DESENVOLVIMENTO DE ALGUNS ASPECTOS DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA[1]

DEVELOPMENT OF SOME ASPECTS OF THE HYPERBOLIC GEOMETRY

Simone Ferrari Piovesan[2]
Rosane Rossato Binotto[3]

RESUMO

Neste trabalho apresentou-se através de pesquisa bibliográfica, um breve estudo da geometria Hiperbólica. Esta geometria surgiu a partir das tentativas de se demonstrar o postulado das paralelas de Euclides, como uma proposição. Estudou-se modelos para esta geometria e verificou-se que ela tem semelhanças e diferenças em relação a geometria Euclidiana, sendo as principais diferenças o quinto postulado de Euclides e todos os resultados que dependem dele.

Palavras-chave: geometria euclidiana, geometria hiperbólica, postulado das paralelas de Euclides.

ABSTRACT

In this work it was studied through the research bibliographical the Hiperbolic geometry. This geometry starting from the attempts of demonstrating the postulate of the parallel ones of Euclides as a proposition. It was studied models for this geometry and It was verified what there are similitaries and differences with relationship these geometries, being the main differences the fifth postulate and all the results that depend on him.

Keywords: euclidean geometry, hiperbolic geometry, postulate of the parallel of Euclides.

INTRODUÇÃO

A geometria Euclidiana teve o seu apogeu por volta de 300 a.C., quando o matemático grego, Euclides, coletou e arranjou todo o conhecimento matemático da época numa obra composta por treze volumes, denominada Elementos. Essa obra é considerada um marco na história da Matemática, pois ela é o primeiro grande exemplo do uso do método axiomático.

---

[1] Trabalho de Iniciação Científica - FAPERGS/PIBIC - UNIFRA.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática Aplicada Computacional - UNIFRA.
[3] Orientadora - UNIFRA.

Euclides construiu a sua geometria baseado em 10 axiomas, separados em dois grupos: cinco foram classificados como "noções comuns" \ e os outros como "postulados". As cinco noções comuns eram:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Os postulados eram:

1. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.

Postulado das Paralelas de Euclides: Se uma reta ao cortar duas outras, Figura 1, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

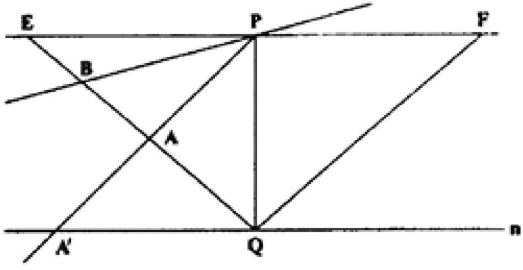

Figura 1. Retas paralelas na geometria euclidiana.

O postulado das paralelas é conhecido também como quinto postulado de Euclides. No século XVII, Playfair apresentou a seguinte versão para o postulado:

Por um ponto fora de uma reta, pode ser traçada uma única reta paralela à reta dada.

Desde o início o postulado das paralelas de Euclides foi alvo de críticas pelos matemáticos da época, por ser bastante diferente dos outros, inclusive em tamanho e também, por não ter a mesma concisão dos quatro primeiros e não ter a evidência suficiente para ser aceito sem demonstração. Tratava-se, muito provavelmente, não de um verdadeiro postulado, mas sim de um teorema, e como tal deveria ser demonstrado dentro da própria geometria, utilizando-se é claro, apenas a matemática gerada pelos quatro primeiros postulados.

Foi somente na primeira metade do século XIX que os matemáticos chegaram à conclusão de que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro. Isto ocorreu com a descoberta das chamadas geometrias não-Euclidianas em que o quinto postulado de Euclides é substituído por uma outra afirmação que lhe é contraditória. Esta descoberta
está associada a três matemáticos que obtiveram independentemente a solução: o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o russo Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) e o húngaro János Bolyai (1802-1860). Eles descobriram que se pode obter uma nova teoria matemática perfeitamente consistente, começando com um postulado, que é uma das negações do postulado das paralelas de Euclides.

Os detalhes das descobertas destes três homens e as resistências por ele enfrentadas produziram um dos mais fascinantes episódios da história da Matemática.

A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Essa nova geometria é baseada nos quatro primeiros postulados da geometria Euclidiana e mais o quinto postulado que é adaptado para a geometria Hiperbólica.

