ISSN 1519-0625

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS E CABOS PENDENTES[1]

HYPERBOLIC FUNCTIONS AND PENDANT CABLES

Liliane Refatti[2] e Ana Maria Beltrame[3]

RESUMO

Neste trabalho, teve-se como objetivos apresentar as funções hiperbólicas, verificando sua semelhança com as funções trigonométricas circulares, bem como determinar a forma exata da curva assumida por um cabo homogêneo flexível, de densidade uniforme, suspenso pelas duas extremidades, sob a ação de seu próprio peso.

Palavras-chave: cabo flexível, catenária.

ABSTRACT

This work aimed to present hyperbolic functions checking their likeness with circular trigonometric functions, as well as to determine the exact shape of the curve taken by a flexible homogeneous cable, of uniform density, suspended by its extremities under the action of its own weigh.

Keywords: *flexible cable, catenary.*

INTRODUÇÃO

Este trabalho é o resultado do estudo de certas combinações das funções e^x e e^{-x}, chamadas funções hiperbólicas. Essas funções, as quais aparecem em várias aplicações em Engenharia, têm muitas propriedades em comum com as funções trigonométricas. Tal similaridade é algo surpreendente, uma vez que há muito pouco no aspecto exterior que sugira qualquer relação entre exponenciais e funções trigonométricas. Isso se deve ao fato de as relações ocorrerem dentro do contexto dos números complexos.

As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios, dentro de sólidos elásticos e, mais genericamente, em muitos problemas, nos

[1] Trabalho de Iniciação Científica – PROADIS.
[2] Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática – UNIFRA.
[3] Orientadora – UNIFRA.

quais a energia mecânica é, gradualmente, absorvida pelo meio ambiente. Também ocorrem, quando um cabo flexível e homogêneo, é suspenso entre dois pontos.

No presente trabalho, a finalidade é determinar-se a forma exata da curva assumida por uma corda flexível, de densidade uniforme que é suspensa entre dois pontos, curva essa que é chamada catenária.

Convém lembrar da contribuição de Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) à Matemática. Ele fez para as funções hiperbólicas o que Euler fizera para as circulares, fornecendo conceito e notação modernos. Comparações entre as ordenadas do círculo $x^2 + y^2 = 1$ e da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ tinham fascinado os matemáticos por um século, e por volta de 1757, Vicenzo Piccati, um italiano, sugeriu o desenvolvimento das funções hiperbólicas. Coube a Lambert introduzir as notações *senh x*, *cosh x* e *tgh x* para os equivalentes hiperbólicos das funções circulares da trigonometria e popularizar a muito útil trigonometria hiperbólica.

DESENVOLVIMENTO

As expressões exponenciais $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ocorrem, frequentemente, na Matemática Aplicada e na Engenharia. Essas expressões definem, respectivamente, as funções seno hiperbólico de x e cosseno hiperbólico de x.

O comportamento dessas funções sugere uma analogia com as funções trigonométricas.

A função seno hiperbólico, denotada por senh, e a função cosseno hiperbólico, denotada por cosh, são definidas, respectivamente, por:

$$senh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad cos h \ \ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dessas duas funções, podem-se criar mais quatro e obter o seguinte conjunto de funções hiperbólicas:

Tangente hiperbólica: $$tgh \ \ x = \frac{sen h \ \ x}{cos h \ \ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cotangente hiperbólica: $$cotg\, h \ \ x = \frac{cos h \ \ x}{sen h \ \ x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Secante hiperbólica: $sech\ x = \dfrac{1}{cosh\ x} = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

Cossecante hiperbólica: $cossech\ x = \dfrac{1}{senh\ x} = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

O gráfico da função *senh*, pode ser obtido pelo método chamado adição de ordenadas. Para usar essa técnica, esboçam-se, separadamente, os gráficos de $y = \frac{1}{2}e^{x}$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$, e somam-se as coordenadas *y* correspondentes (figura 1). A função seno hiperbólico é contínua e crescente para todo *x*.

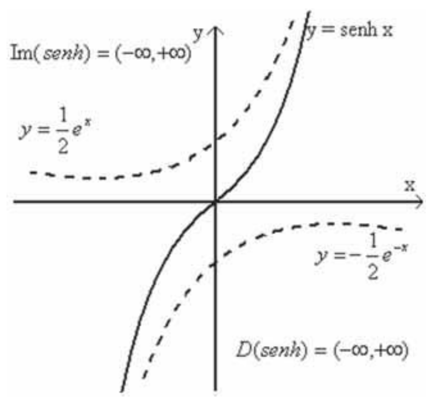

Figura 1. Representação gráfica da função seno.

De forma análoga, o gráfico da função *cosh* pode ser obtido, ao se esboçarem separadamente os gráficos de $y = \frac{1}{2}e^{x}$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$, e ao se somarem as coordenadas *y* correspondentes, figura 2.

