ISSN 1981-2841

ASPECTOS HISTÓRICOS E GEOMÉTRICOS DA EQUAÇÃO QUADRÁTICA[1]

HISTORICAL AND GEOMETRIC ASPECTS OF THE QUADRATIC EQUATION

Liliane Rose Refatti[2] e Eleni Bisognin[3]

RESUMO

Neste trabalho, foi feito um estudo sobre o desenvolvimento da equação quadrática, mostrando as contribuições de diferentes povos. São mostrados como os matemáticos do Egito, da antiga Babilônia, da Grécia, mais recentemente, da Índia e da Europa Medieval, interpretavam e resolviam problemas, envolvendo equações quadráticas. Foi utilizada a história da Matemática, para estabelecer comparações entre as técnicas geométricas utilizadas pelos povos antigos e as técnicas atuais de resolução de equações quadráticas. Este trabalho foi desenvolvido por meio de uma pesquisa bibliográfica para mostrar as necessidades, os problemas que motivaram o estudo das equações quadráticas e as contribuições das diferentes culturas nas diferentes épocas, mostrando que é possível buscar na história da Matemática um suporte para estudar Matemática, analisando a evolução histórica do conceito e a contribuição de cada povo.

Palavras-chave: equação quadrática, história da matemática, ensino de matemática.

ABSTRACT

His work it was made a study on the development of the quadratic equation, showing the contributions of different people. They are shown as the mathematicians of Egypt, of old Babylon, of Greece, more recently of India and of Medieval Europe, they interpreted and they solved problems, involving quadratic equations. The History of the Mathematics was used, to establish comparisons among the geometric techniques used by the old people and the current techniques of resolution of quadratic equations. This work was developed through a bibliographical research to show the needs, the problems that

[1] Trabalho Final de Graduação - TFG.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática – Licenciatura Plena - UNIFRA.
[3] Orientadora - UNIFRA.

motivated the study of the quadratic equations and the contributions of the different cultures in the different times, showing that it is possible to look for in the History of the Mathematics a support to study mathematics, analyzing the historical evolution of the concept and the contribution of each people.

Keywords: *quadratic equation, history of the mathematics, teaching of mathematics*

INTRODUÇÃO

A história da Matemática é uma importante área de estudos para o estudante de Matemática, pois, por meio dela, pode-se compreender a origem das idéias que deram forma à nossa cultura, ao conhecimento atual, aos problemas e em que circunstâncias eles se desenvolveram.

De acordo com Boyer (1974) e Pitombeira (2004), o conceito de equação quadrática estudado no ensino fundamental tem sua origem na antiguidade. Encontram-se registros de matemáticos do Egito, da antiga Babilônia, da Grécia, da Índia, da Arábia e da Europa Medieval sobre problemas referentes a esse tema.

Apesar da ênfase no enfoque puramente algébrico e simbólico destacados na solução de uma equação quadrática no ensino atual, suas origens revelam um grande conhecimento de técnicas geométricas.

O propósito neste trabalho é a analise das técnicas geométricas utilizadas pelos diferentes povos para resolução de equações quadráticas e destaque a importância do resgate histórico do aspecto geométrico no estudo desse conceito matemático.

DESENVOLVIMENTO

O nome de Bhãskara dado à resolução da equação do segundo grau estabeleceu-se, no Brasil, por volta de 1960. Essa equação é tratada em outros países como fórmula geral para resolução da equação polinomial do segundo grau, estratégia essa conhecida hámais de quatro mil anos pelos babilônicos.

As principais evidências históricas, envolvendo problemas com equações quadráticas, são encontradas em antigos manuscritos deixados por povos como o Egito, a antiga Babilônia, a Grécia, mais recentemente, a Índia, a Arábia e a Europa Medieval.

Com relação ao povo egípcio, não se tem registro sobre o tratamento da equação do segundo grau, apenas exercícios envolvendo essa equação. Devido a tal fato, historiadores acreditam que este povo dominava algumas técnicas de resolução dessa equação.

De acordo com Boyer (1974), os babilônios foram os primeiros a resolver equações quadráticas, por volta de 4000 anos a.C.. No entanto, eles não tinham nenhuma noção de "simplificação" ou de "equações", eles conheciam apenas algumas fórmulas de fatoração e desenvolveram uma aproximação algorítmica para resolver problemas envolvendo equações quadráticas.

