

## TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES<sup>1</sup>

### GEOMETRIC TRANSFORMATIONS AND APLICATIONS

Verenice Puntel<sup>2</sup>  
Rosane Rossato Binotto<sup>3</sup>

#### RESUMO

Neste trabalho fez-se um estudo, por meio de pesquisa bibliográfica, das transformações geométricas no plano, as isometrias e as homotetias, e algumas de suas propriedades. Elas são importantes, pois permitem encontrar caminhos diferentes para a resolução de determinados problemas de construções geométricas e para a ampliação ou redução de figuras.

**Palavras-chave:** transformação geométrica, isometria, homotetia, congruência e semelhança.

#### ABSTRACT

In this work, was made a study through bibliographical research about geometric transformations in the plan, isometries and homotheties, and some of its properties. The isometric transformations are important because allow to find different ways to resolve some problems related to the geometric constructions and to the enlargement or reduction of figures.

**Keywords:** geometric transformation, isometry, homothety, congruence and similarity.

#### INTRODUÇÃO

As transformações geométricas no plano são funções bijetoras que associam a cada ponto do plano um outro ponto do plano. Como principais exemplos de transformações geométricas, tem-se as isometrias e as homotetias. Elas podem ser estudadas com o objetivo de resolver problemas de construções geométricas. No caso das homotetias, elas podem ser utilizadas também para a ampliação ou redução de figuras planas. Alguns exemplos dessas construções podem ser encontrados em Rezende & Queiroz (2000) e Wagner (1998).

<sup>1</sup> Trabalho de Iniciação Científica - PROBIC.

<sup>2</sup> Acadêmico do Curso de Matemática - UNIFRA.

<sup>3</sup> Orientadora - UNIFRA.

Além de estudar as isometrias no plano para resolver problemas de construções geométricas, também se pode estudá-las com o objetivo de classificar as figuras quanto à existência ou não de simetrias (GAY, 1998). Enquanto Mortenson (1995), estudou, especialmente as isometrias, explorando a noção de movimento que as figuras podem ou não possuir, sendo que, as translações e as rotações descrevem esta noção, já as simetrias e as reflexões não. Estas descrevem a idéia de reflexão em torno de um espelho. Porém Lima (1996), descreveu um texto cujo objetivo era o de classificar as isometrias e analisar as compostas destas transformações.

## DESENVOLVIMENTO

### ISOMETRIAS

As isometrias, no plano, são transformações geométricas que preservam a distância Euclidiana entre dois pontos, ou seja, se  $\alpha$  é um plano, é uma isometria então para quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  de  $\alpha$  tem-se

$$AB = d(A, B) = T(A)T(B) = d(T(A), T(B)) = A'B',$$

em que  $A' = T(A)$  e  $B' = T(B)$ .

Desse modo, duas figuras são isométricas se elas possuem a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, são congruentes.

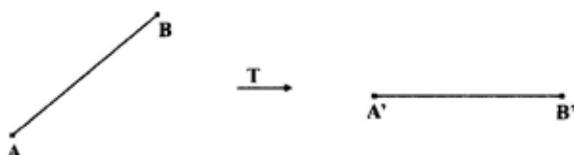


Figura 1.

**Propriedades:** Seja  $\alpha$  um plano dado. Toda isometria  $T: \alpha \rightarrow \alpha$  tem as seguintes propriedades:

I)  $T$  leva pontos colineares em pontos colineares. Conseqüentemente,  $T$  transforma retas em retas.

#### Demonstração:

Consideram-se  $A, B$  e  $C$  pontos colineares tais que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ . Então  $AC = AB + BC$ . Sejam  $A', B'$  e  $C'$  as respectivas imagens desses pontos pela isometria  $T$ . Tem-se então

$$AB = A'B', BC = B'C' = BC \text{ e } A'C'. \quad (*)$$

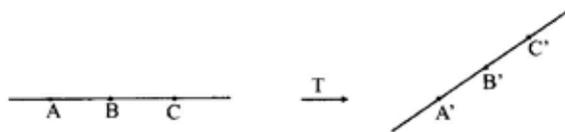


Figura 2.