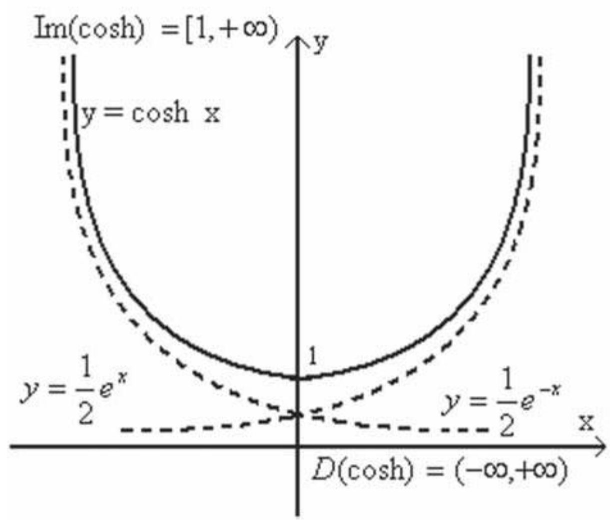

Figura 2. Representação gráfica da função cosh.

Observe que $y = \frac{1}{2}e^{x}$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ são assíntotas curvilíneas de *y=cosh x*, pois o gráfico desta função fica cada vez mais próximo do gráfico de $y = \frac{1}{2}e^{x}$, quando $x \to +\infty$, e cada vez mais próximo de $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$, quando $x \to -\infty$. Da mesma forma, $y = \frac{1}{2}e^{x}$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ são assíntotas curvilíneas para *y = senh x*, quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, respectivamente.

A função cosseno hiperbólico pode ser usada para descrever a forma de um cabo ou corrente flexível, uniforme, cujas extremidades estão fixas a uma mesma altura. A forma do fio parece sugerir uma parábola, mas é, na realidade, uma catenária (da palavra latina catena, cadeia).

Muitas coisas que parecem perfeitamente direitas são, na realidade, catenárias. Esticando-se um fio, o que se vê é uma linha reta? Não! Continua a ser uma catenária, porque, para se obter uma linha reta, precisa-se puxar pelas extremidades do fio com uma força infinita (e o fio partir-se-ia muito antes disso). Mesmo no espaço vazio, onde não existem campos gravitacionais, isso seria impossível, porque o campo gravitacional da massa corporal de quem as estica as estende de forma infinita no espaço. Embora o fio esticado se assemelhe a uma linha reta, na realidade, é uma catenária que se curva lentamente. Considere as pontes em aço, as cordas de um violino, as cordas de roupas (desde que não haja roupas penduradas), os fios das teias de pequenas aranhas, tudo o que seja comprido, fino, flexível e esteja suspenso em dois pontos, é a descrição de catenária, figura 3.

Figura 3. Teia de uma aranha (fonte: www.saberweg.com.br).

As analogias marcantes entre as funções seno e cosseno trigonométricas e hiperbólicas motivam a definir outras funções hiperbólicas que correspondam às restantes funções trigonométricas. Definem-se, como segue, as funções (Figuras 4, 5, 6 e 7):

Tangente hiperbólica: $tg\,h\ \ x = \dfrac{sen\,h\ \ x}{cos\,h\ \ x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

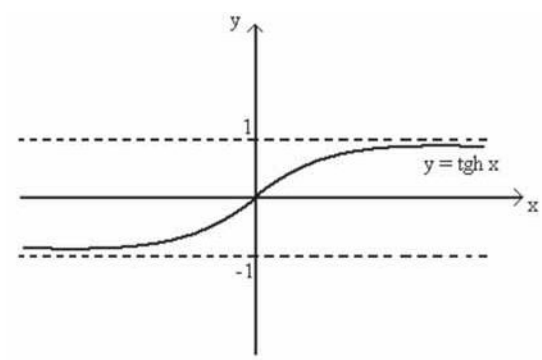

Figura 4. Representação gráfica da tangente hiperbólica.

Cotangente hiperbólica: $cotg\,h\ \ x = \dfrac{cos\,h\ \ x}{sen\,h\ \ x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

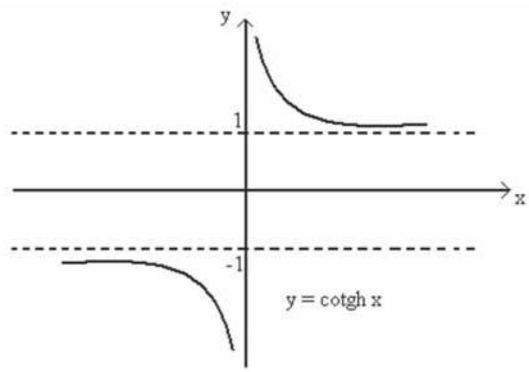

Figura 5. Representação gráfica cotangente hiperbólica.

Cossecante hiperbólica: $cossech\ x = \dfrac{1}{senh\ x} = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

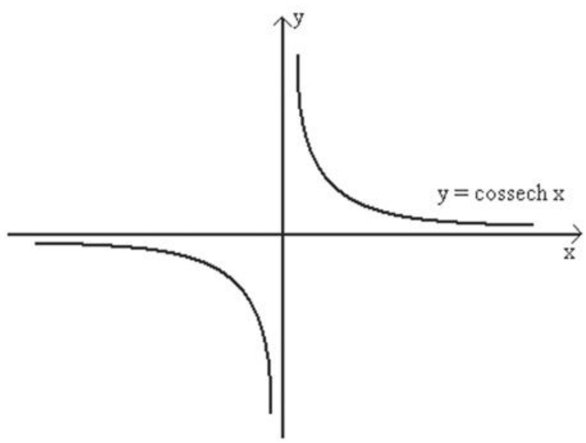

Figura 6. Representação gráfica cossecante hiperbólica.