Essa aproximação algorítmica é citada por muitos historiadores matemáticos como uma "receita matemática", a qual fornece somente uma raiz positiva, pelo fato de representar um comprimento.

Os babilônios tinham um método todo especial, sem símbolos e fórmulas, para achar dois números cuja soma e o produto são dados. Eles usavam a forma dissertativa para descrever o algoritmo, que envolvia apenas manipulações de dados. Allaire e Bradley (2001, p. 311) descreveram esse algoritmo como se mostra no quadro 1.

Quadro 1. Algoritmo Babilônico.

1	Divida a soma S pela metade.	$\frac{S}{2}$
2	O quadrado da resposta da parte 1.	$\left(\frac{S}{2}\right)^2$
3	Subtraia o produto A do resultado da parte 2.	$\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A$
4	A raiz quadrada do resultado da parte 3.	$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$
5	Acrescente a resposta do resultado da parte 4 à resposta da parte 1.	$\frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$
6	Subtraia a resposta da parte 4 da resposta da parte 1, para determinar o outro valor.	$\frac{S}{2} - \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$

Deve-se observar que, até o fim do século XVI, não se usava a notação algébrica simbólica utilizada nos dias de hoje, simplesmente porque não se usavam letras para representar determinadas medidas, mas sim, palavras.

Pitombeira (2004) revela que, em pesquisas recentes, sobre a Matemática desse povo, alguns historiadores sugerem que os escribas babilônios chegaram a esse resultado, usando raciocínio geométrico. Pesquisas arqueológicas destacam um material achado por volta de 1700 a.C., na época de Hammurabi, o qual mostra que os babilônios resolviam uma grande variedade de problemas como, por exemplo: "Se a soma de dois números é 20 e o produto é 96 quais são esses números?"

O fato de que a maioria dos problemas, envolvendo equações do segundo grau desenvolvidas por esse povo, nos quais se sabe a soma e produto de dois números desconhecidos, sugere que esses matemáticos procuravam a relação entre o perímetro e as áreas de superfícies retangulares, pois alguns babilônios imaginavam que a área de um terreno dependia somente de seu perímetro. Com isso, muitos que sabiam que não era verdade aproveitavam-se dos que nisso acreditavam.

Acredita-se que uma justificativa geométrica para o algoritmo babilônico seja, a que está descrita a seguir. Desenhe um quadrado de lado $\frac{b}{2}$ e um pequeno quadrado de lado z como na figura 1.

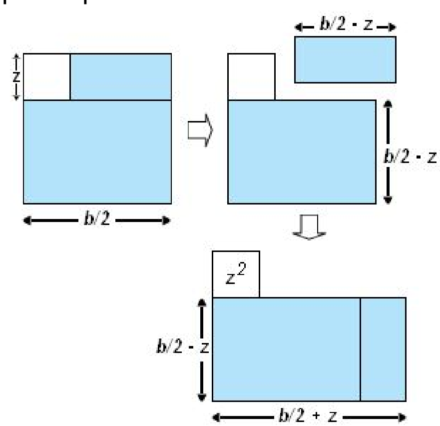

Figura 1. Justificativa geométrica do Algoritmo Babilônio.

O valor $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ excede a área desejada pela quantidade $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ que é a área do quadrado de lado z. Os retângulos restantes podem ser reajustados em um retângulo maior.

Logo, as dimensões do retângulo são $x = \frac{b}{2} + z$ e $y = \frac{b}{2} - z$, em que $z = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$, conforme foi mostrado na figura 1.

Esse processo nada mais é que a derivação da fórmula quadrática. Deve-se observar que não existe nenhum sinal negativo na frente do termo $\frac{b}{2}$, portanto, na forma padrão, a equação resolvida foi $x^2 - bx + c = 0$.

Na figura 1 representa-se, geometricamente, o procedimento da determinação de raízes, lembrando que, na formulação dos problemas babilônios, havia a ausência total de simbolismo algébrico.

Alguns séculos mais tarde, os gregos desenvolveram um tratamento geométrico para problemas matemáticos, dentre os quais, a solução de equações quadráticas. Pode-se dizer que o berço da Matemática demonstrativa ocorreu na Grécia.

