SECÇÕES CÔNICAS: DAS PROPRIEDADES REFLETORAS ÀS APLICAÇÕES[1]

CONIC SECTIONS: FROM THE REFLECTING PROPERTIES TO THE APPLICATIONS

Ademilson Marcos Tonin[2]
Alcibíades Gazzoni[3]

RESUMO

As cônicas têm despertado o interesse de muitos matemáticos. Isto tem ocorrido desde o III século a.C. Mas, segundo Eves (1995), o único matemático que encontrou aplicação prática para tais curvas foi Arquimedes. Com o passar do tempo e com o avanço tecnológico, as cônicas assumiram um papel importante nos mais variados campos, tais como: astronomia, medicina, arquitetura, problemas físicos e outros. Essa importância é devido à existência de uma interessante propriedade, denominada propriedade refletora da parábola, da elipse e da hipérbole, na qual se baseiam grande parte das aplicações das cônicas. Por isso, deu-se ênfase, neste estudo bibliográfico, à demonstração dessas propriedades, em termos da geometria, uma vez que isso é pouco realizado, embora todos façam sua citação.

Palavras-chave: secções cônicas, propriedades de reflexão.

ABSTRACT

The conics have aroused the interest of many mathematicians. This has taken place since the 3rd. century B.C. But, according to Eves (1995), Archimedes was the only mathematician who found practical application for such curves. As time passes and technology improves, the conics have taken an important role in very different fields, such as astronomy, medicine, architecture, physical problems and others. This importance is due to the existence of an interesting property called reflecting property of the parabola, ellipse and hyperbole, on which a big part of the conic applications is based. Thus, in this bibliographical study, the demonstration of these properties was emphasized in terms of geometry, which is scarcely done, although everyone makes such a reference.

Keywords: conic sections, reflecting properties.

[1] Trabalho de Iniciação Científica - FAPERGS/PIBIC - UNIFRA.

[2] Acadêmico do Curso de Matemática Aplicada Computacional - UNIFRA.
[3] Orientador - UNIFRA.

INTRODUÇÃO

Durante o primeiro século da Idade Helenística (III século a.C.), três matemáticos se destacaram dos demais da época. Esses homens, segundo Eves (1995), foram Euclides, Arquimedes e Apolônio e é por causa deles que o período de cerca de 300 e 200 a.C. foi denominado "Idade Áurea" da matemática grega.

O primeiro deles, Euclides teria dado a sua contribuição no estudo das cônicas, num livro citado, anos mais tarde, por Apolônio, mas que, infelizmente, não chegou aos nossos dias, não se sabe ao certo quais os aspectos das cônicas estudadas por Euclides.

Já Arquimedes de Siracusa, matemático grego (287-212 a.C.), sucessor de Euclides na Escola de Alexandria, foi um dos maiores cientistas de todos os tempos, tendo escrito uma obra sobre a "Quadratura da Parábola" em que calculou a área de um segmento de parábola, usando o seu método de exaustão.

Arquimedes encontrou aplicação prática para as cônicas, tendo recorrido a elas quando Siracusa foi cercada pelos romanos, tornando mais eficazes as defesas da cidade, o que permitiu resistir durante mais tempo. Esta aplicação prática consistiu na construção de espelhos parabólicos ("ustórios") que refletiam os raios solares, conseguindo desta forma, incendiar as galeras romanas. Construiu também catapultas com um maior alcance recorrendo, novamente, aos conhecimentos que tinha das propriedades da parábola.

O terceiro deles, Apolônio de Perga, era cerca de 25 anos mais novo do que Arquimedes, nasceu por volta de 262 a.C. em Perga, no sul da Ásia Menor. Foi Apolônio que aprofundou o estudo das cônicas, escrevendo seu célebre tratado sobre essas curvas. Secções Cônicas é uma obra extraordinária que lhe deu o título de "O Grande Geômetra", pelos seus contemporâneos. Com cerca de 400 proposições em seus oito livros, Secções Cônicas é um estudo exaustivo dessas curvas.

Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio e tomados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas.

Antes de Apolônio, os gregos extraíam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da secção meridiana fosse menor que, igual a ou maior que o ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam, respectivamente, uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as secções cônicas de modo semelhante ao que se obtém hoje, isto é, a partir de um cone duplo circular reto. Para isso, consideram-se duas retas e e g não perpendiculares, mas concorrentes em um ponto V. Mantendo-se fixa a reta, faz-se g girar 360 graus em torno dela, conservando fixo o ângulo entre estas retas. Nestas hipóteses, a reta g gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas (superior e inferior), separadas pelo vértice V (Figura 1). A reta g é denominada geratriz da superfície cônica e a reta e, o eixo da superfície.