Na geometria Euclidiana, existem 28 teoremas que são provados usando unicamente os quatro primeiros postulados. Assim, na geometria Hiperbólica já existem 28 teoremas. Alguns destes são:

1. Duas retas distintas se interceptam no máximo em um ponto.
2. Uma reta é separada por um ponto.
3. Um plano é separado por uma reta.

O QUINTO POSTULADO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

O quinto postulado da geometria Hiperbólica é dado por:

Postulado 1.1 Quinto Postulado da Geometria Hiperbólica: Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada (Figura 2).

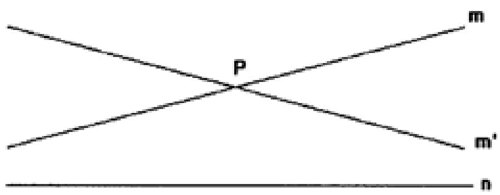

Figura 2. Retas Paralelas na Geometria Hiperbólica.

MODELOS PARA A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

É claro que o plano infinito, em nossa mente é um ótimo modelo para a geometria plana Euclidiana, chamado modelo euclidiano, onde a validade do postulado das paralelas de Euclides é inquestionável. No caso da geometria Hiperbólica, qual será o melhor modelo para o plano hiperbólico?

Existem em geral, dois modelos para a visualização da geometria plana Hiperbólica. Eles são conhecidos como modelo de Poincaré e modelo de Klein. Ambos os modelos associam interpretações para termos hiperbólicos em consonância com o contexto da geometria Euclidiana.

i) Modelo de Poincaré: no modelo de Poincaré, Figura 3, o plano Euclidiano é transformado num disco limitado. Tem-se então:

Termo Hiperbólico	Interpretação
Ponto	Ponto interior a um dado disco Euclidiano C
Reta	Corda interior a C para um disco ortogonal a C ou diâmetro de C
Plano	Interior de C

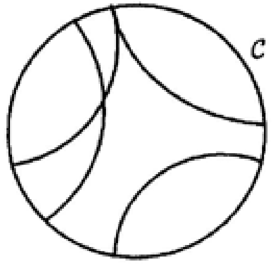

Figura 3. Modelo de Poincaré.

Este modelo é importante historicamente pois, foi usado para demonstrar a consistência da geometria Hiperbólica relativa à geometria Euclidiana.

ii) Modelo de Klein: Neste modelo, o plano Euclidiano também é transformado num disco limitado, Figura 4. Tem-se então:

Termo Hiperbólico	Interpretação
Ponto	Ponto interior a um dado disco Euclidiano C
Reta	Corda aberta de C
Plano	Interior de C

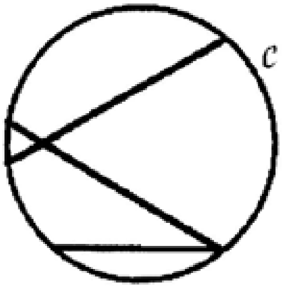

Figura 4. Modelo de Klein.

Desde que, a geometria Hiperbólica resulta da recolocação do quinto postulado de Euclides pelo postulado hiperbólico, dá-se início ao estudo desta geometria determinando as conseqüências deste novo postulado. Necessita-se empregar uma propriedade euclidiana, a continuidade das retas, para entender melhor essas conseqüências. Esta propriedade é o axioma de Dedekind.

Axioma 1.1 Axioma de Dedekind da Continuidade: Em cada partição de pontos de uma reta em dois conjuntos não vazios tal que nenhum ponto de um esteja entre dois pontos do outro, existe um ponto de um conjunto que se situa entre cada ponto daquele conjunto e cada ponto do outro conjunto.

É imediato observar que, se existem duas retas passando por um ponto e não interceptando uma dada reta, então, existem infinitas retas com esta propriedade. De fato, consideram-se duas de tais retas m e m0 passando pelo ponto P e não interceptando uma reta n. Elas formam quatro ângulos, sendo que a reta n esta completamente contida em um deles. Todas as retas traçadas pelo ponto P e contidas no par de ângulos opostos pelo vértice, nenhum dos quais contendo n, são exemplos de retas que também não interceptam a reta n. E existem infinitas delas.

Com tantas retas que não interceptam a reta n, é conveniente mudar a definição de paralelismo.

Proposição 1.1 Dados uma reta n e um ponto P fora desta reta existem exatamente duas retas m e m0 que passam pelo ponto P e que separam o conjunto das retas que interceptam n do conjunto das que não interceptam n.