Para os gregos, assim como os babilônios, a álgebra simbólica estava muito longe de ser inventada, por isso, esses matemáticos usavam construções geométricas para estudar determinadas equações. A matemática grega é diferente da Matemática babilônica, embora os gregos reconhecessem que deviam muito à Matemática egípcia e babilônica.

De acordo com Allaire e Bradley (2001), as aplicações de áreas têm origem com Pitágoras (572 – 497 a.C.) ou em sua escola.

Pitágoras é um dos mais célebres matemáticos da história da Matemática. Dentre seus descobrimentos matemáticos, destaca-se o famoso teorema geométrico, que leva o seu nome. Com relação às equações quadráticas, não existe nenhum documento sobre este tratado, mas acredita-se que Pitágoras e seus discípulos resolveram, geometricamente equações do tipo $x^2 = a \cdot b$, $x^2 + ax = b$, $x^2 = ax + b$ e $x^2 + b = ax$.

Com relação à primeira equação, $x^2 = a \cdot b$ com $a \neq b$ constrói-se um retângulo de área x^2 e lados a e b. Desse retângulo, obtém-se um quadrado de área a^2. Divida o retângulo restante ao meio e, a seguir, reajuste as figuras planas de maneira a formar um hexágono côncavo. Observa-se finalmente que a área da figura não mudou (Figura 2).

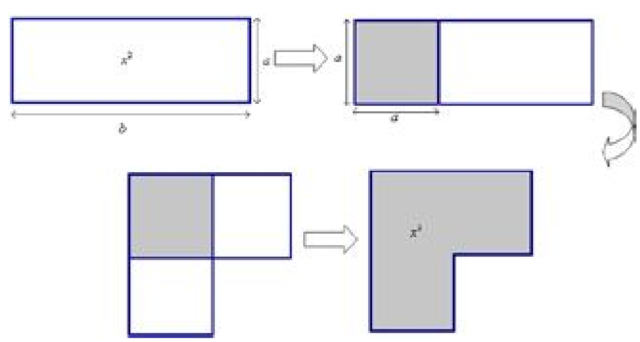

Figura 2. Construção do hexágono côncavo.

Em virtude do teorema de Pitágoras, pode-se determinar a seguinte figura (Figura 3).

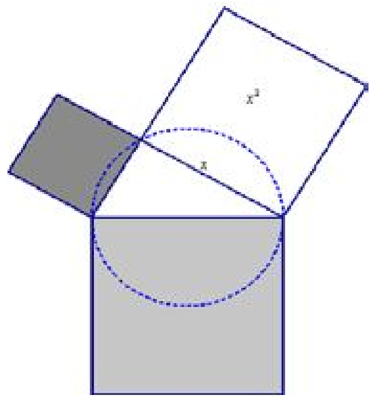

Figura 3. Representação geométrica da equação $x^2 = a \cdot b$.

Quanto à segunda equação $x^2 + ax = b$, ou seja, $x(x+a) = b$, sendo a e b valores positivos, do ponto de vista geométrico equivale a determinar as dimensões x e $x+a$ de um retângulo de área b .

Utilizando o mesmo processo, para obter um hexágono côncavo, tem-se (Figura 4):

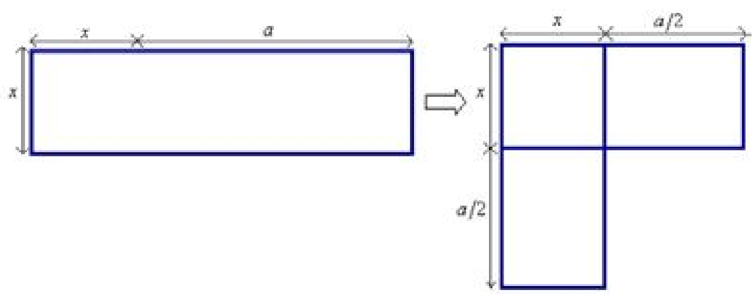

Figura 4. Representação da área do retângulo.

Logo, a área do retângulo será $b = \left[x + \frac{a}{2}\right]^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$. A resolução geométrica desta equação reduz-se a construir um triângulo retângulo de catetos $\sqrt{b}$ e $a/2$ hipotenusa $x + (a/2)$ Extraindo da hipotenusa um segmento de tamanho $a/2$ o segmento resultante é x, conforme mostrado na figura 5.