Secante hiperbólica: $sech\ x = \dfrac{1}{cosh\ x} = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

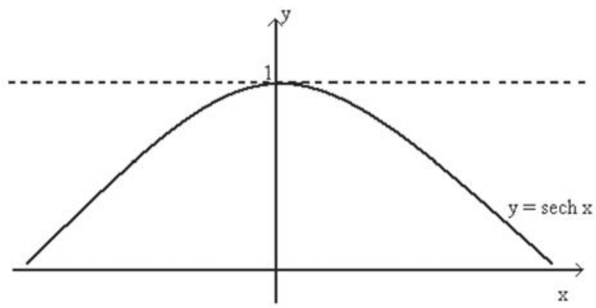

Figura 7. Representação gráfica secante hiperbólica.

As funções hiperbólicas satisfazem várias identidades similares àquelas das funções trigonométricas. A mais fundamental delas é $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ que pode ser provada, escrevendo-se:

$$\cos h^2 x - \operatorname{sen} h^2 x = \left(\quad + \quad \right)^{\wedge} \left(\quad - \quad \right)$$

$$= \left(\quad + \quad + \quad \right) \left(\quad - \quad + \quad \right) = 1$$

(Identidade Fundamental)

Outras identidades hiperbólicas podem ser introduzidas, analogamente ou alternativamente, executando operações algébricas nas identidades conhecidas. Para verificar uma identidade, basta expressar as funções hiperbólicas em termos de exponenciais e mostrar que um membro da equação pode ser transformado no outro. Demonstração de algumas identidades hiperbólicas mais úteis:

- $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$

$$\cos h \; x + \operatorname{sen} h \; x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}\right) = e^x$$

- $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

$$\cos h \; x - \operatorname{senh} \; x = \left(\quad + \quad \right) \left(\quad - \quad \right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}\right) = e^{-x}$$

- $1 - tgh^2 x = sech^2 x$ (divide-se a identidade fundamental por $\cosh^2 x$)

$$1 - tg\,h^2\ x = 1 - \left(\qquad \right)^2 = \frac{\cos h^2\ x - sen\,h^2\ x}{\cos h^2\ x} = \frac{1}{\cos h^2\ x} = sec\,h^2\ x$$

- *cotgh² x – 1 = cossech² x* (divide-se a identidade fundamental por *senh² x*)

$$cotg\,h^2\ x - 1 = \left(\qquad \right)^2 - 1 = \frac{\cos h^2\ x - sen\,h^2\ x}{sen\,h^2\ x} = \frac{1}{sen\,h^2\ x} = cossec\,h^2\ x$$

- *cosh (-x) = cosh x*, (por esta identidade nota-se que cosseno hiperbólico é uma função par).

$$\cos h(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cos h\ x$$

- *senh (-x) = - senh x*, (por esta identidade nota-se que seno hiperbólico é uma função ímpar).

$$sen\,h(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sen\,h\ x$$

- *senh (x + y) = senh x . cosh y + cosh x . senh y*

Sabendo que *cosh x + senh x =* e^{x} e *cosh x – senh x =* e^{-x} então:

$$sen\,h(x + \quad) = \qquad + \cos h\ x\ sen\,h\ \ y$$

Demonstram-se, analogamente, as fórmulas:

- *cosh (x + y) = cosh x . cosh y + senh x . senh y*
- *senh (x - y) = senh x . cosh y – cosh x . senh y*
- *cosh (x – y)=cosh x . cosh y – senh x . senh y*
- *senh 2x = 2senh x . cosh x*
- *cosh 2x = cosh² x + senh² x*
- *cosh 2x = 2.senh² x + 1*
- *cosh 2x = 2.cosh² x – 1*

Essas identidades são análogas às identidades trigonométricas circulares (mas nem sempre) e podem ser usada para justificar o adjetivo hiperbólico nas definições.

De fato, a identidade $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ mostra que o ponto P de coordenadas ($\cosh x$, $\operatorname{senh} x$) está sobre a hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$.

Ao fazer x variar no conjunto dos reais, o ponto P descreve o ramo direito da hipérbole (analogamente, o lado esquerdo). Observe que aqui a variável real x não representa um ângulo, como acontece nas funções trigonométricas. No entanto, pode-se estabelecer uma relação interessante, que fornece uma interpretação geométrica para o parâmetro x.

Na figura 8, representamos o círculo unitário, em que demarcamos um ponto P *(cos t, sen t).* A área do setor circular BÔP é dada por $A_c = 1/2.t.(1)^2 = 1/2.t$ e, portanto, $t = 2A_c$.

