TIPOS DE TAXAS DE JUROS E ALGUMAS DE SUAS UTILIZAÇÕES NO MERCADO FINANCEIRO[1]

TYPES OF INTEREST RATES AND SOME OF THEIR USES IN THE FINANCIAL MARKET

Alexandre Bevilaqua Borsa[2]
Dauter Dutra Berlese[3]
José Zanella[4]

RESUMO

A matemática financeira já faz parte do cotidiano das pessoas. Em geral, apenas as escolas técnicas e profissionalizantes vêm ministrando esta disciplina. O emprego da matemática financeira, como ferramenta de auxílio para cálculo de juros, taxas e opções de pagamento, possibilita também às empresas atingirem suas metas de produção, de vendas e conhecerem seus verdadeiros custos. A matemática financeira fornece subsídios que possibilitam controlar e verificar resultados alcançados. No âmbito pessoal, ela fornece instrumentos precisos para a tomada de decisões sobre questões do dia-a-dia, como a conveniência de se adquirir um bem à vista ou a prazo, na decisão sobre a contratação de um financiamento e qual a aplicação financeira mais atrativa para investir as economias disponíveis. Para melhor entender tais conceitos, vamos demonstrar, por meio de exemplos do nosso cotidiano, como são calculados esses juros.

Palavras-chave: matemática financeira, taxas de juros.

ABSTRACT

The financial mathematics is already part of people's everyday life. In general, only technical and professional schools have been teaching this discipline. The use of financial mathematics, as a tool for calculating interests, rates and payment options, also makes it possible for enterprises to accomplish their goals of productions and sales, as well as getting to know their real costs. The financial mathematics provides subsidies which help to control and verify the results obtained. Within the personal ambit, it provides precise tools for the decision making about day-by-day questions, as the

---

[1] Trabalho Final de Graduação - TFG.
[2] Acadêmico do Curso de Matemática, Licenciatura Plena - UNIFRA.
[3] Orientador - UNIFRA.
[4] Coorientador - UFSM.

convenience to acquire some goods in cash or in installments, in the decision about a financing charter and the most attractive financial application to invest available savings. In order to better understand such concepts, the way in which these interests are calculated is going to be demonstrated by means of everyday examples.

Keywords: financial mathematics, interest rates.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho de pesquisa, a matemática financeira será apresentada de uma forma diferente da convencional, aplicada a situações práticas do momento. Em vez de enunciar conceitos a serem decorados, seus fundamentos serão apresentados por meio de uma linguagem simples com exemplos práticos, desde seu princípio, nela, os conceitos são simples, até a parte avançada que, como se poderá notar, será de fácil compreensão.

Taxa de juro é a razão entre o juro obtido no final de um período financeiro que pode ser ao dia (*ad*), ao mês (*am*), ao bimestre (*ab*), ao semestre (*as*), ao ano (*aa*), etc e o capital inicial aplicado.

A noção de juros surgiu a partir da necessidade que as pessoas tinham em compensar seus empréstimos, compras, trocas, etc. O objetivo básico é identificar os diferentes tipos de taxas aplicados no mercado.

Os juros são formados e incorporados ao capital no decorrer do tempopor meio de critérios ou regimes de capitalização, que podem ser identificados como regime de juros simples e regime de juros compostos.

Serão estabelecidas as diferenças entre os seguintes tipos de taxas:

- Taxa de juros proporcional;
- Taxa de juros equivalente;
- Taxa de juros efetiva;
- Taxa de juros nominal;
- Taxa de juros real;
- Taxa de juros aparente.

Objetivamente mostra-se a importância de se terem claros esses conceitos sobre taxas de juros, pois podem direcionar a análise de um problema financeiro levando a um resultado distorcido.

A taxa de juros poderá apresentar-se de duas formas:

TAXA PERCENTUAL OU CENTESIMAL	TAXA UNITÁRIA
$r = 5\% = \frac{5}{100}$	$\frac{0,05}{1} = 0,05 = i$
Usual na Apresentação	Usual em Cálculo

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os textos sobre taxas de juros são inúmeros e, na sua maioria, contemplam o assunto com outros conteúdos, portanto contextualizados. Veras (1991, p. 72 e 73) faz abordagem sobre taxa de juros proporcional e equivalente. Samanez (1999, p. 29) também destaca aspectos interessantes sobre taxas de juros, efetiva e nominal e Parente (1953) ressalta as taxas de juros real e aparente.