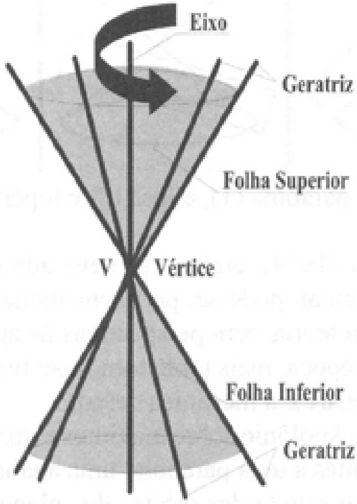

Figura 1. Superfície Cônica.

Denomina-se secção cônica ao conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

Desse modo, quando uma superfície cônica é secionada por um plano qualquer, que não passa pela origem V, a superfície será (Figura2):

I) uma parábola, se o plano for paralelo a uma geratriz da superfície;
II) uma elipse, se o plano não for paralelo a uma geratriz e intercepta apenas uma das folhas da superfície. Particularmente uma circunferência (caso particular de elipse), se o plano for perpendicular ao eixo;
III) uma hipérbole, se o plano não é paralelo a uma geratriz e intercepta as duas folhas da superfície. É importante salientar que a hipérbole é uma única curva, constituída por dois ramos.

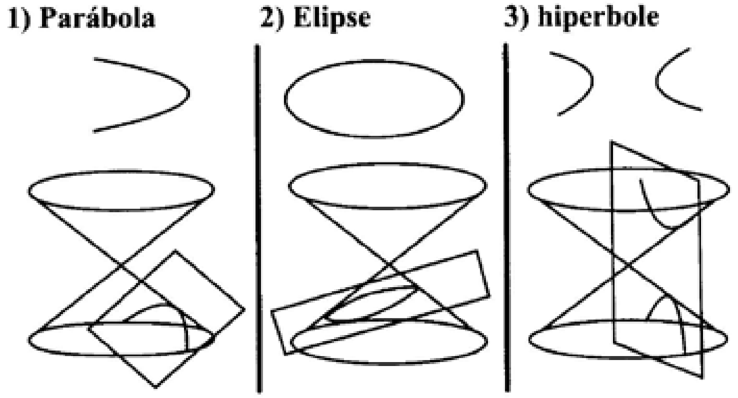

Figura 2. Superfície: parábola (1), elipse (2) e hipérbole (3).

Segundo Boyer (1974), embora se deva admirar Apolônio por sua elevada atitude intelectual, pode-se, pertinentemente, observar que o que, em seu tempo era bela teoria, sem perspectivas de aplicabilidade à ciência ou engenharia de sua época, mais tarde tornou-se fundamental em campos como a dinâmica terrestre e a mecânica celeste.

Os teoremas de Apolônio sobre máximos e mínimos, na verdade, são teoremas sobre tangentes a uma parábola; uma análise de trajetórias locais seria impossível, e um estudo das órbitas dos planetas é impensável sem referência às tangentes a uma elipse.

Como, no presente trabalho, teve-se por objetivo demonstrar as propriedades de reflexão das cônicas e explicitar algumas de suas aplicações, fêz-se um estudo individual dessas propriedades, iniciando sempre com a definição das três curvas: parábola, elipse e hipérbole.

PARÁBOLA

Definição: Dados um ponto F e uma reta d de um plano, chama-se parábola o conjunto dos pontos desse plano, eqüidistantes de d e F.

Na prática, esta curva é de grande aplicabilidade, principalmente em problemas físicos. As trajetórias de bolas ou de um projétil, dentro da atmosfera terrestre, são, em geral, arcos de parábolas, tanto mais perfeitos quanto menor a resistência do ar.

Mas dentre todas as aplicações da parábola, destaca-se, pela sua importância, a que faz uso da propriedade refletora dessa curva e que pode ser enunciada pelo seguinte teorema, conforme Wagner (1997).

Teorema: A reta t, tangente em um ponto P sobre a parábola, faz ângulos iguais com a reta que passa por P paralela ao eixo de simetria e com a reta que passa por P e o foco F (Figura 3).

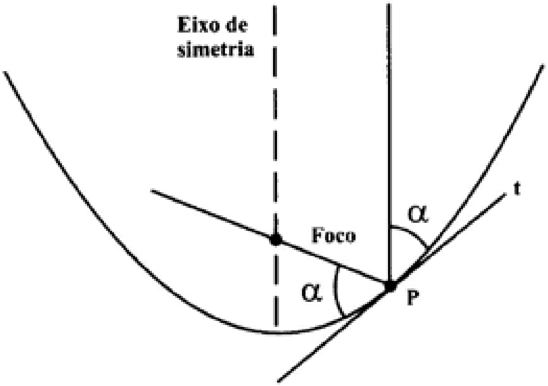

Figura 3. A propriedade da reflexão.