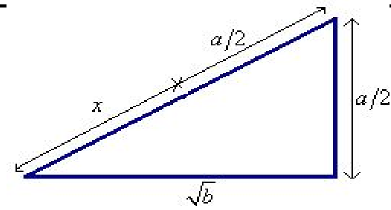

Figura 5. Representação da equação quadrática $x^2 + ax = b$ segundo os Pitagóricos.

Com relação à terceira e a quarta equação, o procedimento de resolução segue o mesmo modelo da anterior.

Dentre os grandes matemáticos que fazem parte da história da Matemática grega, destaca-se Euclides de Alexandria (~300 a.C.) como um dos mais influentes, que desenvolveu um método de aproximação geométrica, que era usado pelos matemáticos daquela época para resolverem equações quadráticas. Em seu livro "Os Elementos", Euclides mostra como resolver, geometricamente, problemas, envolvendo esse tipo de equações.

Segundo Nobre (2003), a proposição 11, do livro II, dos Elementos de Euclides, é um exemplo de como os gregos resolviam problemas que envolvessem a equação do segundo grau.

A proposição 11 do livro Elementos de Euclides é apresentada do seguinte modo:

"Dividir um segmento de reta dado de maneira que o retângulo determinado pelo todo e por uma das partes seja o quadrado construído sobre a outra parte" (AABOE, 1984, p. 77).

O problema diz para encontrar o ponto *H*, sabendo que AB é uma reta dada, em que $AB \cdot HB = AH$ (Figura 6).

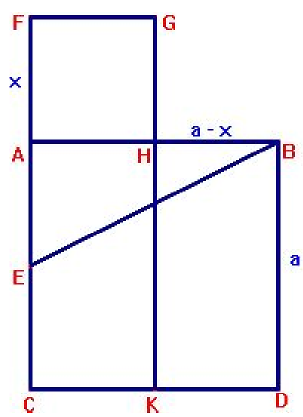

Figura 6. Resolução geométrica da equação do 2º grau.

Para que se cumpra tal fato, deve-se construir um quadrado $ABDC$ sobre o lado AB. Bisseca-se o lado AC em E e constrói-se um segmento BE. Prolongar AC até F, de modo que $EF = EB$.

Tomar um ponto H sobre o segmento AB, de modo que $AH = AF$, completar o quadrado $AFGH$ e, em seguida, prolongar GH até K, determinando-se outro retângulo $HBDK$.

Analisando a construção, tem-se:

O lado AC do quadrado $ABDC$ foi bisseccionado em E e a esse lado foi adicionado FA. O retângulo de lado FC e FA mais o quadrado do lado AE são iguais ao quadrado do lado EF, ou seja, $FC \cdot FA + (EA)^2 = (EF)^2$, tendo que $EF = EB$, utilizando o teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$FC \cdot FA + (AE)^2 = (EB)^2 = (AE)^2 + (AB)^2$$

Subtraindo AE^2, de ambos os lados, têm-se, $FC \cdot FA = AB^2$, ou seja, $(a+x)x = a^2$.

Ainda do retângulo de lado FC e FG, observando que $FG = AF$ resulta $FC \cdot FA = AB^2$. Subtraindo a figura em comum $AHKC$, obtém-se $AH^2 = HB \cdot BD$ e, como $BD = AB$, resulta $AH^2 = HB \cdot AB$ ou $x^2 = (a-x)a$.

Embora a solução geométrica para a equação quadrática tenha surgido como uma maneira de solucionar esse problema, sem a utilização dos cálculos numéricos, não significa que deva ser aceita, pois o método apresentado é de difícil compreensão. Essa façanha não significa que eles conquistaram o processo mais simples de resolução desse problema.

Outro povo que contribuiu para encontrar a resolução de uma equação do segundo grau foi o povo hindu. Este povo teve um papel fundamental na resolução da equação quadrática, como a introdução de números negativos no coeficiente desta equação e a utilização do zero como elemento de cálculo, até então não trabalhado. A Matemática hindu era feita a partir de problemas reais e cobrada de forma poética. A contribuição hindu para a história da Matemática tem como personagens Ãryabhata, Brahmagupta, Bhãskara I, e Bhãskara II.

