ISSN 1519-0625

ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DA EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO REAL[1]

SOME HISTORIC ASPECTS OF THE EVOLUTION OF THE CONCEPT OF REAL NUMBER

Tatiane Nascente da Rosa Villa[2] e Eleni Bisognin[3]

RESUMO

Neste trabalho são analisados alguns aspectos históricos sobre a evolução do conceito de número real. É feita uma análise da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado, descoberta pelos pitagóricos, e do método de Arquimedes para determinação da área de um círculo, com o objetivo de mostrar a necessidade da construção de um conjunto numérico que possibilite expressar tais medidas por meio de um número. Utilizaram-se as frações contínuas para mostrar as aproximações do número irracional $\sqrt{2}$ realizadas na Idade Média e foi utilizado o método de Cortes de Dedekind para construir o corte de Dedekind para o número $\sqrt{2}$.

Palavras-chave: incomensurabilidade, números irracionais, Corte de Dedekind.

ABSTRACT

In this work it was analised some historical aspects about the evolution of the concept of real number. The analysis of the immeasurability between the side and the diagonal of a square discovered by the pitagorics is realized and the method of Arquimedes to the determination of the area of one circle with the objective of showing the necessity of the construction of a numeric group that make possible to express this measurement by a number. It was used the continuous fractions to show the approximations of the irrational number $\sqrt{2}$ *realized in the Middle Ages and it was used the method of cuts of Dedekind to built the cut of Dedekind to the number* $\sqrt{2}$.

Keywords: *immeasurability, irrational number, Cut of Dedekind*

[1] Trabalho Final de Graduação – UNIFRA.
[2] Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática – UNIFRA.
[3] Orientadora – UNIFRA.

O PROBLEMA DA MEDIDA

Medir, segundo Caraça (2001), é comparar duas grandezas que sejam da mesma espécie, como por exemplo, dois pesos, dois comprimentos, e assim por diante. Ao comparar dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, pode ocorrer que o segmento $\overline{AB}$ esteja contido em $\overline{CD}$, um número inteiro *r* de vezes ou pode resultar que nenhum múltiplo inteiro de $\overline{AB}$ seja igual a $\overline{CD}$. Nesse último caso, pode-se dividir o segmento $\overline{AB}$ em *n* partes iguais, de tal modo que $\overline{CD}$ seja igual a $m \,.\, \overline{AB}/n$. Diz-se, nesse caso, que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis, pois é possível compará-los à unidade de medida $u = \overline{AB}/n$ que está contida *n* vezes em $\overline{AB}$ e *m* vezes em $\overline{CD}$. Assim, uma grandeza tem tantas medidas quantas sejam as unidades com que se faça a medição. Na figura 1, se for tomado o segmento $\overline{GH}$, como unidade de medida *u,* tem-se que $\overline{AB}$ mede 4 vezes *u,* porém se $u = \overline{IJ}$ então *u* cabe 2 vezes em $\overline{GH}$ e 8 vezes em $\overline{AB}$.

Em geral, se *m* é a medida de uma grandeza, tomando *u* como unidade de medida e subdividindo-se *u* em *n* partes iguais, a medida dessa grandeza é *m.n*, isto é, o número de vezes que a nova unidade cabe na grandeza a medir.

Na figura 1, observa-se que a unidade de medida cabe um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