Demonstração

Consideremos um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d, e ainda a reta t, bissetriz do ângulo (Figura 4). Mostraremos, primeiramente, que P é o único ponto tangente à parábola.

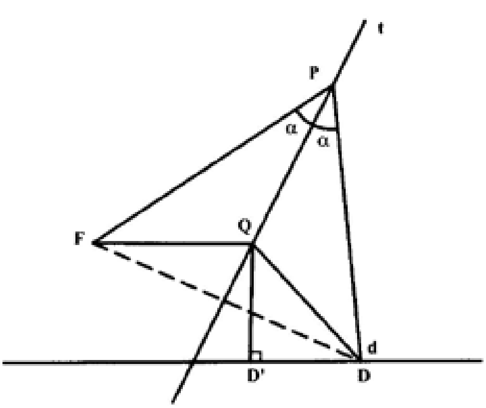

Figura 4. Um ponto P da parábola com foco F e diretriz d.

No triângulo PFD, como PF = PD (pois P é ponto da parábola) então a reta t, bissetriz do ângulo, é também mediana e altura desse triângulo. Em outras palavras, a reta t é mediatriz do segmento FD.

Seja Q um ponto arbitrário pertencente a t com Q P. Se D′ é a projeção de Q sobre d, tem-se:

QF = QD > QD′.

Daí resulta que Q é exterior à parábola, isto é, o ponto P da reta t pertence à parábola e todos os pontos Q P t são exteriores. Logo, t é tangente à parábola em P.

Prolongando-se o segmento DP, obtém-se a semi-reta PY. Desse modo, o ângulo, formado pela semi-reta PY e a reta t, é congruente ao ângulo formado pelo segmento PD e a reta t. Isso se deve ao fato de serem ângulos opostos pelo vértice. E como t é bissetriz do ângulo, então, o ângulo formado, pelo segmento PF e a reta t é congruente ao ângulo formado pela semi-reta PY e a reta t, como se queria demonstrar (Figura 5).

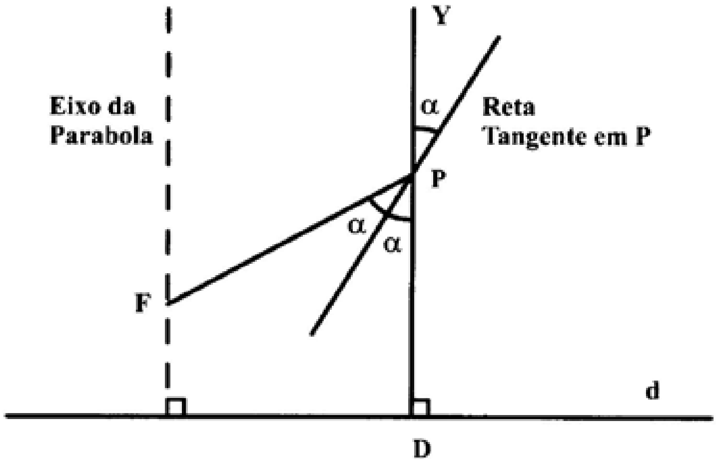

Figura 5. Representação gráfica.

As parábolas são usadas no desenho de espelhos parabólicos, antenas de TV, refletores, faróis de automóveis, etc.

Pela propriedade anterior, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco e vice-versa.

Nesse exemplo (antenas de TV), os sinais recebidos via satélite são muito fracos. Diante disso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam amplificados (Figura 6).

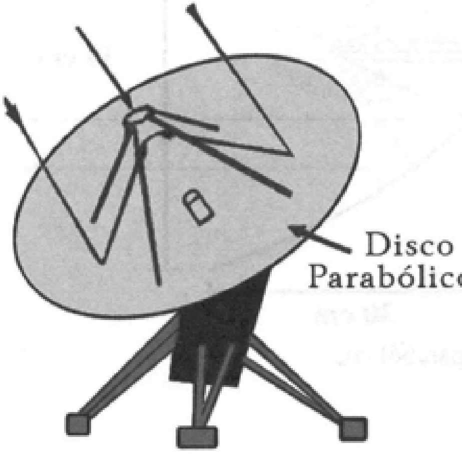

Figura 6. Antena Parabólica.

Portanto, a superfície da antena deve possuir um formato parabólico para que todas as ondas incidentes de uma mesma direção, paralelas ao eixo de simetria, sejam refletidas para um único ponto.

Quanto aos refletores e faróis de automóveis, sua parte refletora deve ter, também, um formato parabólico, com a lâmpada no foco, para que os raios de luz que incidem na parte refletora sejam propagados em linha reta de modo que haja maior alcance e eficiência da luminosidade (Figura 7).

PROBLEMA

Uma indústria produz refletores parabólicos, como ilustra a ilustra a figura 7. Qual deve ser a distância do vértice para uma fonte de luz produzir um feixe de raios paralelos?