Uma relação análoga a essa, é válida para as funções hiperbólicas. De fato, é possível mostrar que a área A_H, do setor hiperbólico BÔP, da figura 9, é dada por $A_H = 1/2.x$ e, dessa forma, $x = 2A_H$.

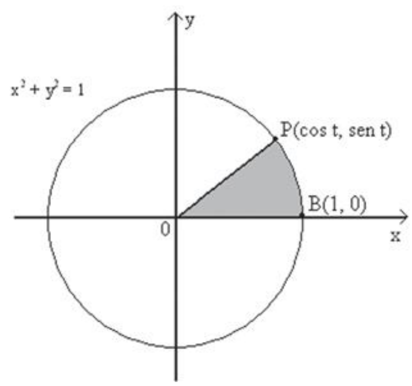

Figura 8. Representação gráfica do círculo.

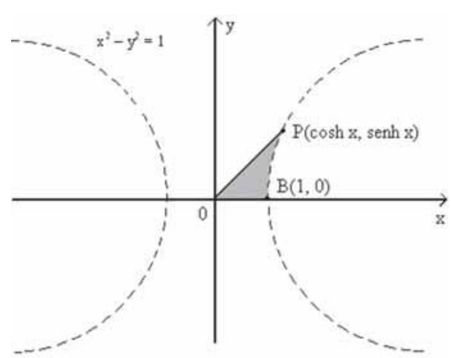

Figura 9. Representação gráfica de uma curva

chamada de hipérbole unitária.

As fórmulas para derivadas do *senh x* e *cosh x* podem ser obtidas, expressando-se essas funções em termos de e^x e e^{-x}, isto é:

$$\frac{d}{dx}[senh\ \ x] = \frac{d}{dx}\left[\qquad - \qquad\right] = \frac{e\ \ + e^{-x}}{2} = coshx$$

$$\frac{d}{dx}[cosh\ \ x] = \frac{d}{dx}\left[\qquad + \qquad\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\ \ x$$

As demais funções hiperbólicas são derivadas, usando-se suas relações fundamentais, ou seja:

$$\frac{d}{dx}[tgh\ \ x] = \frac{d}{dx}\left[\qquad\qquad\right] = \frac{cosh^2\ \ x - senh^2\ \ x}{cosh^2\ \ x} = \frac{1}{cosh^2\ \ x} = sech^2 x$$

Analogamente :

$$\frac{d}{dx}[coth\ \ x] = -cossech^2\ \ x$$

$$\frac{d}{dx}[sech\ \ x] = -sech\ \ x \cdot tgh\ \ x$$

$$\frac{d}{dx}[cossech\ \ x] = -cossech\ \ x \cdot cotgh\ \ x$$

Com o uso do conceito de primitiva, verificam-se as integrais das funções hiperbólicas:

$$\int senh\ \ x\ \ dx = cosh\ \ x + c$$

$$\int cosh\ \ x\ \ dx = senh\ \ x + c$$

$$\int tgh\ \ x\ \ dx = ln(cosh\ \ x) + c$$

$$\int coth\ \ x\ \ dx = ln(senh\ \ x) + c$$

$$\int \qquad \int (1 - tgh^2 x)\, dx = tgh\ \ x + c$$

$$\int cossec\,h^2 x\ \ dx = -coth\ \ x + c$$

$$\int sech\ \ x \cdot tgh\ \ x\ \ dx = -sech\ \ x + c$$

$$\int cossech\ \ x.cotgh\ \ \ x\ \ \ dx = -cossech\ \ x + c$$

É evidente que os gráficos de *senh x*, *tgh x*, *cotgh x* e *cossech x* passam pelo teste da reta horizontal, mas os gráficos de *cosh x* e *sech x* não passam. No último caso, restringir *x* como não-negativo torna as funções invertíveis. Os gráficos das seis funções hiperbólicas inversas seguintes foram obtidos por reflexão em torno da reta $y = x$ (com restrições apropriadas).

Função inversa do seno hiperbólico: ao analisar o gráfico da função $y = senh\ x$, vê-se que cada valor de *y,* na imagem, corresponde a um único valor de *x* no domínio. Assim, pode-se definir a sua função inversa.

A função inversa do seno hiperbólico, chamada argumento do seno hiperbólico, é denotada por *arg senh* e definida como:

$$y = arg\ senh\ \ x \iff x = senh\ y$$

Tem-se $D(arg\ senh\ x) = Im\ (arg\ senh\ x) = \Re$

O gráfico da função arg senh pode ser visto na figura 10 e ele é obtido, fazendo-se uma reflexão do gráfico da função *senh x* sobre a reta y = x.

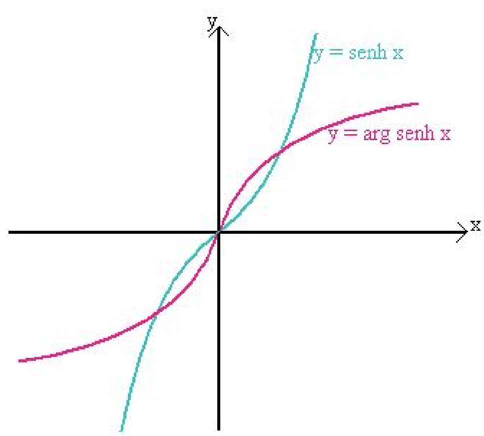

Figura 10. Representação gráfica da função inversa do seno hiperbólico

Função inversa do cosseno hiperbólico:

Para definir a inversa da função cosseno hiperbólico, precisa-se restringir o seu domínio, pois como se pode ver na figura 11, a cada valor de y na imagem, exceto y = 1, correspondem dois valores de x no domínio.