Demonstração: Baixa-se a perpendicular do ponto P à reta n e designa-se por Q o pé desta perpendicular. Em seguida, traça-se a reta passando por P e perpendicular ao segmento PQ, a qual se sabe que não intercepta a reta n (Figura 5).

Escolhem-se dois pontos E e F sobre esta reta, de modo que P pertença ao segmento EF. Considera-se o triângulo EFQ. Como o ponto P pertence ao lado EF, todas retas que passam por P, com exceção da reta que passa por E e F, são retas que cortam o segmento EF em um ponto, e que, conseqüentemente, cortam também o segmento EQ ou o segmento QF. Inicialmente restringe-se, às que cortam o segmento EQ. Observa-se que, neste segmento, cada ponto representa uma das retas que passa por P.

Estes pontos podem ser separados em duas classes, a classe N que é a classe dos pontos que representam

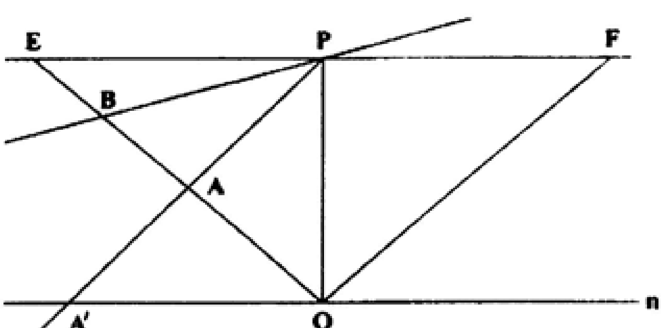

Figura 5. Retas paralelas na geometria hiperbólica.

retas que não interceptam n, e M a classe dos pontos que representam retas que interceptam n. é claro que N \M é vazio, que E 2 N e que Q 2 M.

Além disto, se A 2 M, então, QA _ M. Para ver que isto ocorre, seja A0 o ponto de interseção da reta que passa por P e A com n; observa-se que qualquer reta que penetre no triângulo PQA0 pelo vértice P deve cortar o lado QA0. Da mesma forma, se B 2 N, então, EB _ N. Aqui o raciocínio é o mesmo já utilizado para garantir a existência de infinitas retas que não interceptam a reta n.

Segue-se, então, do Axioma de Dedekind da Continuidade que existe exatamente um ponto S que separa os conjuntos Me N. A questão que se coloca imediatamente é se este ponto de separação pertence ao conjunto M, ou ao conjunto N. Suponha-se que pertence ao conjunto M, ou seja, a reta que passa por P e S intercepta n em um ponto S0. Toma-se agora qualquer ponto da semi-reta de origem Q passando por S0 e que esteja fora do segmento QS0. é claro que esta reta intercepta EQ em um ponto que fica fora do segmento QS, o que é absurdo. Logo S 2 N.

O mesmo raciocínio pode agora ser repetido com o segmento QF, obtendo-se outro ponto de separação daquele lado. Estes dois pontos correspondem a retas que separam todas as retas que passam pelo ponto P em duas categorias - as que interceptam n e as que não interceptam n.

Estas duas retas são denominadas retas paralelas à reta n passando por P.

Em vários momentos será importante, para simplificar as demonstrações, distinguir as duas retas paralelas, uma da outra, denominando uma delas, de reta paralela à direita e a outra, de reta paralela à esquerda. Usando-se, assim, paralelas em um determinado sentido.

Certas propriedades das paralelas Euclidianas valem na geometria Hiperbólica. Três destas são apresentadas a seguir.

(a) Se uma reta é paralela, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então, ela é, em cada um de seus pontos, paralela no mesmo sentido à reta dada.

(b) Se uma reta é paralela a uma segunda, então, a segunda é paralela à primeira.

(c) Se duas retas são paralelas a uma terceira, na mesma direção, então, são paralelas entre si.

As demonstrações destas propriedades podem ser encontradas em Barbosa 2002.

TRIÂNGULOS GENERALIZADOS

Na seqüência serão examinadas figuras formadas por duas retas paralelas num sentido e uma transversal. Para isto, acrescentam-se dois pontos a cada reta do plano, os quais, na ordenação destas retas, localizam-se, um antes de todos os seus pontos, e outro, depois de todos eles. Eles serão denominados pontos ideais. Admitir-se-á que estes novos pontos são adicionados de modo que retas paralelas tenham em comum um ponto ideal na direção do paralelismo, ou seja, o mesmo ponto ideal é adicionado a retas paralelas, no lado do paralelismo. Assim, duas retas são paralelas se têm um ponto ideal em comum. Tem-se então, um novo conceito.