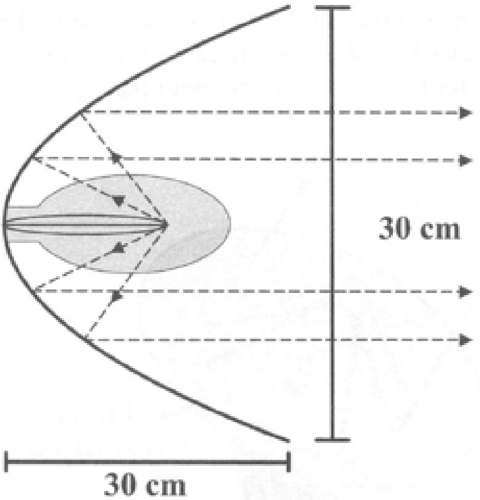

Figura 7. Refletor parabólico.

Solução

Fazendo uma modelagem matemática do problema em um conveniente sistema de eixos coordenados (Figura 8), tem-se:

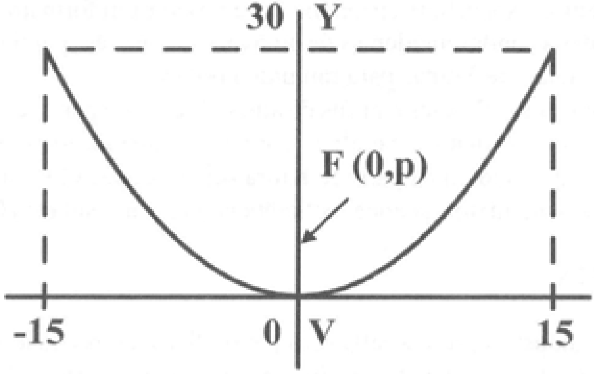

Figura 8. Modelo gráfico.

Pela propriedade de reflexão da parábola, para que a luz reflita raios paralelos, esta deve estar, exatamente, no foco do refletor parabólico. Portanto, basta determinar as coordenadas do ponto F e encontrar a distância entre os pontos V e F.

Através dos cálculos, obtém-se que a distância do vértice ao foco é de 1,875 cm.

Portanto, para que o refletor produza um feixe de raios luminosos paralelos, a fonte de luz deve estar a 1,875 cm do vértice.

ELIPSE

Definição: Elipse é o conjunto de todos os pontos do plano em que a soma das distâncias, a dois pontos fixos desse plano, é constante.

Assim como a parábola, a elipse também tem aplicações importantes.

No século XVII, o astrônomo e matemático alemão Johannes Keppler, após muita persistência e observações astronômicas, concluiu que os planetas se deslocavam ao redor do sol em órbitas elípticas, sendo o sol um dos focos (1ª Lei de Keppler). Essa lei rege todos os planetas naturais, cometas e asteróides, bem como todos os satélites artificiais, cujas trajetórias podem ser, cuidadosamente, preestabelecidas pelos matemáticos, minuto a minuto.

A elipse também possui uma propriedade de reflexão interessante e que tem conseqüências práticas, Figura 9. Essa propriedade é enunciada, conforme Valladares (1998), pelo seguinte teorema.

Teorema: Uma reta r, tangente a uma elipse em um ponto P, faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos F1 e F2.

Demonstração

Seja uma elipse E, com focos F1 e F2, P um ponto pertencente à elipse e, ainda, r uma reta tangente a E em P, formando ângulos iguais com os raios focais F1P e F2P, como ilustra a figura abaixo.

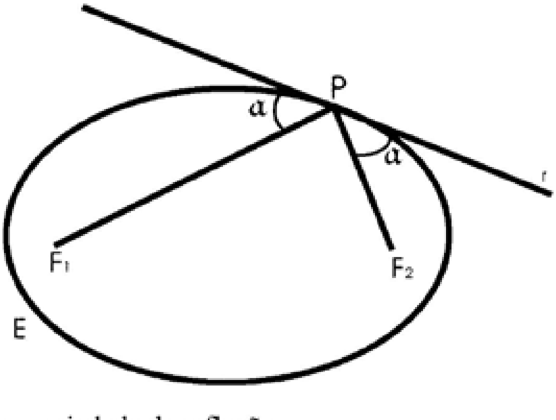

Figura 9. A propriedade da reflexão.

Pela definição de elipse, tem-se que P E, se e somente se d(P, F1) + d(P, F2) = 2a, em que 2a é a constante da definição.

Então, um ponto A não pertence à elipse se, e somente se d(A, F1) + d(A, F2) 2a.

Portanto, r será tangente à E em P se, e somente se intersectar E em P e , resultar d(A, F1) + d(A, F2) d(P, F1) + d(P, F2).

Seja P E e r uma reta tangente à elipse de tal modo que P r e, o ângulo entre e r seja igual ao ângulo entre e r.