Seja *f:* $[0,+\infty)\rightarrow[1, +\infty)$, a função dada por $f(x) = \cosh x$. A sua função inversa é chamada argumento do cosseno hiperbólico e é denotada por arg cosh x. Simbolicamente, para $y \geq 0$, escreve-se.

$$y = \arg\cosh x \Leftrightarrow x = \cosh y$$

Tem-se $D(\arg\cosh x) = [1, +\infty)$ e $Im(\arg\cosh x) = [0, +\infty)$.

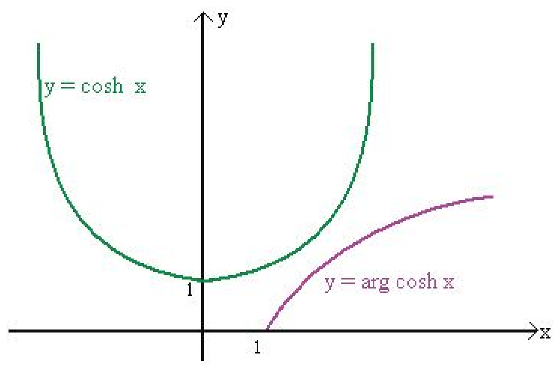

Figura 11. Representação gráfica da função inversa cosseno hiberbólico.

Inversa das funções tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica e cossecante hiperbólica:

Para definir as inversas dessas funções, não se necessita restringir os seus domínios, pois a cada valor de y, na imagem, corresponde um único valor de x no domínio.

As funções inversas da tangente hiperbólica (arg tgh x), cotangente hiperbólica (arg cotangh x) e cossecante hiperbólico (arg cossech x) são definidas nas figuras 12, 13 e 14.

$$y = \arg tgh\, x \Leftrightarrow x = tgh\, y$$

(chamado argumento do seno hiperbólico).

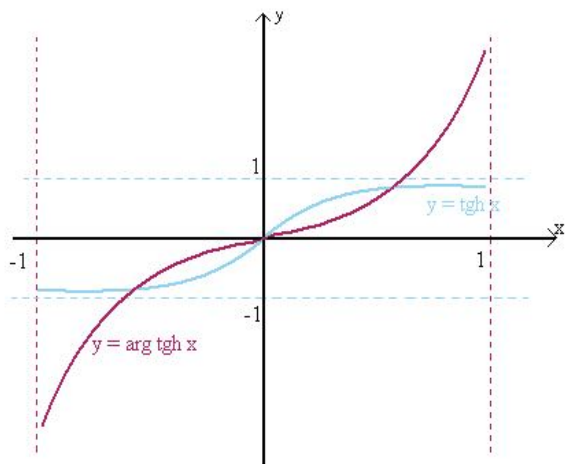

Figura 12. Representação Gráfica da função inversa da tangente hiperbólica y = arg tgh x

$$y = arg\ cotgh\ x \Leftrightarrow x = cotgh\ x$$

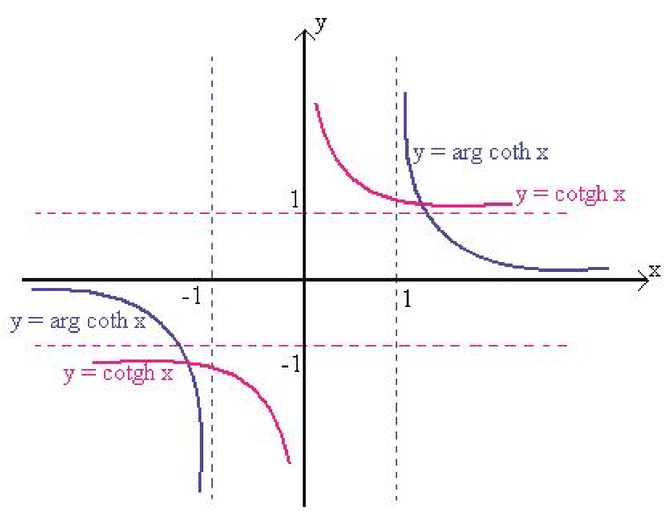

Figura 13. Representação gráfica da função inversa da cotangente hiperbólica.

$$y = arg\ cossech\ x \Leftrightarrow x = cossech\ y$$

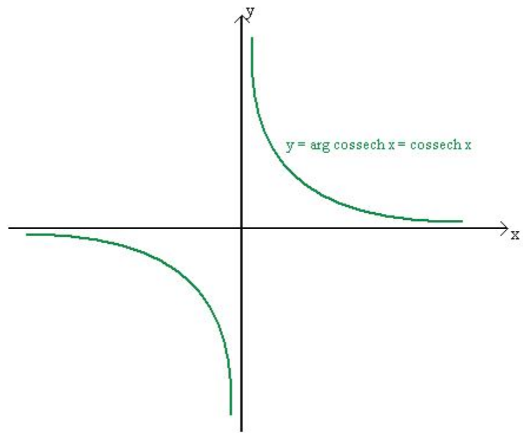

Figura 14. Representação gráfica da função inversa da cossecante hiperbólica.