Se  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  não fossem colineares, então eles determinariam o triângulo  $A'B'C'$  e desse modo, ter-se-ia  $A'C' < A'B' + B'C'$ . Segue de (\*) que  $AC < AB + BC$  o que contraria a hipótese de  $AC = AB + BC$ . Portanto,  $A'C' = A'B' + B'C'$  e  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  são pontos colineares.

II) preserva medidas de ângulos. Conseqüentemente, preserva perpendicularismo de retas.

**Demonstração:**

Considera-se um ângulo  $\theta$  com vértice  $O$  e sua imagem  $\theta' = T(\theta)$ , um ângulo com vértice  $O'$ . Sejam  $A$  e  $B$  pontos, um em cada lado de  $\theta$ , e  $A'$  e  $B'$  pontos, um em cada lado de  $\theta'$ , tais que  $T(A) = A'$ ,  $T(B) = B'$ .

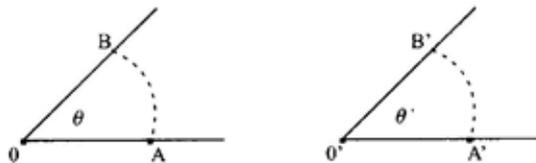


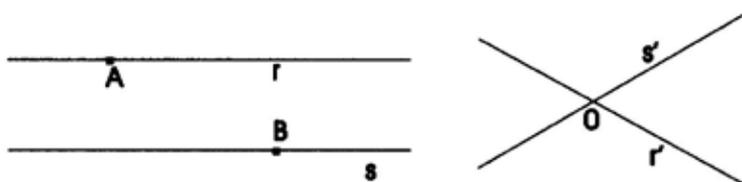
Figura 3.

Como  $T$  é uma isometria, segue-se que  $OA = O'A'$ ,  $OB = O'B'$  e  $AB = A'B'$ . Dessa forma, os triângulos  $AOB$  e  $A'O'B'$  são congruentes, assim os ângulos  $\theta$  e  $\theta'$  também são congruentes.

III) preserva paralelismo de retas.

**Demonstração:**

Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas e suas respectivas imagens  $T(r) = r'$  e  $T(s) = s'$ . Supõe-se por absurdo que as retas  $r'$  e  $s'$  sejam concorrentes no ponto  $O$  com  $O = A' = B'$  sendo  $A' = T(A)$ ,  $B' = T(B)$ ,  $A \in r$  e  $B \in s$ . Isso contraria a definição de isometria, visto que  $A$  e  $B$  são pontos distintos do plano. Portanto  $r'$  e  $s'$  são retas paralelas.



**Figura 4.**

IV) A transformação inversa  $T^{-1}: \alpha \rightarrow \alpha$  da isometria  $T$  é ainda uma isometria.

**Demonstração:**

Sejam  $X$  e  $Y$  pontos distintos do plano  $\alpha$  em que  $T(X) = X'$  e  $T(Y) = Y'$ . Assim  $T^{-1}(X') = X$  e  $T^{-1}(Y') = Y$ . Dessa forma

$d(X, Y) = d(T^{-1}(X'), T^{-1}(Y'))$  e  $d(X', Y') = d(T(X), T(Y))$ .

Como  $d(X, Y) = d(T(X), T(Y))$  por hipótese, então  $d(X', Y') = d(T^{-1}(X'), T^{-1}(Y'))$ . Logo  $T^{-1}: \alpha \rightarrow \alpha$  é uma isometria.

V) Seja  $S: \alpha \rightarrow \alpha$  outra isometria no plano, então a composta  $S \circ T: \alpha \rightarrow \alpha$  também é uma isometria.

**Demonstração:**

Sejam  $X$  e  $Y$  pontos distintos do plano  $\alpha$ , então

$d(S \circ T(X), S \circ T(Y)) = d(S[T(X)], S[T(Y)]) = d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$

Logo  $S \circ T: \alpha \rightarrow \alpha$  é uma isometria.