Deve-se mostrar que r é tangente a E em P.

Tomando sobre r um ponto A P e, considerando um ponto simétrico de F1, em relação a r (Figura 10).

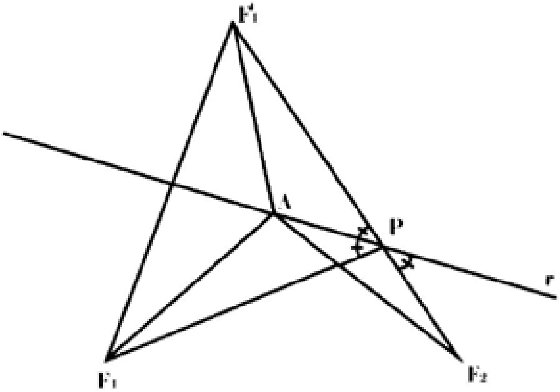

Figura 10. A reta r é tangente à elipse em P.

A reta r é mediatriz de F1F´1, isto é, d(P, F1) = d(P, F´1) e também d(A, F1) = d(A, F´1). Por construção, a reta r faz ângulos iguais com e e, pela simetria, os ângulos e também são iguais. Resulta então, que os segmentos PF2 e PF´1 fazem ângulos iguais com r e, portanto, os pontos F´1, P e F2 pertencem à mesma reta. Então, como P é um ponto da elipse E, como d(A, F1) + d(A, F2) > 2a, conclui-se que P é o único ponto de r que pertence à elipse, o que mostra que essa reta tangencia a elipse em P, como se queria demonstrar.

Essa propriedade é usada para construir refletores odontológicos, os quais são luminárias com espelho elíptico que possui a propriedade de concentrar os raios luminosos refletidos em um único ponto. Essa luminária é ajustada pelo dentista de modo a concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando, no caso, o dente que está sendo tratado (Figura 11).

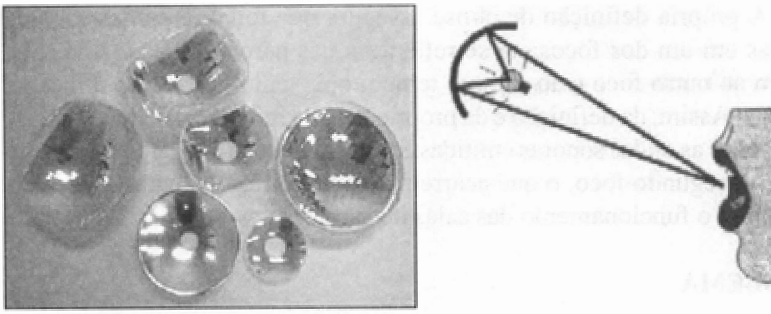

Figura 11. Refletores Odontológicos.

Na medicina, a propriedade refletora da elipse é aplicada, por exemplo, em litotripsia, um tratamento para pedras nos rins. Coloca-se um refletor com seção transversal elíptica de tal forma que a pedra no rim está em um dos focos. Em seguida, ondas sonoras de alta intensidade, no outro foco (situado no aparelho), são refletidas para a pedra e a destroem sem causar dano algum ao tecido vizinho.

Em alguns castelos de monarcas europeus excêntricos e em certos museus americanos de ciência, existem as chamadas salas de sussurros, que são construções ovais projetadas fixando-se dois pontos F1 e F2, que ficam à altura da cabeça das pessoas (Figura 12). Duas dessas, cada uma com a cabeça em um dos pontos (F1 e F2) podem se comunicar em voz sussurrada, inaudível no restante da sala.

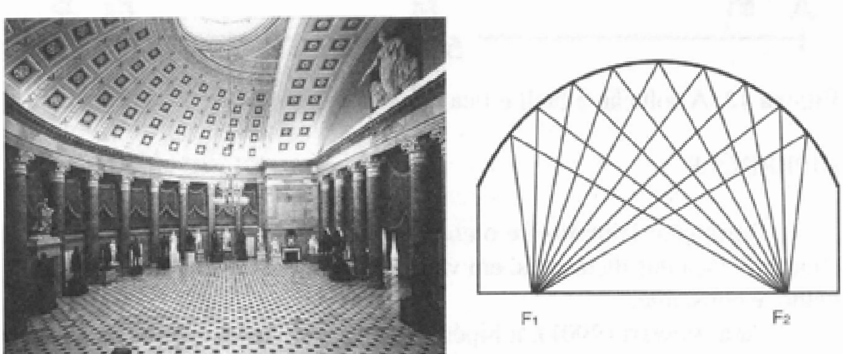

Figura 12. Sala de Sussurros e à direita, como os raios se propagam.