Ãryabhata (476-550), também conhecido por Ãryabhata I, foi matemático e também astrônomo, escreveu, no ano de 499, seu tratado Ãryabhatiya que contém 118 versos divididos em quatro partes. Dentre os problemas propostos por Ãryabhata, alguns envolvem equações do segundo grau, porém não fornecem fórmula para tais resoluções.

Outro importante matemático hindu foi Brahmagupta (~598-665?). Ele elaborou um estudo sobre equações do segundo grau mais completo do que Ãryabhata e foi o primeiro matemático a utilizar os números negativos e o zero como um elemento de cálculo. Sobre a equação quadrática, Brahmagupta estudou a fórmula escrita, atualmente conhecida como $ax^2 + bx = c$.

Nobre (2003) cita a solução dada por esse matemático hindu, da seguinte forma (quadro 2):

Quadro 2. Solução da equação quadrática dada por Brahmagupta.

1	À soma multiplicada pelo coeficiente do quadrado, você adiciona o quadrado da metade do coeficiente da incógnita;	$a.c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$
2	Extrai-se a raiz quadrada;	$\sqrt{a.c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$
3	Em seguida, subtraí-se a metade do coeficiente da incógnita;	$\sqrt{a.c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}$
4	A seguir, divida pelo coeficiente do quadrado;	$\frac{\sqrt{a.c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}$
5	Desenvolvendo a equação acima se tem:	$x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$

Alguns anos depois, um aluno de Brahmagupta, conhecido, historicamente, como Bhãskara I (séc. VI), realizou estudos sobre a obra de Ãryabhata e reescreveu de forma descritiva os versos nela contidos.

No século XII, surge, na Índia, um matemático conhecido historicamente como Bhãskara II (1114 – 1191?). Esse matemático conseguiu grandes feitos para a resolução da equação quadrática.

Bhãskara II dedicou-se a estudar Astronomia e Matemática, escreveu suas principais obras Lilavati (A Bela) sobre aritmética e Bijaganita sobre Álgebra e resolveu equações do tipo $ax^2+bx=c$, utilizando o método de "completar quadrados".

Na Índia, tem-se ainda a contribuição do matemático Sridhara (?850 – 950? d.C.), supostamente considerado como o responsável pela determinação da regra que originou a fórmula atual para a resolução de equações quadráticas.

No mundo árabe, destaca-se Muhammad ibn-Musã al-Khwãrizmi (780-850 d.C.), o qual tinha uma pequena ligação com o povo hindu.

Atribui-se a esse, ser o primeiro matemático muçulmano a escrever um livro sobre Álgebra. Esta obra foi registrada como O Cálculo de al-Jabr e al-Muqabala. Nesse livro, al-Khwãrizmi resolve a equação polinomial do segundo grau, dá explicações detalhadas sobre a resolução, além de demonstrá-la geometricamente, utilizando o método de completar quadrados, o qual é diferente daquele utilizado pelos gregos.

Por essa obra, ficou conhecido na Europa Ocidental o termo álgebra, um novo ramo da Matemática. A álgebra de al-Khwãrizmi era expressa em palavras e não em símbolos, até mesmo os números.

Os matemáticos islâmicos desse tempo não aceitavam números negativos como raízes ou coeficientes da equação, assim al-Khwãrizmi utilizou seis casos de equações citados por Nobre (2003, p. 17).

1. Quadrados iguais a raízes $ax^2 = bx$
2. Quadrados iguais a números $ax^2 = c$
3. Raízes iguais aos números $bx = c$
4. Quadrados mais raízes iguais a número $ax^2 + bx = c$
5. Quadrado mais números iguais a raízes $ax^2 + c = bx$
6. Raízes mais números iguais a quadrado $bx + c = ax^2$

Devido ao fato de que esses matemáticos não utilizavam a numeração negativa, as equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ não faziam sentido para eles. Para os três primeiros casos, a solução é direta, o zero não era considerado como solução para as equações do primeiro tipo.

Al-Khwãrizmi trabalhou com as outras três equações, utilizando os exemplos $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$ e $3x + 4 = x^2$, respectivamente. Após a resolução das equações, elas eram demonstradas geometricamente como justificativas da exatidão da regra apresentada em números. Deve-se lembrar que a apresentação do problema e da solução era descritiva.

Quanto à resolução de equações do tipo $bx + c = ax^2$, al-Khwãrizmi utilizou, em sua obra, o seguinte exemplo: “Um quadrado mais dez raízes do mesmo é igual a trinta e nove. Qual é o quadrado?” (Nobre, 2003).

