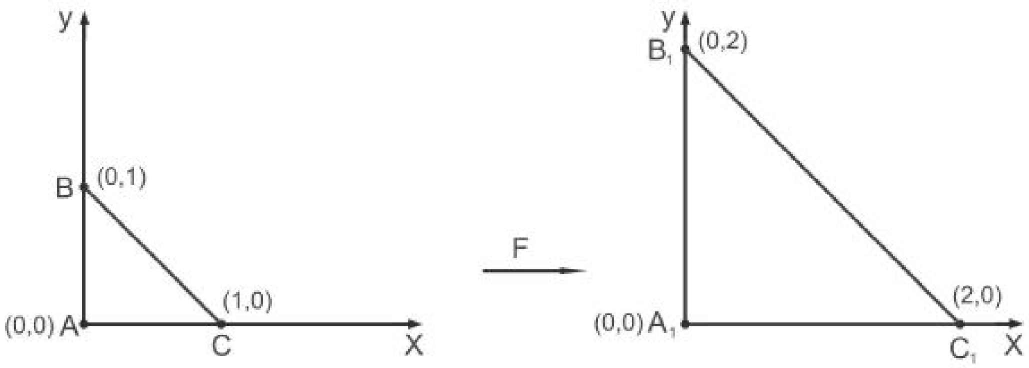

Figura 8 - Significado geométrico do determinante.

$$\frac{\text{área}(A_1B_1C_1)}{\text{área}(ABC)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \quad = |\Delta|$$

Portanto, $\dfrac{\text{área}(A_1B_1C_1)}{\text{área}(ABC)} = 4 = |\Delta|$.

CONCLUSÃO

As transformações geométricas estudadas neste trabalho possuem um amplo campo de aplicações, como na engenharia, arquitetura, geografia, arte, entre outros. A importância do estudo dessas transformações geométricas não ocorre apenas por sua aplicabilidade em outros ramos, mas também para que se possa determinar o significado geométrico do determinante, pois ele não pode ser obtido sem uma transformação afim de posto 2, a qual pode ser uma isometria. Revelando, desse modo, que o determinante de uma transformação afim de posto 2 é igual a razão entre a área da figura transformada e a área da figura original.

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano**. Rio de Janeiro: SBM/IMPA, 2002.

______. **Medida e Forma em Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

NASSER, Lílian ; TINOCO, Lucia. **Curso básico de geometria**. 3 ed. Rio de janeiro: UFRJ/IM. Projeto Fundão, 2004.