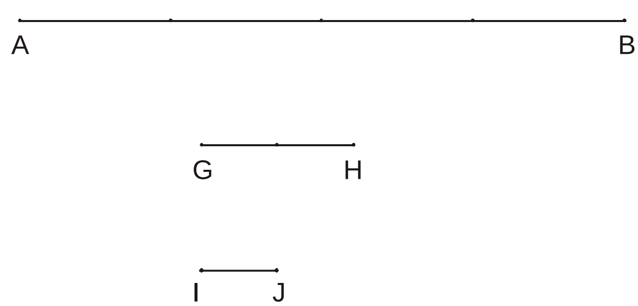

Figura 1. Segmentos Comensuráveis

Ao se observar a figura 2, a seguir, e tomando o segmento $\overline{GH}$ como unidade de medida, vê-se que a medida de $\overline{EF}$ é duas vezes a medida de $\overline{GH}$ mais a medida de $\overline{AF}$ que é menor do que a unidade $\overline{GH}$. Nesse caso, não podemos exprimir a medida de $\overline{EF}$ e tomar, como unidade de medida, o segmento $\overline{GH}$. No caso da figura 2, dividindo-se $\overline{GH}$ em 4 partes iguais, essa nova unidade de medida cabe 11 vezes em $\overline{EF}$. Logo, a medida é 11 . 1/4, porém essa razão não é um número inteiro, pois 11 não é divisível por 4.

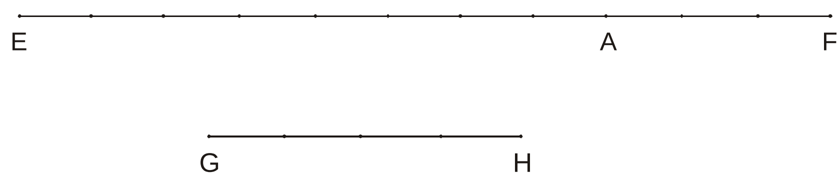

Figura 2. Segmentos Comensuráveis.

Conclui-se então que números inteiros são insuficientes para expressarem a medida de quaisquer segmentos. A dificuldade encontra-se justamente no fato de que essa divisão não é exata.

Suponha que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos e *u* a medida do segmento unitário [0,1]. Se $\overline{AB}$ contém *m* vezes *u* e $\overline{CD}$ contém *n* vezes *u,* então, a medida de $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade de medida, é o número *m/n*, *m* e *n* inteiros com *n* não-nulo. Logo, $\overline{AB}$ = m/n . $\overline{CD}$. Se *m* for divisível por *n*, esta razão é um número inteiro, caso contrário, tem-se um número fracionário. Portanto, os segmentos comensuráveis com o segmento unitário correspondem a todos os pontos racionais *m/n* sobre a reta numérica.

É sempre possível expressar a medida de um segmento por meio de um número racional? A resposta é não. Considere, por exemplo, um quadrado cujo lado mede uma unidade. Pergunta-se: qual é a medida da diagonal, tomando um dos lados como unidade de medida? Para responder a esta questão, considere a figura 3.

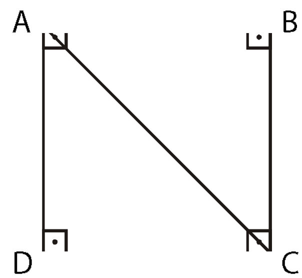

Figura 3. Diagonal $\overline{AC}$ do quadrado

Seja $\overline{AB}$ o segmento tomado como unidade de medida. Suponha que existe um número racional m/n, $n \neq 0$, m/n fração irredutível, tal que $\overline{AC} = m/n \cdot \overline{AB}$. Do teorema de Pitágoras, tem-se que $(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2$. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, pois o triângulo é isósceles, então $(\overline{AC})^2 = 2(\overline{AB})^2$ e, lembrando o valor de $\overline{AC}$, obtém-se $m^2/n^2 = 2$. Disso, conclui-se que $m^2 = 2n^2$, ou seja, m^2 é par e, portanto, m é par. Assim, a fração irredutível n deve ser ímpar, mas tomando-se $m = 2k$, k inteiro, obtém-se $n^2 = 2k^2$, concluindo-se que n é par. Isso constitui um absurdo, visto que um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.

Logo, não se pode expressar a medida da diagonal por meio de um número racional, tomando um lado do quadrado como unidade de medida. Esse fato mostra que a diagonal do quadrado é incomensurável com o lado.