**Definição:** Duas figuras  $F$  e  $G$ , no plano Euclidiano  $\alpha$ , são congruentes se existe uma isometria  $T: \alpha \rightarrow \alpha$  tal que  $G$  é a imagem de  $F$  por essa isometria.

As únicas isometrias no plano são: a identidade, a simetria em torno de um ponto, a reflexão em torno de uma reta, a translação, a rotação em torno de um ponto e a reflexão com deslizamento. As outras isometrias que surgirem nada mais são do que compostas destas que não geram transformações novas.

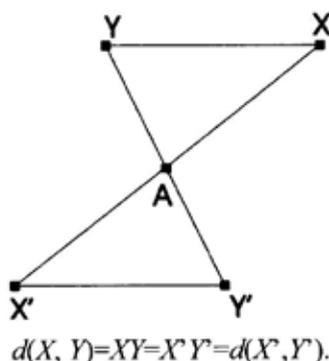
**Identidade:**

A identidade  $I: \alpha \rightarrow \alpha$  tal que  $I(A) = A$ , para qualquer  $A$  de  $\alpha$ , é uma isometria.

**Simetria em torno de um ponto:**

Seja  $A \in \alpha$  um ponto fixo. A simetria em torno de  $A$  é a transformação geométrica  $S_A: \alpha \rightarrow \alpha$  assim definida:  $S_A(A) = A$ , e, para  $X \in \alpha$ , com  $X \neq A$ ,  $S_A(X) = X'$  é o simétrico de  $X$  relativamente a  $A$ . Em outras palavras,  $A$  é o ponto médio do segmento de reta  $XX'$ .

Para provar que  $S_A$  é uma isometria, basta notar que dados  $X, Y \in \alpha$ , com  $S_A(X) = X'$  e  $S_A(Y) = Y'$  os triângulos  $AXY$  e  $AX'Y'$  são congruentes, e portanto,



**Figura 5.**

**Reflexão em torno de uma reta:**

Seja  $r$  uma reta pertencente ao plano  $\alpha$ . A reflexão em torno da reta  $r$  é a transformação geométrica  $R_r: \alpha \rightarrow \alpha$  em que:

- a)  $R_r(A) = A, \forall A \in r$  e,
- b)  $R_r(A) = A', \forall A \notin r$ , tal que a mediatriz do segmento  $AA'$  é a reta  $r$ .

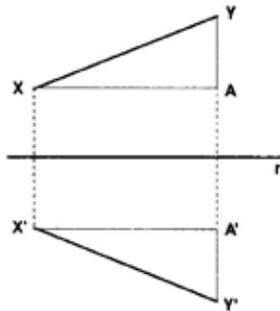
A reflexão em torno de uma reta  $r$  é a transformação que deixa fixo todos os pontos da reta e leva cada ponto  $A$  do plano no seu simétrico  $A'$  em relação ao eixo de simetria  $r$ .

Para provar que  $R_r$  é uma isometria, é necessário verificar dois casos:

- I) Os pontos  $X$  e  $Y$  estão do mesmo lado da reta  $r$ .

**Demonstração:**

Sejam  $X$  e  $Y$  pontos distintos pertencentes ao mesmo lado da reta por  $r$ . Sejam  $R_r(X)=X'$  e  $R_r(Y)=Y'$ . Tem-se que  $X'Y'$  é o segmento simétrico do segmento  $XY$  relativamente à reta  $r$ . Consideram-se os segmentos  $XA$  e  $X'A'$  paralelos a  $r$ , com  $A$  e  $A'$  pertencentes ao segmento  $YY'$ .

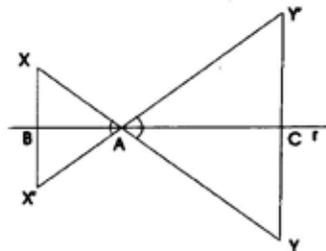
**Figura 6.**

Os triângulos retângulos  $XAY$  e  $X'A'Y'$  têm os catetos  $XA=X'A'$  e  $YA=Y'A'$  e, portanto o mesmo ocorre com as suas hipotenusas  $XY=X'Y'$ . Logo a reflexão  $R_r$  é uma isometria.