A própria definição de elipse assegura que todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos, ao se refletirem nas paredes elípticas da sala, chegam ao outro foco e ao mesmo tempo, pois terão percorrido a mesma distância. Assim, da definição e da propriedade de reflexão da elipse, deduz-se que todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos chegarão ao mesmo tempo no segundo foco, o que acarreta uma amplificação natural do som, explicando o funcionamento das salas de sussurros.

PROBLEMA

Uma sala é projetada de tal forma que uma seção transversal, contendo os pontos F1 e F2, é elíptica, como mostra a figura 13. Sendo M o ponto médio de , a que distância de M devem estar os pontos F1 e F2, de modo que duas pessoas situadas, em cada um desses pontos, possam se comunicar em voz sussurrada e inaudível no restante da sala?

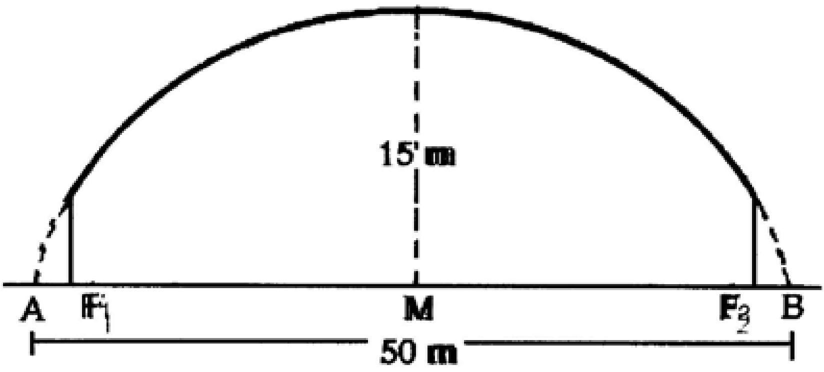

Figura 13. A solução é fácil e fica como um desafio.

HIPÉRBOLE

Definição: Hipérbole é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos desse plano, é constante.

Para Stewart (2001), a hipérbole é usada, por exemplo, no sistema de navegação Loran (Long Range Navigation). Duas estações de rádio localizadas em A e B (focos da hipérbole) transmitem, simultaneamente, sinais para um barco ou um avião localizado em um ponto P (Figura 14).

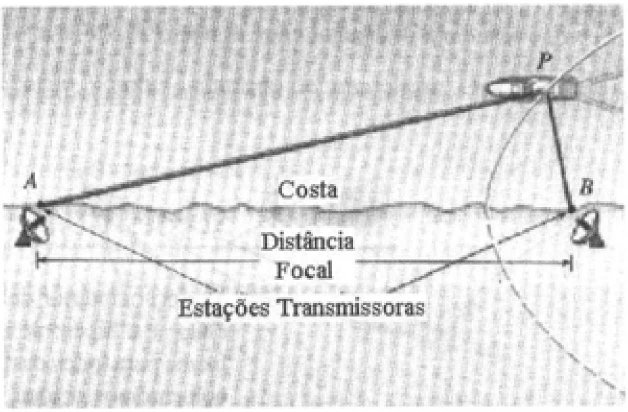

Figura 14. Sistema de navegação LORAN.

O computador de bordo converte a diferença de tempo na recepção desses sinais em diferença de distância, e isso, de acordo com a definição de uma hipérbole, localiza o navio ou o avião em um ramo da hipérbole.

Assim como as outras seções cônicas, a hipérbole também possui uma propriedade de reflexão, que é dada, segundo Ávila (1997), pelo teorema a seguir.

Teorema: A reta tangente a uma hipérbole, em um ponto P, é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais F1P e F2P.

O que o teorema afirma é que todo raio incidente que passa por um dos focos do espelho hiperbólico, toma a direção do outro foco da hipérbole (Figura 15).

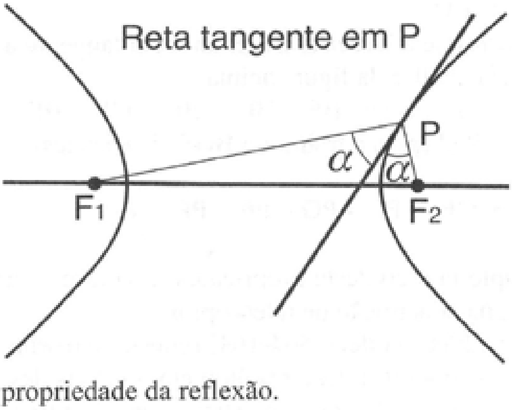

Figura 15. A propriedade da reflexão.

Demonstração

Para a demonstração do teorema, prova-se primeiramente que a bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$ é também a reta tangente à hipérbole em P (Figura 16).