Função inversa da secante hiperbólica:

Para definir a inversa da função secante hiperbólica, precisa-se restringir o seu domínio.

Seja f $[0, +\infty) \to [0,1]$ a função dada por *f(x) = sech x*, a sua função inversa é denotada por arg sech x. Para $y \geq 0$, temos (Figura 15):

$$y = \text{arg sech } x \Leftrightarrow x = \text{sech } y$$

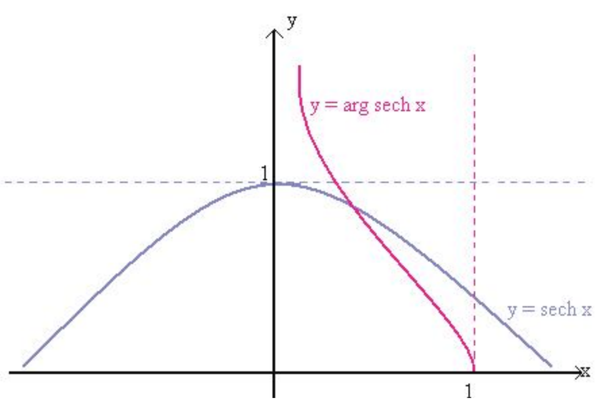

Figura 15. Representação gráfica da função inversa da secante hiperbólica *y = arg sech x e x = sech y.*

Como as funções hiperbólicas são expressas em termos de e^x, podem-se demonstrar as funções hiperbólicas inversas em termos de logaritmos naturais. Isso decorre do fato de as funções hiperbólicas serem definidas em termos da função exponencial, que admite a função logarítmica natural como inversa. A seguir, são apresentadas essas expressões que aparecem, frequentemente, na integração.

As seguintes relações valem para todo x do domínio das funções hiperbólicas inversas dadas:

$$senh^{-1}x = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x \text{ qualquer;}$$

$$cosh^{-1}x = ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x \geq 1;$$

$$tgh^{-1}x = \frac{1}{2}ln\left(\qquad\right),\ -1 < x < 1;$$

$$cotgh^{-1}x = \frac{1}{2}ln\left(\qquad\right),\ |x| > 1;$$

$$sech^{-1}x = ln\left(\qquad\right),\ 0 < x \leq 1;$$

$$cossech^{-1}x = ln\left(\qquad\right),\ x \neq 0$$

Pode-se usar o teorema da diferenciabilidade de funções inversas para estabelecer a diferenciabilidade das funções hiperbólicas inversas. O teorema diz "suponha que a função f seja invertível e diferenciável em um intervalo I, então f^{-1} é diferenciavel em qualquer ponto x, onde $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$". Assim, definem-se as derivadas das funções inversas e a integração das mesmas.

$$\frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(\quad\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(\quad\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{1}{1-x^2}, |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{1}{-x^2} \quad >1$$

$$\frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \left(\quad\right)\cdot\left(\quad\right)' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0<x<1$$

$$\frac{d}{dx}\left[\quad\right] = \frac{d}{dx}\left[\quad\right]\left(\quad\right)\left(\quad\right)' =$$

$$= -\frac{1}{|x| \quad + x^2} \quad \neq 0$$

As fórmulas de diferenciação obtidas para as derivadas das funções hiperbólicas inversas permitem obter algumas fórmulas correspondentes à integração, como:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = senh^{-1}x + c = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = cosh^{-1}x + c = ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} tgh^{-1}x + c, & |x| < 1 \\ & = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c \\ cotgh^{-1}x + c, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -sech^{-1}|x| + c = -ln\left(\perp \qquad \right) + c, \;\; 0 < |x| < 1$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -cossech^{-1}|x| + c = -ln\left(\perp \quad \perp \right) + c, \;\; x \neq 0$$

CABOS PENDENTES

Este problema foi proposto, inicialmente, por Leonardo da Vinci e Galileu interpretou o erradamente, supondo ter encontrado outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou cadeia (catenária) flexível. Galileu resolveu o problema da Ponte Pênsil: a forma de um cabo sem peso, suportando uma carga, uniformemente distribuída, horizontalmente, figura 14.

Em 1690, James Bernoulli chamou a atenção sobre esse problema, e um ano depois, ele era resolvido por Leibniz, Huyghens e Johann Bernoulli, irmão de James. Foi Leibniz que deu o nome de catenária à curva ocupada pelo cabo.