**II) Os pontos  $X$  e  $Y$  estão em lados opostos da reta  $r$ .**

**Demonstração:**

Sejam  $X$  e  $Y$  pontos pertencentes a lados opostos da reta  $r$ . Sejam  $R_r(X)=X'$  e  $R_r(Y)=Y'$ . Consideram-se  $A$ ,  $B$  e  $C$  os respectivos pontos de interseção de  $XY$ ,  $XX'$  e  $YY'$  com  $r$ . Assim,  $AB$  é lado comum aos triângulos  $XAB$  e  $X'AB$ , e mais  $XB=X'B$  logo  $AX=AX'$ . Analogamente, verifica-se que  $AY=AY'$ .

**Figura 7.**

Dessa forma, os triângulos  $AXX'$  e  $AYY'$  são isósceles, e como  $r$  é a mediana relativa às bases desses dois triângulos, então  $r$  também é a bissetriz dos ângulos  $X\hat{A}X'$  e  $Y\hat{A}Y'$ . Logo,  $X\hat{A}B = X'\hat{A}B$  e  $Y\hat{A}C = Y'\hat{A}C$ . Por outro lado,  $X\hat{A}B = Y\hat{A}C$ , pois são ângulos opostos pelo vértice. Então  $X\hat{A}B + X'\hat{A}B = Y\hat{A}C + Y'\hat{A}C$ . Mas como as respectivas somas são suplementos do ângulo  $X\hat{A}Y'$  então  $X', A$  e  $Y'$  são pontos colineares. Portanto,  $X'Y' = AX' + AY' = XY = AX + AY$  ou seja,  $d(X, Y) = d(Rr(X), Rr(Y))$ . Logo, a reflexão  $R_r$  é uma isometria.

### Rotação em torno de um ponto:

Seja  $O$  um ponto no plano  $\alpha$  e  $\theta$  um ângulo,  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ . A rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$  é a transformação geométrica  $\rho_{O, \theta} : \alpha \rightarrow \alpha$  que deixa fixo o ponto  $O$  e leva o ponto  $X$  de  $\alpha$  no ponto  $X' = \rho_{O, \theta}(X)$  tal que  $OX = OX'$  e a medida do ângulo orientado  $(OX, OX')$  é igual a  $\theta$ .

Para verificar que a rotação é uma isometria, consideram-se dois pontos  $X$  e  $Y$  pertencentes ao plano  $\alpha$  diferentes de  $O$ . Sejam  $X' = \rho_{O, \theta}(X)$  e  $Y' = \rho_{O, \theta}(Y)$ . Como os ângulos  $X'\hat{O}Y$  e  $X'\hat{O}Y'$  têm a mesma bissetriz, segue-se que  $X\hat{O}Y = X'\hat{O}Y'$ . Ainda,  $OX = OX'$  e  $OY = OY'$ , então os triângulos  $XOY$  e  $X'OY'$  são congruentes.

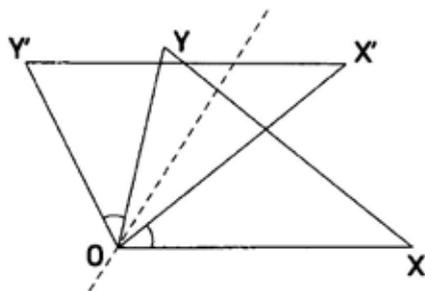


Figura 8.

Portanto  $X'Y' = XY$ , ou seja, a rotação  $\rho_{O, \theta} : \alpha \rightarrow \alpha$  é uma isometria.