Essa noção de incomensurabilidade foi a descoberta mais importante da Escola Pitagórica e foi um dos fatos que perturbou os geômetras gregos, pois eles entendiam, conforme Amoroso Costa (1971), que uma relação entre grandezas geométricas deveria corresponder a uma relação entre números. Apesar dessa descoberta genial, os Pitagóricos não ampliaram sua noção de número e, somente no século XVI, Viête considerou a noção de número e grandezas geométricas distintas. Para os geômetras gregos, a noção de número irracional não era clara, embora, em problemas práticos, utilizassem aproximações racionais dos valores irracionais. Exemplo disso é o método utilizado por Arquimedes para determinação do número π cuja aproximação foi obtida com duas sequências de racionais, uma de termos superiores e outra de termos inferiores, distando pouco do número irracional π.

O método utilizado por Arquimedes, conforme descrito em Aaboe (1984) e Strathern (1999), permitiu calcular a área de um círculo. Ele aproximou a área do círculo ao inscrever e circunscrever um hexágono como mostra a figura 4 a seguir.

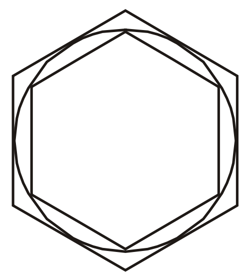

Figura 4. Hexágono inscrito e circunscrito.

Arquimedes iniciou o processo, dobrando o número de lados dos polígonos e repetiu-o até obter um polígono de 96 lados. Com o cálculo da área do polígono interior e exterior obteve, respectivamente, um limite inferior e um limite superior para a área do círculo. Com esse método, ele obteve para o valor de π, aproximações equivalentes a $3{,}14084 < \pi < 3{,}142858$, o que mostra a proximidade dos valores que hoje conhecemos.

Usando esse método, Arquimedes construiu duas sequências de números racionais, uma com valores inferiores e outra com valores superiores, tendo como limite o número irracional π. Essa é, de acordo com Amoroso Costa (1971), a origem da noção de número irracional definido como limite de uma seqüência de números racionais.

Esse método utilizado por Arquimedes é, na realidade, a origem do cálculo diferencial, embora, somente depois de, aproximadamente, dois mil anos, Newton formulou seus fundamentos.

Apesar da descoberta da incomensurabilidade da diagonal do quadrado em relação ao lado e às descoberta de Arquimedes, os números irracionais não foram claramente definidos.

Por um lado, se a medida da diagonal de um quadrado é incomensurável com o lado, como comprovado pela Escola Pitagórica, a impossibilidade de expressar essa medida propiciou uma outra descoberta: a existência de outros números, além dos números naturais e das frações ordinárias que, de acordo com Boll (1963), o matemático italiano, Raphäel Bombelli, identificou como números decimais que não se terminam jamais e os algarismos não se reproduzem nunca na mesma ordem. Esse resultado extraordinário de Bombelli demonstrado para o número $\sqrt{2}$, conhecido hoje como fração contínua, foi obtido por meio das frações ordinárias. A figura 5, a seguir, mostra o cálculo de $\sqrt{2}$ por frações contínuas.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots} \cdots} \cdots} \cdots$$

Figura 5. Cálculo de $\sqrt{2}$ por frações contínuas

Observa-se assim que do cálculo de Bombelli se obtém uma sequência de frações ordinárias que se aproximam cada vez mais do número $\sqrt{2}$. Os oito primeiros termos proporcionam os valores apresentados a seguir.

$$1 = 1$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$1 + \frac{1}{2{,}5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$\frac{17}{12} = 1{,}41666...$$

$$\frac{41}{29} = 1{,}41379310345...$$

$$\frac{99}{70} = 1{,}41428571429...$$

$$\frac{239}{169} = 1{,}41420118343...$$

$$\frac{577}{408} = 1{,}41421568627...$$

Esses avanços, na noção de número irracional, só culminaram em fins do século XIX com os estudos realizados por Cantor e Dedekind quando a noção de número irracional adquire um sentido rigoroso e formal como é conhecido até os dias atuais, por meio dos cortes de Dedekind .