Anos depois, Johann Bernoulli escreve uma carta para um amigo, cheio de satisfação por ter resolvido o problema da catenária antes de seu irmão. Um trecho da carta diz “Os esforços de meu irmão não tiveram sucesso; eu fui mais feliz, pois tive a habilidade (digo isso sem presunção, porque deveria eu esconder a verdade?) de resolver o problema e reduzi-lo à retificação da parábola. É verdade que isso me fez trabalhar durante uma noite. Isso representou muito naqueles dias e para minha pouca idade e experiência, mas na manhã seguinte, transbordando de alegria, corri até meu irmão, que ainda estava lutando, miseravelmente, com o nó górdio sem chegar a lugar nenhum, sempre pensando como Galileu que a catenária era uma parábola. Pare! Pare! Disse-lhe eu, não se torture mais, tentando provar a identidade de uma catenária e de uma parábola, pois isso é inteiramente falso. A parábola serve na construção da catenária, mas as duas curvas são tão diferentes que uma é algébrica e a outra transcendente".

Figura 16 - Ponte pênsil (fonte: www.visaonet.com.br).

A função cosseno hiperbólico pode ser usada para descrever a forma da catenária, pois, à primeira vista, o cabo aparenta a forma geral de uma parábola, mas tal não é o caso (figura 17), pois deseja-se encontrar a solução da catenária.

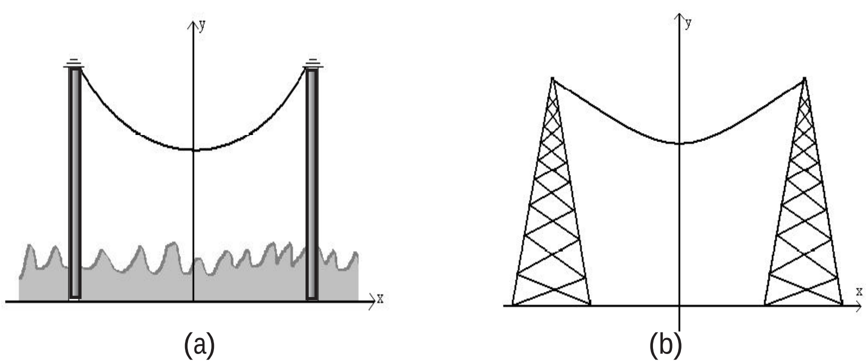

Figura 17 - Introdução do sistema de coordenadas

Vejamos quando se introduz um sistema de coordenadas com origem no ponto mais baixo da curva, e com a curva situada no plano xy, sendo o eixo dos y perpendicular à curva a ser considerada.

Evidentemente, quando atingir o equilíbrio, o cabo ficará todo ele, contido em um plano, o plano vertical que passa por suas duas extremidades, como se observa na figura 18.

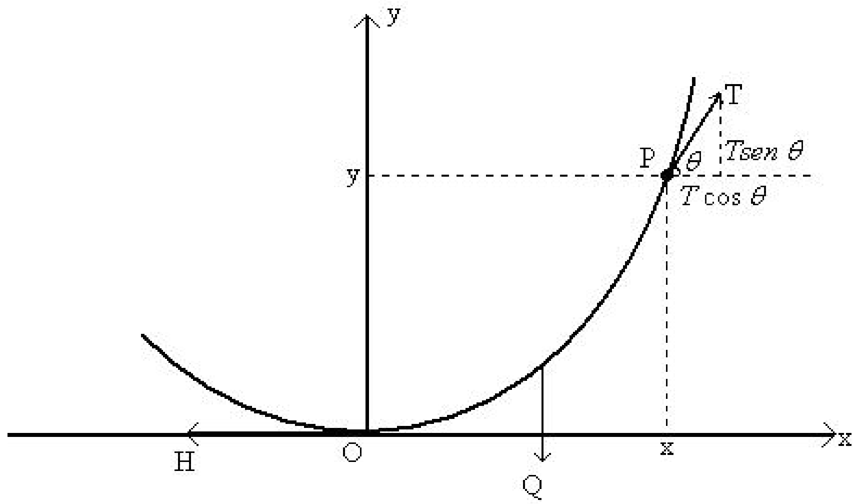

Figura 18 - Representação gráfica da análise de um ponto da corda.

Seja P(x,y) um ponto qualquer da corda. Ao analisar-se um ponto da corda, observa-se que existem três forças que atuam sobre ele: a força da gravidade que o empurra para baixo, e mais duas forças provenientes dos outros pontos adjacentes. Essas duas forças são, em parte, dirigidas para os lados, mas também integram uma componente vertical, porque os pontos adjacentes não estão exatamente no mesmo nível que o ponto em observação. Essas três forças conjugam-se para produzir uma força resultante, que atua sobre o ponto. Considerando o arco OP, segmento ete que estará em equilíbrio devido à ação das forças,

* T é a tensão que atua, tangencialmente, em P e forma um ângulo Θ com o eixo-x.

* H é a tensão da corda no ponto O, atuando horizontalmente.

* Q é o peso do trecho OP da corda cujo comprimento é s, que age verticalmente, em sentido contrário do eixo-y.