A solução desse problema sugerido por al-Khwãrizmi foi:

Tome a metade do número de raízes, que é igual a cinco, esse número é multiplicado por ele mesmo, obtendo-se vinte e cinco. Some a este produto mais trinta e nove, encontra-se sessenta e quatro, do qual, ao extrair a raiz quadrada, tem-se oito como resposta, então, retira-se disso a metade do número de raízes. O resultado obtido será três.

Transcrevendo-se para a álgebra moderna, pode-se dizer que o algoritmo utilizado foi:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

A justificativa geométrica para esse problema, segundo Nobre (2003, p. 18), é a seguinte (Figura 7).

Considerando a equação $x^2 + 10x = 39$ sendo , $b = 10$ tome um quadrado de lado x , consequentemente, a área é x^2 . Some a esse quadrado dois retângulos, tendo um lado $b/2$ e outro x, com isso, $x^2 + 10x$ quer dizer a área dos dois retângulos mais a área do quadrado menor. Como $x^2 + 10x = 39$ e a área do quadrado médio é

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$$

consequentemente, a medida do lado desse quadrado é 5.

Somando-se 25 á área do quadrado original, tem-se a área do quadrado maior $39 + 25 = 64$, podendo dizer-se então $x^2 + 10x + 25 = 64$. O lado do quadrado maior é $(x+5)^2 = 64$, com isso, tem-se $x = 3$.

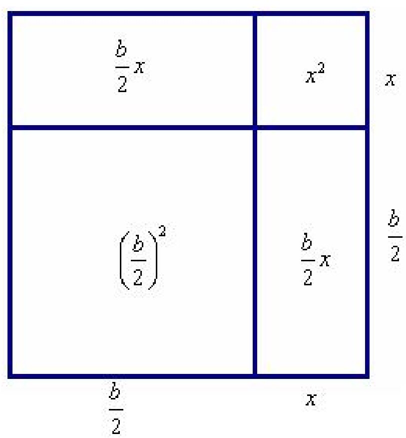

Figura 7. Justificativa geométrica da solução da equação $bx + c = ax^2$.

A contribuição de al-Khwãrizmi, como a de muitos matemáticos de diversas épocas, não conseguiu expressar as equações totalmente em símbolos, mas ficou a evidência de que os árabes inspiravam-se nos matemáticos gregos. Apesar de algumas demonstrações geométricas apresentarem alguns detalhes diferentes das dos gregos.

Pode-se dizer que os árabes forneceram os estilos algorítmico e demonstrativo da equação polinomial do segundo grau. Esses estilos são mais simples de se compreenderem do que os propostos pelos gregos.

A Matemática, na Europa, começou a fortalecer-se com a chegada da Matemática islâmica por meio das Escolas de Tradução. Destacam-se os principais textos escritos por al-Khwãrizmi, os quais foram traduzidos do árabe para latim.

O principal matemático da Europa feudal foi Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170?-1250?), um comerciante italiano, que viajava muito e conhecia a língua árabe.

Fibonacci destaca-se por ser um dos principais matemáticos desse período, através de sua obra Líber Abbaci, que foi um dos marcos do avanço da Matemática européia. Nessa obra, Fibonacci introduziu, no mundo europeu, o sistema de numeração hindu-arábico, a utilização do número zero como raiz de equações, o método de cálculo com inteiros e frações, o cálculo de raízes quadrada e cúbica e a resolução de equações lineares e quadráticas, tanto pelo método de falsa posição, como por processos algébricos.

Mais tarde, na Europa renascentista, surge o francês François Viéte (1540 – 1603), que era advogado e, nas horas de lazer, dedicava-se à Matemática. Viéte fez grandes contribuições para diversas áreas da Matemática, mas sem dúvida, foi na Álgebra sua principal contribuição. Pode-se dizer que foi a partir desse grande matemático que surgiu a Álgebra simbólica.

Viéte introduzia uma vogal para representar uma quantidade desconhecida e uma consoante para uma grandeza ou número supostamente conhecido e foi utilizando esse fato para as funções quadráticas, que elaborou a fórmula geral até hoje conhecida como $ax^2 + bx + c = 0$.