A noção de corte construída por Dedekind consiste no seguinte: toma-se uma reta *r* no plano e um ponto P sobre ela; portanto, P divide a reta *r* em duas classes. A classe A dos pontos da reta à esquerda de P e a classe B dos pontos situados à direita de P. O ponto P pode estar na classe A ou na classe B. Diz-se que se tem um corte (A,B) constituído pelas classes A e B, se as seguintes condições são satisfeitas:

a) nenhum ponto da reta fica fora da separação;

b) todo ponto da classe A está à esquerda de todo ponto da classe B.

Essas são as condições definidas por Dedekind para se obter um corte. Essa definição de corte está ligada à noção de continuidade. Pergunta-se: sempre existe um ponto P que divide *r* em duas classes?

Segundo Caraça (2001), este conceito de continuidade publicado por Richard Dedekind, em 1872, na obra "Continuidade e números irracionais" consiste no axioma: "todo corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes A e B".

Isso se aplica ao campo dos racionais? Considere uma partição tal que, na classe A, estão os números racionais cujo quadrado é menor que 2 e, na classe B, estão os números racionais cujo quadrado é maior que 2. Dado qualquer número racional, podemos classificá-lo em uma das classes e ainda verificar que todos os pontos que pertencem a classe A estão à esquerda dos elementos da classe B.

Pelo critério da separação, o corte compreende todos os números racionais, mas o número cujo quadrado é igual a 2 não pertence a nenhuma dessas classes. Do exposto, conclui-se que o conjunto dos racionais não satisfaz a condição de Dedekind, o que comprova que o conjunto dos racionais não é contínuo. Portanto, não há uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números racionais e os pontos da reta, o que mostra que o conjunto dos números racionais, embora denso sobre a reta, não a cobre em sua totalidade, daí a necessidade de se estender o conjunto dos racionais.

Com o propósito de cobrir a reta numérica com um conjunto de pontos denso, consideram-se os números que se originam pela subdivisão de cada intervalo unitário em 10, depois em 100, 1000, etc., segmentos iguais. Assim, escolhido um ponto P, ele pode ser incluído em intervalos cada vez menores da divisão decimal e esse processo pode ser continuado indefinidamente, obtendo-se uma seqüência sem fim de dígitos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, tendo a propriedade de qualquer que seja o número n, o ponto escolhido P está no intervalo I_n cujo ponto inicial é a fração 0, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e cujo ponto terminal é 0, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, a_{n+1}..., sendo 10^{-n} , o comprimento de I_n. Se n = 1, 2, 3, ..., cada um dos intervalos I_1 , I_2 , I_3, ... está contido no precedente e seus comprimentos 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ... , tendem a zero. Nesse caso, o ponto P está contido numa sequência de intervalos encaixados.

Serão analisados, a seguir, as aproximações racionais da solução da equação $x^2 = 2$.

Denomina-se raiz quadrada de 2, a menos de uma unidade, por falta, ao maior número inteiro n tal que $n^2 < 2 < (n+1)^2$.

O número n + 1 é denominado de raiz quadrada de 2 a menos de uma unidade por excesso. Se n =1 então a solução da equação $x^2=2$ satisfaz, $1 < x < 2$. A seguir, são feitas aproximações racionais da solução de $x^2 = 2$ que se encontram entre 1 e 2.

Denomina-se raiz quadrada de 2 a menos de 1/10 (um décimo) por falta, ao maior número inteiro de décimos cujo quadrado é menor que 2. Isso equivale a $(n/10)^2 < 2 < (n+1/10)^2$ em que o número $\frac{n+1}{10}$ é a raiz quadrada de 2 por excesso a menos de um décimo.

Para o cálculo dessa aproximação, divide-se o segmento de reta [1,2] em 10 partes iguais como mostrado na figura 6 a seguir.