DESENVOLVIMENTO

A seguir, mostraremos como as taxas de juros são calculadas. Basicamente, vamos efetuar análises e comparações de várias entradas e saídas de dinheiro em diferentes momentos, pois receber um certo capital hoje ou no futuro, não é a mesma coisa.

Taxa de juros proporcional

Duas taxas são proporcionais quando existe uma proporção entre as grandezas aplicadas sucessivamente no cálculo de juros simples de um mesmo capital, durante exatamente o mesmo tempo.

Logo, se e são taxas proporcionais e são, respectivamente, os números de períodos que completam o prazo de aplicação, obtém-se:

$$i_1 \cdot n_1 = i_2 \cdot n_2 \qquad (1)$$

Exemplos:

1-) Tem-se uma taxa de juros de 5% am que é proporcional à taxa de 60% *aa*; então, em um ano, obtém-se:

$i_1 = 5\%\ am$ $\qquad$ $i_2 = 60\%\ am$

$n_1 = 12\ meses$ $\qquad$ $n_2 = 1\ ano$

Logo: $\quad 0{,}05 \times 12 = 0{,}60 \times 1$

$$60 = 60$$

2) Qual a taxa proporcional a 36% nos períodos:

a) Mês

$$k = 12 \rightarrow i_{12} = \frac{36\%}{12} = 3\%\ am$$

b) Trimestre

$$k = 4 \rightarrow i_4 = \frac{36\%}{4} = 9\%\ at$$

De forma genérica, consideramos: k o número de períodos menores contidos no maior;

$i \rightarrow$ Taxa de juros do período maior

$i_k \rightarrow$ Taxa de juros do período menor

$$i_k = \frac{i}{k} \qquad (2)$$

Exemplo: Taxa proporcional em 36 dias à taxa de 26% *aa*.

$$k = \frac{360}{36} = 10$$

$$i_{10} = \frac{i}{10} = \frac{26\%}{10} = 2{,}6\%\ em\ 36\ dias$$

Taxa de juros equivalente

São as taxas aplicadas a capitais iguais em tempos iguais que produzirão juros também iguais e, conseqüentemente, montantes iguais.

É importante salientar que se deve observar o sistema de capitalização. Assim, teremos duas situações:

a) Sistema de Capitalização Simples (Juros Simples)

$$FV = PV\,(1 + i \times n) \tag{3}$$

i → Taxa unitária referente a um período
i_k → Taxa unitária referente a uma parcela $1/k$ do período anterior
k → número de períodos menores contidos no maior

Aplicando o conceito de taxa equivalente para o sistema de capitalização simples, tem-se:

$$FV(i) = FV(i_k)$$
$$PV(1 + i \times 1) = PV(1 + i_k \times k)$$

$$i = i_k \times k \text{ ou } ik = \frac{i}{k}$$

Verifica-se assim a mesma expressão da taxa proporcional. Portanto, a juros simples, taxas proporcionais são equivalentes.

Exemplos:

1) Encontrar a taxa de juros simples mensal, proporcional a 48% *aa*.

$$\text{Como } 1\ ano = 12\ meses\text{: } 48\ \%\ aa = \left(\frac{48}{12}\right)\%\ am = 4\%\ am$$

Encontrar a taxa simples unitária anual, proporcional a 20,05% *am*.

$$i = 20{,}05\%\ am = (20{,}05\% \times 12)aa \Rightarrow i = 240{,}6\%\ aa$$

Logo a taxa unitária correspondente:

$$i = \frac{240{,}6}{100}\ aa \Rightarrow i = 2{,}406\ aa$$

b) Sistema de Capitalização Composta (Juros Compostos)

$$FV = PV(1 + i)^k \qquad (4)$$

→ taxa unitária referente a um período

→ taxa unitária referente a uma parcela $1/k$ do período

Aplicando o conceito de taxa equivalente para o sistema de capitalização composta, fica:

$$FV(i) = FV(i_k)$$

$$PV(1 + i)^1 = PV(1 + i_k)^k$$

$$(1 + i)^1 = (1 + i_k)^k$$

$$i_k = (1 + i)^{1/k} - 1 \qquad (5)$$

Exemplos práticos:

1) Se a inflação mensal se mantivesse fixa em 1,32% *a.m*, qual a inflação acumulada dos 12 meses seguintes?