### Translação:

Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos do plano  $\alpha$ . A translação  $T_{AB} : \alpha \rightarrow \alpha$  é uma isometria que não deixa ponto fixo e associa o ponto  $X$  de  $\alpha$  ao ponto  $X' = T_{AB}(X)$ , tal que  $ABXX'$  é um paralelogramo se  $A, B, X$  e  $X'$  não são colineares. Se  $A, B, X$  e  $X'$  são colineares  $X' = T_{AB}(X)$  é tal que  $XX'$  está na reta  $AB$  e os segmentos  $AX'$  e  $BX$  têm o mesmo ponto médio.

Para verificar que a translação  $T_{AB} \alpha \rightarrow \alpha$  é uma isometria, consideram-se dois pontos distintos  $X$  e  $Y$  do plano  $\alpha$  e as suas respectivas imagens  $X' = T_{AB}(X)$  e  $Y' = T_{AB}(Y)$ . Seja  $r$ , a reta que passa por  $X$  e  $Y$  e,  $s$ , a reta que passa por  $A$  e  $B$ . Se  $r$  é paralela  $s$ , então  $T_{AB}$  restrita a  $r$ , é a translação  $T_{XX'}$ :  $\alpha \rightarrow \alpha$ , logo  $d(X', Y') = d(X, Y)$ .

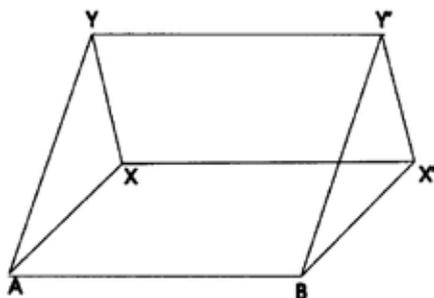


Figura 9.

Se  $r$  e  $s$  são retas distintas e não paralelas então  $XX'$  e  $YY'$  são lados opostos de um paralelogramo, logo, o mesmo ocorre com  $XY$  e  $X'Y'$ . Dessa forma,  $d(X', Y') = d(X, Y)$  e, portanto, a translação  $T_{AB} \alpha \rightarrow \alpha$  é uma isometria.

### Reflexão com deslizamento

Dados um segmento  $AB$  não nulo e  $r$  uma reta paralela a  $AB$ , a reflexão com deslizamento, determinada pelo segmento  $AB$  e pela reta  $r$  é a transformação  $R = T_{AB} \circ R_r \alpha \rightarrow \alpha$ , que se obtém fazendo-se a translação  $T_{AB}$  seguir-se à reflexão  $R_r$  (ou vice-versa). A reflexão, com deslizamento, assim como a translação  $T_{AB}$ , não possui ponto fixo. Tendo em vista que a transformação  $R$  é a composição de duas isometrias, então  $R$  é uma isometria.

Na figura 10, tem-se  $X' = R_r(X)$  e  $X'' = T_{AB}(X')$ .

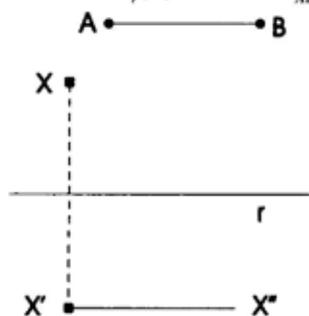


Figura 10.

## Aplicações

Exemplo 1: Uma mulher mora na casa  $A$ , quer buscar água no rio  $r$  e levá-la a casa  $B$ , do mesmo lado do rio conforme a figura 11. Deseja-se determinar o menor caminho a ser feito, a fim de que ela possa executar tal tarefa.

## Solução

Considera-se  $B' = R_r(B)$ , isto é,  $B'$  é o simétrico de  $B$  em relação à reta  $r$ . Seja  $P$  o ponto de interseção do segmento  $AB'$  com a reta  $r$ .

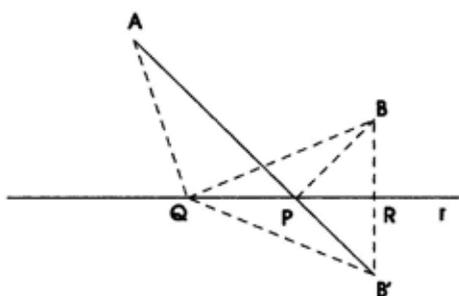


Figura 11.