O método de Viéte para a resolução da equação do segundo grau é:

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, faz-se $x = u + v$, sendo u e v incógnitas auxiliares, tem-se:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0$$
$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c = 0$$
$$av^2 + (2au+b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Ao reescrever essa igualdade como uma equação na incógnita v, tem-se

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0 \tag{1}$$

Acham-se os valores de u, anulando o coeficiente de v , e escolhendo $u = -\dfrac{b}{2a}$. Ao substituir este valor de u na equação (1), obtém-se

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0, \tag{2}$$

manipulando o resultado da equação (2), encontra-se $v^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então, $v = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Entretanto, se $x = u + v$ resulta $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a qual é a expressão conhecida para determinar a raiz.

No século XVII, destaca-se a contribuição de René Descartes (1596 – 1650). Em seu livro, La Géométrie, Descartes descreveu um método geométrico para a resolução da equação quadrática.

O método geométrico, descrito por esse famoso matemático em seu livro, é semelhante ao que os gregos usavam. Descartes resolveu equações do tipo $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$ sempre com b e c positivos.

A resolução da equação $x^2 = bx + c^2$ é do seguinte modo:

1. Traçar um segmento $\overline{AB}$ de comprimento $\sqrt{c}$.
2. Levantar em A uma perpendicular a $\overline{AB}$ e nesta perpendicular toma-se um ponto C sendo $\overline{AC} = \dfrac{b}{2}$.
3. Construir uma circunferência de centro C e raio $\overline{AC}$.
4. Construir uma reta, passar por B e C, cruzando a circunferência nos pontos E e D, com $BE = x$.

Geometricamente, tem-se (Figura 8):

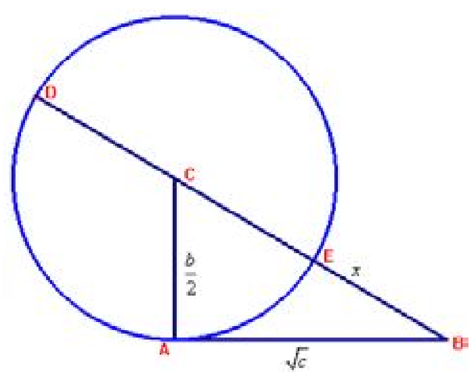

Figura 8. A construção de Descartes.

Pelo teorema de Pitágoras, pode-se encontrar o valor de x em $BE = x$. Considerando o triângulo retângulo ABC, tem-se:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

ou, $\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+(\sqrt{c}\,)^2$

então, $x^2+bx+\dfrac{b^2}{4}=\dfrac{b^2}{4}+c$

e $x^2+bx=c$.

O método utilizado por Descartes não usa coordenadas cartesianas, porém o método desenvolvido por Thomas Carlyle (1775-1881) as utiliza. Esse método de resolver a equação do tipo $x^2+bx+c=0$, para b e c pertencentes aos reais é representado, graficamente, como na figura 9.

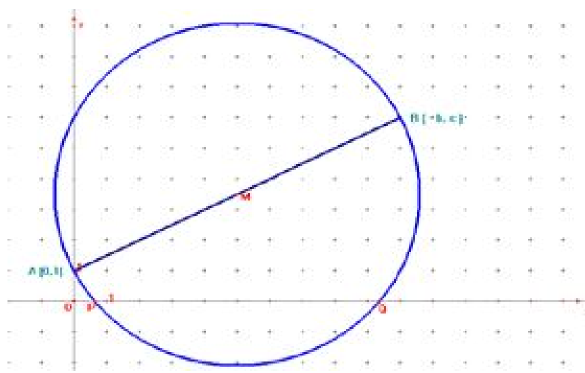

Figura 9. Método de Carlyle.

1. Com um papel quadriculado, determine os pontos $A(0,1)$ e $B(-b,c)$.
2. Bifurque $\overline{AB}$ em M.
3. Construa uma circunferência com centro em M e raio $\overline{AM}$
4. P e Q são os pontos em que a circunferência cruza o eixo-x.

Os comprimentos $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ representam as raizes da equação.

Ao escolher valores diferentes para $(-b,c)$, podem-se encontrar outros exemplos cuja circunferência cortará o eixo-x em dois pontos distintos, tangenciando em certo ponto ou não. Isso ocorrerá quando o raio é respectivamente maior, igual ou menor que a distância entre o centro da circunferência e o eixo-x $\dfrac{|c-1|}{2}$.