$$k = 12 \quad i_{12} = 0{,}0132\ am \quad i = ?\ aa$$

$$i = (1 + 0{,}0132)^{12} - 1 = 0{,}1704\ aa$$

$$i = 17{,}04\%\ aa$$

2) Um *CDB* remunera a uma taxa de 24,32% *aa* a juros compostos. Para uma aplicação de 56 dias, qual é o rendimento?

$$k = \frac{360}{56} \quad i_{\frac{360}{56}} = ?\ ap \qquad i = 0{,}2432\ aa$$

$$i_{\frac{360}{56}} = (1 + i)^{\frac{1}{360/56}} - 1 = (1 + 0{,}2432)^{56/360} - 1$$

$$i_{\frac{360}{56}} = 0{,}344\%\ ap$$

Portanto: 3,44% em 56 dias

3) Se você consultou seu extrato de conta bancária, vai encontrar:

	Cliente "A"	*Cliente "B"*
Limite de crédito	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
Número de parcelas (mensais)	6 (1 semestre)	6 (1 semestre)
Taxa do cheque especial ao mês	2.55%	3.95%
Taxa equivalente anu	$k = 12 \quad i_{12} = 2,55\%$ $i = (1+0,0255)^{12} - 1$ $i = 0,3528 \cdot 100$ $i = 35,28\%\ aa$	$k = 12 \quad i_{12} = 3,95$ $i = (1+0,0395)^{12} - 1$ $i = 0,5918 \cdot 100$ $i = 59,18\%\ aa$
Taxa equivalente no período (6 meses = 1 semestre)	$k = 6 \quad i_6 = 2,55$ $i = (1+0,0255)^6 - 1$ $i = 0,1631 \cdot 100$ $i = 16,31\%\ as$	$k = 6 \quad i_6 = 3,95$ $i = (1+0,0395)^6 - 1$ $i = 0,2617 \cdot 100$ $i = 26,17\%\ as$

Observam-se as diferenças das taxas anuais e mensais entre clientes: Enquanto a taxa do cliente "A" é 16,31% as a do cliente "B" é 26,17% as, representando um acréscimo de

$$\Delta\% = \frac{26,17 - 16,31}{16,31} = 60,45\%$$

Ou seja, o custo de um empréstimo para o cliente "B" é 60,45% maior.

As taxas do cliente "A", que é um cliente diferenciado, apresenta um histórico que lhe garante maior credibilidade na instituição, pois possui aplicações em CDB e fundos de investimentos, o que não acontece com o cliente "B".

Taxa de juros nominal e Taxa de juros efetiva

Taxa nominal é a taxa *nominada* na operação financeira, ou seja, é aquela que está no contrato ou que foi informada ao cliente.

Taxa efetiva é a resultante de todos os custos da operação.

A taxa nominal é sempre apresentada pela instituição que realiza a operação financeira, seja uma operação ativa (empréstimos) seja uma operação passiva (aplicação).

Na verdade, existem inúmeros elementos que fazem com que a taxa nominal difira da taxa efetiva.

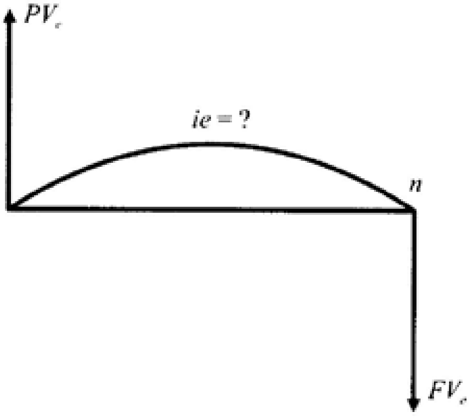
Elementos a considerar na determinação da taxa efetiva:

Cobranças, IOF, IOC, tarifas, CPMF, juros antecipados, critérios diversos de cálculo, exigência de saldo médio, contrapartidas de aplicações, entre outros.

A determinação da taxa efetiva a partir de uma taxa nominal também deve considerar o regime de capitalização SIMPLES ou COMPOSTA.