Definição 1.1 Um triângulo generalizado é um triângulo formado por dois pontos ordinários e por um ideal, ou por dois pontos ideais e um ponto ordinário, ou até por três pontos ideais.

Como no caso de triângulos ordinários, que são os triângulos da geometria de Euclides, estes triângulos generalizados separam o plano em duas regiões, uma, que se chama interior, constituída por todos os pontos dos segmentos de reta ligando dois pontos de seus lados, e a região complementar desta, que se chama de exterior do triângulo generalizado.

Considera-se, o triângulo generalizado AB, com vértices ordinários A e B, vértice ideal, segmento AB como lado ordinário e pelas duas semi-retas paralelas com origens nos pontos A e B, Figura 6.

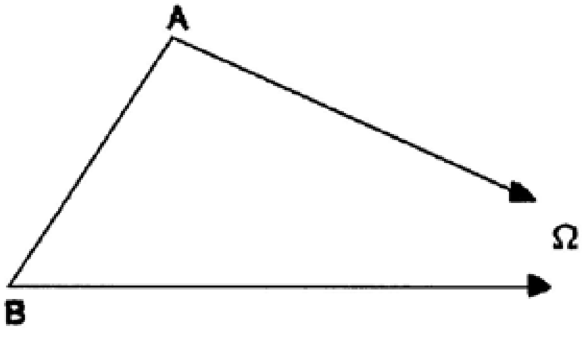

Figura 6. Triângulo generalizado.

Se AB é um triângulo generalizado, então, A ˆB e B ˆ A são os seus ângulos internos. Os ângulos externos são, simplesmente, os suplementos destes ângulos.

Teorema 1.1 (Teorema do ângulo Externo). Um ângulo externo de um triângulo generalizado AB é sempre maior que o ângulo interno que não lhe é adjacente.

Demonstração:

Dado o triângulo generalizado AB, seja C um ponto na semi-reta SAB, fora do segmento AB. Tem-se que C ˆB é um ângulo externo do triângulo AB, não adjacente ao ângulo interno B ˆ A . Deseja-se provar que C ˆB > B ˆ A. Para isto, traça-se, a partir de B, um segmento BD, tal que C ˆB D = B ˆ A. Como decorrência dos quatro primeiros postulados, a reta que passa por B e D não intercepta A. Conseqüentemente, o ponto D não pode estar na região interior ao triângulo AB. Se o ponto D ficar fora do triângulo, como na figura 7, então o resultado fica demonstrado. Resta, portanto, apenas excluir a possibilidade de que o ponto D esteja sobre B.

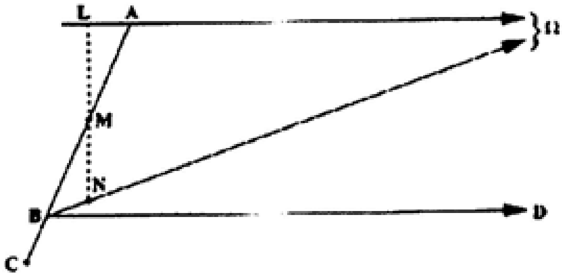

Figura 7. Ângulo externo.

Suponha-se que tal fato ocorra. Seja M o ponto médio de AB. Baixa-se uma perpendicular de M até um ponto N 2 B. Na reta que passa por A e , marca-se um ponto L de modo que LA = BN, e que L e N estejam em lados opostos relativamente à reta que passa por A e B.

Pelo primeiro caso de congruência de triângulos (ordinários), LAM = NBM e, conseqüentemente, LN é uma perpendicular comum a L e a N, o que é uma contradição. Logo o resultado está provado.

Este resultado coincide com a o teorema do ângulo externo para triângulos ordinários da geometria Euclidiana.

QUADRILÁTEROS ESPECIAIS

Na geometria Hiperbólica existem quadriláteros que se destacam: os quadriláteros de Saccheri.

QUADRILÁTERO DE SACCHERI

Definição 1.2 Seja ABCD um quadrilátero, nos quais AD = BC e os ângulos D ˆ AB e A ˆB C são retos. ABCD é chamado Quadrilátero de Saccheri, Figura 8.