Traçando-se o segmento  $PB$ , obtém-se o triângulo  $BPR$  congruente ao triângulo  $PB'R$ . Desse modo,  $PB = PB'$ . Seja  $Q$  outro ponto qualquer de  $r$ , conforme a figura 11. Então  $QB = QB'$ . Assim,

$$QA + QB = QA + QB' > AB' = PA + PB' = PA + PB.$$

Portanto, o caminho  $A-P-B$  é a menor distância entre  $A$  e  $B$ , passando por  $r$ .

## Observação

É interessante notar que esse exemplo é análogo ao princípio da reflexão da luz nos espelhos planos. Segundo esse princípio, se a luz deve ir de uma fonte  $A$  a um espelho  $r$  e daí ao olho  $B$  de um observador, então o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Exemplo 2: Jogo de bilhar.

O retângulo  $ABCD$  representa uma mesa de bilhar, e os pontos  $P$  e  $Q$ , na diagonal  $BD$ , representam duas bolas. Desenhar a trajetória da bola  $P$  que deve atingir a bola  $Q$  depois de chocar-se, sucessivamente e ordenadamente, com os lados  $AD$ ,  $AB$ ,  $CD$  e  $BC$ .

### Solução

Seja  $m$  a mediatriz do segmento  $AB$ . Consideram-se  $M$  e  $N$  pontos arbitrários na reta  $m$ , conforme a figura 12. Sejam  $P'$  e  $Q'$ , respectivamente os pontos simétricos de  $P$  e  $Q$  em relação a  $AD$  e  $BC$ . Os pontos  $R, S, T$  e  $U$  são obtidos, respectivamente a partir das seguintes interseções:  $P'M$  com  $AD$ ,  $P'M$  com  $AB$ ,  $NQ'$  com  $CD$  e  $NQ'$  com  $BC$ .

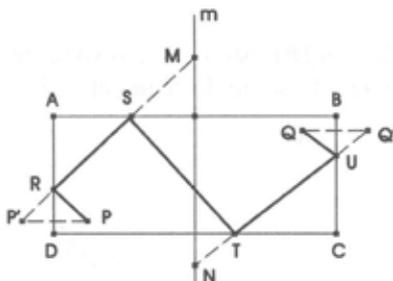


Figura 12.

Logo, a trajetória a ser percorrida é  $P-R-S-T-U-Q$ .

Exemplo 3: As isometrias são utilizadas em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na arte e na arquitetura. A figura 13 é a obra "Limite Circular IV" do artista alemão Escher (1898-1972), onde foram utilizadas rotações e reflexões.

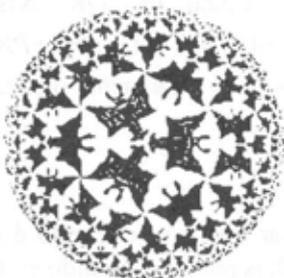


Figura 13.

## HOMOTETIAS

### Definição

Seja  $V$  um ponto fixo do plano  $\alpha$  e  $k \neq 0$  um número real. A homotetia de centro  $V$  e razão  $k$  é a transformação  $H_{V,k}: \alpha \rightarrow \alpha$  que associa a cada ponto

$P$  do plano  $\alpha$ , o ponto  $P' = H_{V,k}(P)$  tal que  $VP' = |k|VP$ , onde os pontos  $V$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares. O ponto  $P'$  é chamado de homotético de  $P$  na homotetia  $H_{V,k}$ . Exemplos:

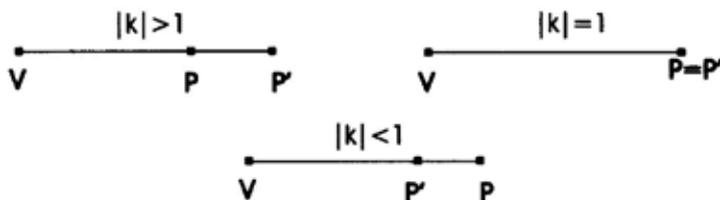


Figura 14.