A determinação da taxa efetiva deve sempre considerar dados efetivos, portanto, se tivermos:

PVe = Valor presente efetivo
FVe = Valor futuro efetivo
n = prazo da operação
Se o regime é simples, tem-se:



$$i_e = \frac{FV_e - PV_e}{PV_e \cdot n} \qquad (6)$$

Se o regime é composto, tem-se:

$$i_e = \left(\frac{FV_e}{PV_e}\right)^{1/n} - 1 \qquad (7)$$

Portanto, devem-se determinar os valores efetivamente pagos (FV_e), os efetivamente recebidos (PV_e), utilizá-los nas fórmulas (6) e (7), conforme o regime de capitalização, obtendo-se assim o custo efetivo.

Exemplo prático:

1) *Um cliente do banco A realizou um empréstimo de R\$ 4.000,00 para pagamento para 60 dias. O banco cobra juros simples de 6% am antecipados. Nesse tipo de operação é cobrada uma taxa de abertura de crédito de R\$ 20,00 com IOF de 0,2%. Determinar a taxa efetiva da operação (custo efetivo para o cliente), e o percentual de variação da taxa nominal para a taxa efetiva.*

Encaminhamento da solução:

Para determinação da taxa efetiva, devem-se utilizar dados efetivos, que são:

PV_e = Valor que o cliente efetivamente recebe.
FV_e = Valor que o cliente efetivamente paga.

Não se pode esquecer que, neste tipo de operação, existe CPMF no saque e no pagamento da dívida.

$$i_{cpmf} = \text{Taxa CPMF}$$

$$I_o = \text{Taxa IOF}$$

$$J = \text{Juros}$$

$$E = \text{Empréstimo}$$

$$T = \text{Taxa de abertura de crédito}$$

$$PV_e = E - J - IOF - T - CPMF$$

Lembrar que: $E - J - IOF - T = LD$ (Valor que vai para conta)

$$CPMF = PV_e \cdot i_{cpmf}$$

$$PV_e = E - J - IOF - T - i_{cpmf}$$

$$PV_e + PV_e \cdot i_{cpmf} = E - J - IOF - T$$

$$PV_e(1 + i_{cpmf}) = E - J - IOF - T$$

$$PV_e = \frac{E - J - IOF - T}{(1 + i_{cpmf})} \qquad (8)$$

$$IOF\text{: Valor atual} \cdot I_o \cdot n$$

$$\text{Valor atual} = E - J$$

$$J = E \cdot i \cdot n$$

$$\text{Logo: } IOF = (E - E \cdot i \cdot n) \cdot I_o \cdot n$$

$$PV_e = \frac{E - E \,.\, i \,.\, n - (E - E \,.\, i \,.\, n).\, I_o \,.\, n - \mathrm{T}}{1 + i_{cpmf}}$$

$$PV_e = \frac{E(1 - in) - E(1 - in) \cdot I_o\, n - T}{1 + i_{cpmf}}$$

$$PV_e = \frac{E(1 - in) \cdot (1 - I_o\, n) - T}{1 + i_{cpmf}} \qquad (9)$$

$$PV_e = \frac{4.000(1 - 0{,}06 \,.\, 2) \,.\, (1 - 0{,}002 \,.\, 2) - 20}{1 + 0{,}0038}$$

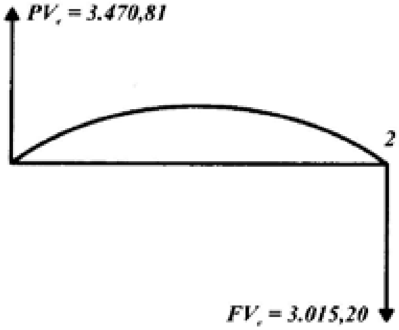
$PV_e = 3.365{,}38 \rightarrow$ ***efetivamente recebido***

$$FV_e = E(1 + i_{cpmf}) \qquad (10)$$

$$FV_e = 4.000(1{,}0038)$$

$FV_e = 4.015{,}20 \rightarrow$ ***efetivamente pago***

Basta agora calcular a taxa efetiva



Considerando o regime de capitalização simples tem-se:

$$i_e = \frac{4.015{,}20 - 3.470{,}81}{3.470{,}81\ .\ 12} = 0{,}0784\ am \Rightarrow 7{,}84\%\ am$$

Considerando o regime de capitalização composta tem-se:

$$i_e = \left(\frac{4.015{,}20}{3.470{,}81}\right)^{1/2} - 1 = 0{,}0756 \text{ am} = 7{,}84\%\ am$$

Assim a variação percentual é $(\Delta\%) = \frac{7{,}56 - 6}{6} = 26\%$, o que significa que o custo efetivo do empréstimo é 26% maior que o 6% apresentado.