Uma justificativa do método de Carlyle, fornecida por Allaire e Bradley (2001, p. 313), pode ajudar a compreender melhor esse método.

Se r é o raio da circunferência, na figura 9, então $r = \frac{AB}{2}$.

Para saber o valor de r, basta calcular a distância entre dois pontos *A* (0 , 1) e *B* (-b , c), obtendo-se

$$r = \frac{\sqrt{b^2 - (c-1)^2}}{2}.$$

O ponto médio do segmento $\overline{AB}$, $\left(-\frac{b}{2}, \frac{c+1}{2}\right) = M$, é o centro da circunferência.

O termo $b^2 - 4ac$ é denominado discriminante, ou seja, é o termo que discrimina a quantidade de raízes de uma equação quadrática.

Se $(x, 0)$ é o ponto pertencente a essa circunferência, e sendo o raio igual a M, então:

$$\left(x - \frac{-b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c+1}{2}\right)^2 = r^2,$$

ou $$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2}{4}$$

Tem-se $$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2 - (c+1)^2}{4}$$

ou $$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c$$

portanto $$x^2 + bx + c = 0$$

Observa-se que recai em uma equação quadrática que, ao se fazerem variar os valores de b e c, pode-se analisar a relação que tem os coeficientes e o número de soluções.

Quando se estuda equação polinomial do segundo grau, geralmente, utiliza-se a representação européia e a forma de resolução dada pelos hindus. Nesse estudo sobre a origem da equação quadrática, observou-se a preocupação que os matemáticos de diferentes épocas tiveram ao tentar solucionar esse problema. Assim, esta história pode ser considerada um valioso instrumento para o ensino/aprendizado da própria Matemática.

CONCLUSÕES

Ao conhecer um pouco da história da Matemática, percebe-se que as teorias que aparecem hoje, de forma compreensível e fácil, são resultados de desafios enfrentados por matemáticos e foram desenvolvidos com grande esforço.

Foi possível observar que os babilônios, em se tratando de equações quadráticas, tinham soluções puramente algébricas para resolverem problemas desse tipo, o estilo para encontrar a solução era algorítmico. Enquanto os gregos tiveram soluções geométricas, porém complexas e de difícil compreensão. Uma justificativa para esse fato era que os gregos não tinham um sistema de numeração bem definido.

Já os árabes apresentaram uma abordagem diferente para o tratamento de soluções de equações quadráticas, ampliando os horizontes entre a Álgebra e a Geometria. Esses matemáticos revelaram-se hábeis em articular a abordagem geométrica utilizada pelos gregos e a abordagem algébrica empregada pelos babilônios. Deve-se aos árabes tal audácia de demonstrar algebricamente e, logo em seguida, geometricamente, a resolução da equação polinomial do segundo grau.

Aos europeus coube a parte de aprimorar essa técnica, fornecida pelos árabes, desenvolver a álgebra simbólica, até então totalmente descritiva e utilizar os números negativos como possíveis raízes de uma equação quadrática, fato esse que não era considerado pelos outros povos.

Por meio deste estudo conclui-se que é possível utilizar a história da Matemática para estudar Matemática, e em particular, a equação quadrática, ao focalizar focalizando o aspecto geométrico e analisando a evolução histórica do conceito e a contribuição de cada povo, em diferentes épocas.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. Tradução do inglês para português de João Bosco Pitombeira de Carvalho. SBM: Coleção Fundamental da Matemática Elementar, 1984.

ALLAIRE, Patrícia R; BRADLEY, Robert E. Geometric approaches to quadratic equations from other times and places. **Mathematic Teacher**, v. 94, n. 4, p. 308-313, 2001.

BOYER, Carl. B. **História da matemática**. Tradução do inglês para o português de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1974.

LIMA, Elon L; CARVALHO Paulo Cezar P; MORGADO, Augusto C, et al. **Funções quadráticas**. 3. ed., Rio de Janeiro: Coleção Professor de Matemática, 2001.

PITOMBEIRA, João Bosco. **Revisitando uma velha conhecida**. Departamento de Matemática, PUC-Rio, p. 1- 41, 2004.

NOBRE, Sergio. **História da resolução da equação de 2º grau**: uma abordagem pedagógica. Coleção histórica da matemática para professores. ed. Rio Claro, SP: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003.