Na geometria Euclidiana, eles seriam retângulos, mas isso não ocorre na geometria Hiperbólica. Em um quadrilátero de Saccheri, Figura 8, o lado comum aos dois ângulos retos é chamado de base; o lado oposto à base é chamado de topo; os outros dois lados são chamados simplesmente de lados do quadrilátero; os dois ângulos não retos são denominados de ângulo do topo ou simplesmente de ângulos do quadrilátero.

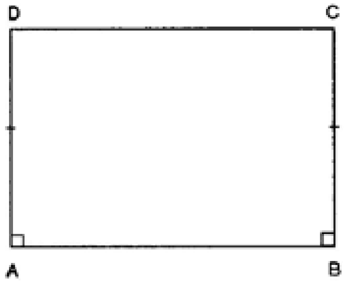

Figura 8. Quadrilátero de Saccheri.

Teorema 1.2 A reta ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular ao topo e à base; os ângulos do topo são congruentes.

Demonstração: Seja AB a base do quadrilátero de Saccheri ABCD, conforme a figura 9. Sejam M e H os pontos médios da base e do topo respectivamente.

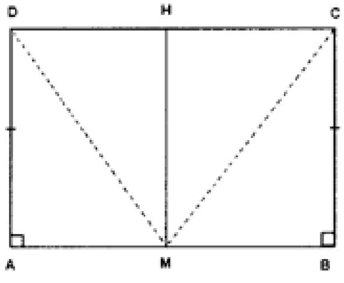

Figura 9. Quadrilátero de Saccheri.

Utilizando a congruência de triângulos ordinários prova-se que DAM = CBM, e que, em conseqüência, DMH = CMH. Segue-se daí que MH é perpendicular a DC e, somando ângulos em M, que MH é também perpendicular a AB. Somando ângulos em D e C, obtém-se a igualdade dos ângulos do topo.

Como conseqüência deste teorema seguem-se os corolários 1.2 e 1.3.

Corolário 1.1 A base e o topo de um quadrilátero de Saccheri fazem parte de retas que não se interceptam.
Corolário 1.2 Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Teorema 1.3 A soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é menor do que dois ângulos retos.

Demonstração: Seja ABC um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C, Figura 10. Sabe-se, com base nos quatro primeiros postulados da geometria Euclidiana, que a soma de quaisquer dois ângulos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos. Assim, os outros dois ângulos do triângulo dado são agudos.

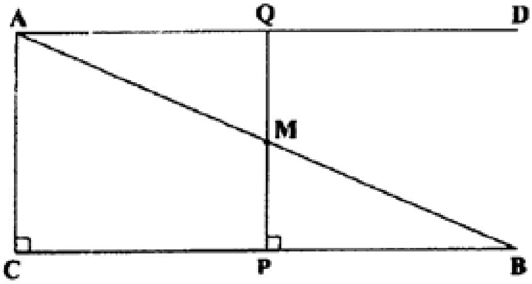

Figura 10. Soma dos ângulos internos de um triângulo.

Traça-se o segmento AD de sorte que D ˆ AB = A ˆB C. Seja M o ponto médio de AB. Baixa-se a perpendicular MP ao lado BC. Na semi-reta SAD, marca-se um ponto Q tal que AQ = PB. Tem-se, então, AQM = BPM. Conseqüentemente, M ˆ QA é um ângulo reto e, P, M e Q são colineares. Portanto, ACPQ é um quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice A. Logo, a soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo ABC, que é exatamente igual ao ângulo C ^ AD, é menor do que um ângulo reto, daí o resultado.

Como conseqüência do teorema 1.3 têm-se os corolários 1.3 e 1.4.

Corolário 1.3 A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.

Corolário 1.4 A soma dos ângulos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.

Na geometria Euclidiana tem-se que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos. E, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a quatro ângulos retos.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi confirmado através dos resultados, que existem semelhanças e diferenças entre a geometria Euclidiana e a geometria Hiperbólica. As principais diferenças estão naqueles resultados que dependem do quinto postulado como por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo que na geometria Euclidiana é 1800 e na geometria Hiperbólica é menor do que 180º.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: IMPA, 2000.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Hiperbólica.** Goiânia: UFG, 2002.

CEDERBERG, Judith N. **A Course in Modern Geometries.** 2ª.ed. New York: Springer-Verlag, 2000.