<u>Taxa de juros reais e Taxa de juros aparentes</u>

Em uma época de inflação, é necessário muito cuidado ao analisar taxas de juros nas operações financeiras, taxas de crescimento de vendas, de lucro nas operações comerciais e, mesmo, taxas de variações de preços ou salários.

Muitas vezes, uma taxa aparentemente alta, torna-se baixa quando levada em conta a inflação do período considerado, tendo-se então uma taxa aparente e uma taxa real.

Assim, a taxa aparente é aquela que se obtém sem que seja levada em conta a inflação do período e a taxa real é aquela que se obtém após excluída a inflação.

Portanto, quando existe um regime inflacionário, deve-se distinguir, na taxa aparente, duas componentes: uma delas deve-se à inflação e a outra se refere aos juros realmente pagos ou recebidos.

Sendo i_a a taxa aparente, i_r, taxa real de juros e i_i, a taxa de inflação, todas referidas ao mesmo período de tempo, tem-se:

1) Não sendo considerada a inflação, a taxa de ganho do investidor é a taxa aparente.Assim:

$$FV = PV\,(1 + i_a) \qquad (11)$$

2) Sendo considerada a inflação do período, o valor de FV será obtido pela atualização monetária acrescida, sucessivamente, da taxa real de juros:

$$FV = PV\,(1 + i_a)\,(1 + i_r) \qquad (12)$$

Comparando (10) com (11), obtém-se:

$$1 + i_a = (1 + i_r\,(1 + i_i) - 1$$

$$i_a = (1 + i_i)\,(1 + i_r) - 1 \quad \text{Taxa aparente} \tag{13}$$

$$i_r = \left(\frac{1 + i_a}{1 + i_i}\right) - 1 \tag{14}$$

$$i_i = \left(\frac{1 + i_a}{i_r}\right) - 1 \tag{15}$$

Exemplo prático:

O salário de um funcionário de uma empresa aumentou de *R\$750,00* para *R\$ 900,00*. Pede-se: qual é a taxa real e qual é a taxa aparente de aumento deste funcionário se a inflação desde o último aumento é de 15%?

$$\begin{aligned} S_o &= 750{,}00 \\ S_f &= 900{,}00 \\ i_i &= 0{,}150 \\ i_a &= \textit{Taxa aparente} \\ i_r &= \textit{Taxa real} \end{aligned}$$

$$i_a = \frac{S_f - S_o}{S_o} \qquad\qquad i_r = \frac{(1 + i_a)}{(1 + i_a)} - 1$$

$$i_a = \frac{900 - 750}{750} \qquad\qquad i_r = \frac{(1 + 0{,}20)}{(1 + 0{,}150)} - 1$$

$i_a = 0{,}20$ *ou 20% de ganho aparente*

$i_r = 0{,}04$ *ou 4% após excluída a inflação, ganho real*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, foram apresentados, de forma objetiva e prática, os conceitos dos tipos de taxas de juros praticadas no mercado.

Acredita-se que o resultado deste trabalho fornece uma clara noção do que cada taxa representa e da aplicabilidade das mesmas, sendo importante atentar-se para os conceitos e critérios de utilização de cada uma.

Este trabalho propiciou a demonstração de algumas fórmulas que a bibliografia existente não costuma apresentar, dado que existem custos que só recentemente foram agregados a algumas operações financeiras, como é o caso do IOF. Acredita-se ter contribuído, com este trabalho, para elucidar algumas dúvidas de como considerar estes custos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PARENTE, Eduardo; CARITÉ, Roberto. **Matemática comercial e financeira**. São Paulo: FTD, 1996.

SAMANEZ, Carlos Patrício. **Matemática financeira** - Aplicações à Análise de Investimentos. 2°. ed. São Paulo: Makron Books, 1999.

VERAS, Lilia Ladeira. 1993. **Matemática financeira**. São Paulo: Atlas S.A.

BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS

D'AMBRÓSIO, Nicolau Ubiratan. **Matemática comercial e financeira com complementos de Matemática e introdução ao cálculo**. 28. ed. São Paulo: Nacional, 1980.

MARCONDES, Osvaldo. **Matemática financeira**. São Paulo: Ática, 1982.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática financeira**. São Paulo: Atlas S. A, 1987.