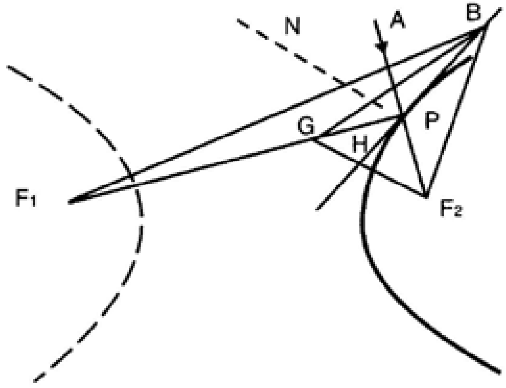

Figura 16. A bissetriz de $F_1\hat{P}F_2$ é tangente à hipérbole em P.

Supondo que a bissetriz e a tangente sejam a mesma reta. Seja B um ponto qualquer da bissetriz; $F_2G \perp BP \perp NP$, donde NP e GF2 são retas paralelas e o triângulo PGF2 é isósceles de base GF2. Como conseqüência, os ângulos desse triângulo em G e F2 são iguais. Mas o ângulo em F2 e também, são iguais, por serem correspondentes. Ainda, o ângulo é igual ao ângulo , pois são alternos internos. Portanto, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Disso e da lei de reflexão da luz, conclui-se que este último ângulo é, realmente, o ângulo de reflexão, isto é, o raio refletido passa por F1.

Resta provar que a bissetriz BP é, também tangente à hipérbole em P. Realmente, pela análise da figura acima,

$BF_1 < BG + GF_1$, então, $BF_1 - BF_2 < BG + GF_1 - BF_2$

Mas BG = BG2 (pois o triângulo BGF_2 é isósceles),

portanto,

$BF_1 - BF_2 < GF_1 = PF_1 - PG = PF_1 - PF_2 = d$

Um exemplo prático desta propriedade encontra-se na óptica, mais especificamente, na construção de telescópios.

Em 1609, Galileu Galilei (1564-1642) construiu o primeiro telescópio para observação astronômica. Isso resultou em notáveis descobertas e, em pouco tempo, Galileu revolucionou a astronomia. Este tipo de telescópio, denominado refrator, funcionava com base na refração da luz.

Por ser composto de lentes, havia vários inconvenientes, como por exemplo, as deformações das imagens e a decomposição da luz branca em várias cores (aberrações cromáticas), produzindo um efeito indesejável.

Algumas décadas após a criação do telescópio refrator, Isaac Newton (1642-1727) criou o telescópio refletor que é constituído por um espelho parabólico no fundo de um tubo. Os raios luminosos vindos do espaço refletem no espelho e se dirigem para o foco. Mas antes deste há um espelho plano (Figura 17). Com isso, os raios que iriam formar a imagem no foco são novamente refletidos e vão formar a imagem em um ponto comum, fora do tubo do telescópio, onde se encontra o observador.

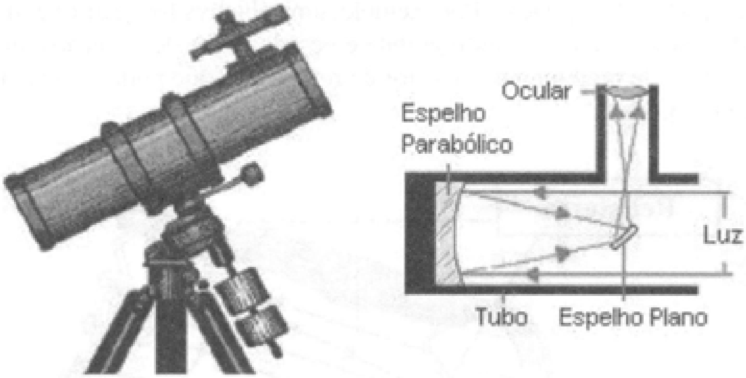

Figura 17. Telescópio Refletor de Newton.

Este tipo de telescópio evita os inconvenientes causados pelo telescópio refrator.

Em 1672, o astrônomo francês Cassegrain aperfeiçoou o telescópio criado por Newton. O telescópio refletor de Cassegrain é constituído, basicamente, por dois espelhos, um maior, denominado primário, que é parabólico, e outro menor, secundário, que é hiperbólico. Os dois espelhos estão dispostos de modo que o eixo da parábola e da hipérbole coincida e que o foco da primeira coincida com um dos focos da segunda (Figura 18).

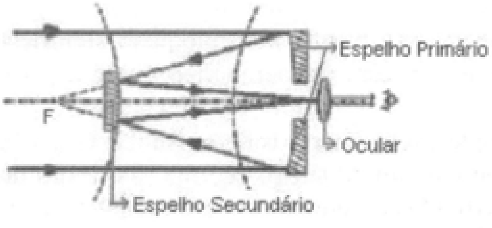

Figura 18. Funcionamento do Telescópio de Cassegrain.