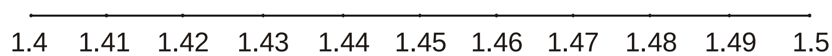

Figura 6. Divisão do segmento [1,2] em 10 partes iguais

Obtém-se $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$

Assim, 1,4 é a solução aproximada da equação $x^2=2$ a menos de 1/10 por falta e 1,5 é a solução aproximada por excesso. Logo, a solução da equação encontra-se no segmento [1.4 ,1.5].

Para obter-se solução aproximada da equação $x^2 = 2$ a menos de 1/100, por falta e por excesso, divide-se o segmento [1.4 ,1.5] em 10 partes iguais por meio dos pontos, conforme a figura 7:

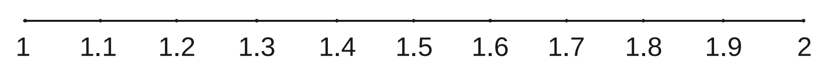

Figura 7. Divisão do segmento [1.4 , 1.5] em 10 partes iguais.

Conforme o procedimento anterior, tem-se $(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$, isto é, 1,41 é a solução a menos de 1/100 por falta e 1,42 é a solução aproximada por excesso. Logo, a solução da equação encontra-se no intervalo da reta de extremos 1,41 e 1,42.

Continuando o processo, são encontradas soluções aproximadas a menos de 1/1000, 1/10000, ..., $1/10^n$. Desse modo, são construídas as classes de aproximações A por falta e B por excesso, da solução da equação $x^2 = 2$. Tem-se então: $1^2 < 2 < 2^2$, $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$, $(1,41)^2 <$

$2 < (1{,}42)^2$, $(1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2$, $(1{,}4142)^2 < 2 < (1{,}4143)^2$, e assim por diante. Tem-se, então, as classes A = { 1,1.4,1.41,1.414,1.4142,...} e B = { 2,1.5,1.42,1.415,1.4143,...}, constituídas por decimais infinitas. Considere a classe *M* constituída pelas decimais infinitas pertencentes à A, isto é, os números racionais positivos x tais que $x^2 < 2$, mais o número zero e os racionais negativos e, a classe N, formada pelo complemento de *M* em *Q*, portanto $Q = M \cup N$. Tem-se então que $A \subset M$ e $B \subset N$ e não existe um racional máximo em A ou um mínimo em B. Conclui-se que o número $\sqrt{2}$, solução da equação $x^2=2$, não pertence à classe A nem à classe B. O número $\sqrt{2}$ é um número irracional definido pelo corte (A,B).

Esse modo de definir um número irracional por meio dos Cortes de Dedekind é o modo formal utilizado, nos dias atuais, no estudo de números reais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, analisaram-se alguns aspectos históricos sobre a evolução do conceito de número real. Partiu-se da análise do problema da medida e da incomensurabilidade da diagonal do quadrado em relação ao lado, para mostrar a necessidade da obtenção de um número para expressar tais medidas. Analisou-se o método de Arquimedes para o cálculo da área de um círculo por aproximações, inferiores e superiores de áreas de hexágonos regulares inscritos e circunscritos, respectivamente, para a obtenção do número irracional π com valores próximos aos conhecidos atualmente.

Na continuidade da evolução histórica, analisou-se a aproximação da $\sqrt{2}$ feita na Idade Média por meio de frações contínuas e, por último, foi analisado o método dos Cortes de Dedekind, sendo construído o corte de Dedekind para a $\sqrt{2}$, método esse que definiu, de modo rigoroso, a noção de número irracional utilizado até os dias atuais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática** -Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

AMOROSO COSTA, M. **As idéias fundamentais da Matemática e outros ensaios**. São Paulo: Editora da USP, 1971.

BOLL, Marcel. **Histoire des Mathématiques**. Paris: Presses Universitaires de France, 1963.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 2001.

STRATHERN, Paul. **Arquimedes y la palanca**. Madrid: Siglo XXI de España Editores S.A., 1999.