Deve assumir-se que todos os pontos da corda têm a mesma massa, porque se um ponto fosse muito mais pesado que os outros, não obteríamos uma catenária. Isso implica que, “se” houvesse uma força resultante, que atuasse sobre o ponto, ele aceleraria na direção da força resultante, afastando-se da sua localização atual. No entanto, vamos assumir que a corda está imóvel e atingiu uma forma estável, o que implica que todas as forças resultantes que atuam sobre cada ponto são iguais a zero.

A força de tensão é variável ao longo da corda. O fato de essa ser flexível expressa-se matematicamente, dizendo que a força de tensão tem sempre a direção tangente à curva. Isso, porque não há forças internas, a corda não oferece nenhuma resistência para curvar-se na direção da tensão. A soma dessas três forças, que agem sobre o trecho considerado da corda, é nula (H +T +Q = 0).

Ao decompor essa equação de equilíbrio sobre os dois eixos, obtemos:

$$-H + T\cos\Theta = 0$$

$$-Q + T\,\mathrm{sen}\,\Theta = 0$$

Dividindo membro a membro estas equações, temos: tg Θ = Q/H

Como $Q = ps$, p é o peso por unidade de comprimento e s é o comprimento do arco OP, então: $tg\,\Theta = p/H \,.\, s$

Observe que p e H são constantes, então $p/H = K$ = constante.

Sendo $tg\,\Theta = dy/dx$, obtém-se: $dy/dx = K$ (1)

Logo, diferenciando ambos os membros de (1), temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = K\frac{ds}{dx}$$

Por outro lado, como

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

conclui-se que y deverá satisfazer a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = K\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Esta equação é considerada a equação diferencial da catenária.

Com o uso de um artifício, tomamos $\frac{dy}{dx} = p$, o que nos leva à equação

$$\frac{dp}{dx} = K\sqrt{1+p^2}.$$

Isso resulta em uma equação diferencial de primeira ordem com variáveis separadas:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = Kdx, \quad (2)$$

Com integração de ambas as partes da equação (2), obtém-se:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int Kdx, \quad (3)$$

Ao resolver a equação do lado esquerdo, tem-se:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$$

$$ln(p+\sqrt{1+p^2}) = kx + c$$

Para $x=0$, temos $p(0) = y'(0) = 0$, logo, $c=0$ e $ln(p+\sqrt{1+p^2}) = kx$; então a solução será da forma

$$p+\sqrt{1+p^2} = e^{kx}$$

ou ainda,

$$1+p^2 = e^{2kx} - 2p\sqrt{1+p^2} - p^2,$$

como $\sqrt{1+p^2} = e^{kx} - p$ temos:

$$1 + p^2 = e^{2kx} - 2p(e^{kx} - p) - p^2$$

$$2pe^{kx} = e^{2kx} - 1$$

$$2p = \frac{e^{2kx} - 1}{e^{kx}}$$

$$2p = (e^{2kx} - 1)e^{-kx}$$

$$p = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} \quad .$$

Portanto, *p = senh (kx)*

Como temos $\frac{dy}{dx} = p$ e sendo $p = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$, assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \quad (4)$$

Integrando ambos os lados de (4) tem-se:

$$\int \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\int (e^{kx} - e^{-kx})dx$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}e^{kx} + \frac{1}{k}e^{-kx}\right) + c_1$$

$$y(x) = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right) + c_1$$

$$1 + p^2 = e^{2kx} - 2p(e^{kx} - p) - p^2$$

Para, *y(0) = 0*, temos

$$y(0) = \frac{1}{2k}\left(e^0 + e^0\right) + c_1$$

$$c_1 = -\frac{1}{k}$$

Logo, a solução geral será da forma:

$$y(x) = \frac{1}{2k}\left(e^{kx} + e^{-kx}\right) - \frac{1}{k}$$

$$y(x) = \frac{1}{k}\left(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - 1\right)$$

E como $\cosh(x) = \dfrac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$,
tem-se:

$$y(x) = \frac{1}{k}(cosh(kx) - 1)\ , \quad (5)$$

(equação da catenária)

A solução y(x) dada por (5) nos diz que um cabo flexível e inextensível, suspenso em dois pontos e sujeito a seu próprio peso toma a forma do gráfico do cosseno hiperbólico e essa curva leva o nome de Catenária.

É certo que o cabo é infinitamente flexível, ou seja, que não é necessária nenhuma força para vergá-lo. Se houver alguma rigidez, obter-se-á uma forma diferente da catenária ideal.

CONCLUSÃO

As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios, dentro de sólidos elásticos e, mais genericamente, em muitos problemas, nos quais a engenharia mecânica é, gradualmente, absorvida pelo meio ambiente. Elas também ocorrem quando um cabo flexível e homogêneo é suspenso entre dois pontos.

Neste trabalho, o objetivo foi demonstrar como determinar a forma exata da curva assumida por uma corda flexível de densidade uniforme, que é suspensa entre dois pontos: a importante curva denominada catenária.

BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS

ANTON, H. **Cálculo um novo horizonte.** 6ª ed. Volume 1, Porto Alegre: Bookman, 2000.

LEIGHTON, W. **Equações diferenciais ordinárias**. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais com aplicações.** São Paulo: Harbra LTDA, 1998.