Ao serem refletidos pelo espelho parabólico, pela propriedade de reflexão da parábola, os raios de luz são direcionados para o foco. Como este coincide com o foco da hipérbole, pela propriedade de reflexão desta, os raios de luz refletem-se no espelho hiperbólico e seguem em direção ao outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam através de um orifício no centro do espelho, atrás do qual está uma lente ocular que corrige a trajetória da luz, a qual finalmente chega aos olhos do observador ou à película fotográfica.

A vantagem do telescópio refletor sobre o refrator reside no fato de ter um comprimento menor, pois aquele não necessita de lentes, com o mesmo poder de ampliação. Por exemplo, uma objetiva fotográfica com 500 mm de distância focal é muito grande e pesada se for de refração e que se torna leve e de fácil manuseio se for de reflexão, o que pode ser vantajoso (Figura 19).

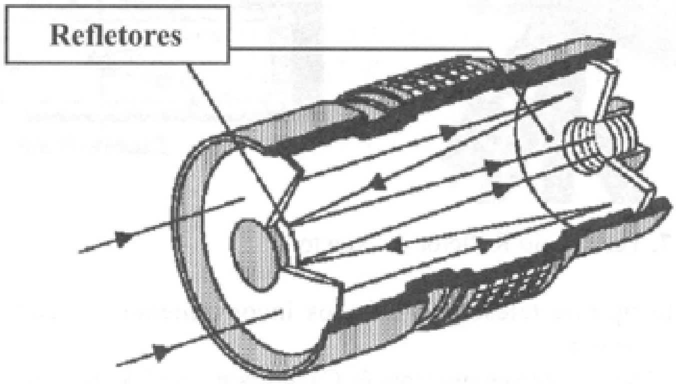

Figura 19. Objetiva Fotográfica.

Para compreender a vantagem do espelho hiperbólico de Cassegrain sobre o espelho plano de Newton, basta observar que o espelho plano não pode estar muito próximo do foco, sob pena de o ponto de observação da imagem ficar dentro do telescópio. Mas o espelho plano precisa ser de razoável tamanho. Isso resulta num bloqueio significativo dos raios luminosos incidentes no espelho parabólico que é a parte principal do telescópio.

Outro exemplo é o telescópio refletor Hubble (em órbita desde 1990 a uma distância de 600 km da terra), que faz uso destas propriedades de reflexão (Figura 20). O seu espelho primário tem 2,4 m de diâmetro. Por estar fora da atmosfera, as imagens que o telescópio recolhe do espaço são muito mais nítidas do que as recebidas pelos telescópios situados no solo. Isso se deve ao fato de que os raios de luz não são absorvidos e nem distorcidos pela atmosfera.

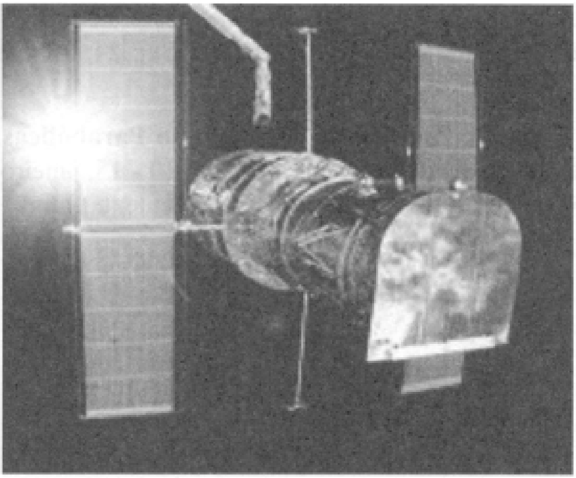

Figura 20. Telescópio Espacial Hubble.

Um telescópio de refração com o mesmo poder de ampliação do Hubble seria tão grande e pesado que nenhum foguete espacial seria capaz de o pôr em órbita.

CONCLUSÃO

Com o estudo realizado, pode-se perceber, claramente, que as secções cônicas são de grande importância nas mais diversas áreas da ciência. Sua propriedade de reflexão desempenha um papel de grande utilidade nas aplicações citadas neste trabalho. Mas, apesar do seu grande uso e interesse, constatou-se, com o estudo bibliográfico, que são poucos os livros que fazem uma demonstração dessa importante propriedade das secções cônicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo. A Hipérbole e os Telescópios. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, nº 34, p.22 - 27, maio/agosto, 1997.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Unicamp, 1995

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira, 2001.

VALLADARES, Renato J. C. Elipse, Sorrisos e sussurros. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo, nº 36, p.24 - 28, janeiro/abril, 1998.

WAGNER, Eduardo. **Por que as Antenas são Parabólicas**. Revista do Professor de matemática. São Paulo, nº 33, p. 10 - 15, janeiro/abril, 1997. < http://www.uci.agh.edu.pl/htdocs/gifs/space/indextxt.html >. Acesso em 13 de maio. 2004.