Em outras palavras, as homotetias são transformações geométricas que não preservam a distância Euclidiana entre dois pontos, mas preservam a forma.

Desse modo, duas figuras homotéticas são semelhantes e, em particular, possuem os lados homólogos (correspondentes) paralelos. As homotetias são úteis para resolver determinados problemas de construções geométricas, entre esses, os que envolvem tangência.

### Propriedades

Seja  $H_{V,k}: \alpha \rightarrow \alpha$  uma homotetia de centro  $V$  e razão  $k$ , então valem as seguintes propriedades:

- I) Se  $V$ ,  $A$  e  $B$  são pontos não colineares, então o homotético do segmento  $AB$  é o segmento  $A'B' = |k|AB$ , paralelo a  $AB$ .

### Demonstração

Considera-se o segmento  $AB$  e o seu homotético  $A'B'$  na homotetia dada (Neste caso,  $|k| > 1$ ).

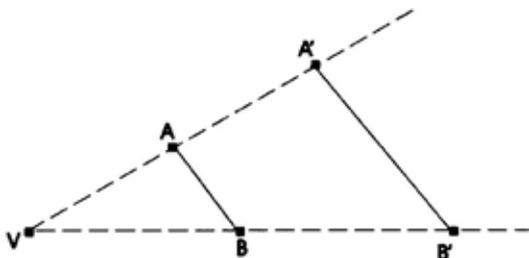


Figura 15.

Tomando-se os triângulos  $AVB$  e  $A'VB'$  tem-se que  $VA' = |k|VA$ ,  $VB' = |k|VB$  e  $\hat{V}$  é ângulo comum aos dois triângulos. Logo, os triângulos  $AVB$  e  $A'VB'$  são semelhantes com razão de semelhança  $|k|$ . Portanto,  $A'B' = |k|AB$  e  $A'B'$  é paralelo a  $AB$ .

Para o caso,  $|k| > 1$  a demonstração é feita de modo análogo.

II) Se  $V$ ,  $A$  e  $B$  são pontos colineares, então o homotético do segmento  $AB$  é o segmento  $A'B'$  contido em  $AB$  e tal que  $A'B' = |k|AB$ .

A demonstração dessa propriedade segue diretamente da definição de homotetia.

III) O homotético de uma reta  $r$  é uma reta  $r'$  tal que: se então a reta  $r'$  é paralela à reta  $r$ . Caso contrário,  $r=r'$ .

A demonstração desta propriedade segue diretamente das propriedades I) e II) foram citadas.

IV) A figura homotética de um triângulo  $ABC$  é um triângulo  $A'B'C'$ , semelhante ao primeiro, cuja razão de semelhança é dada por  $|k|$ .

### Demonstração

Seja  $V$  o centro de homotetia,  $ABC$  um triângulo dado e  $A'B'C'$  o seu homotético.

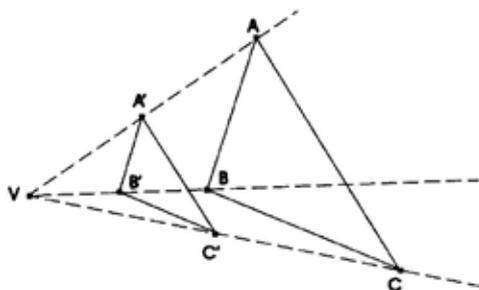


Figura 16.

Pela propriedade I), tem-se que  $A'B' = |k|AB$ ,  $B'C' = |k|BC$  e  $A'C' = |k|AC$ ,

ou  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ . Logo, o triângulo  $A'B'C'$  é semelhante ao triângulo  $ABC$ ,

cujas razão de semelhança é  $|k|$ .

V) A homotetia preserva ângulos.

A demonstração desta propriedade segue diretamente da propriedade IV) citada anteriormente.

VI) A transformação inversa da homotetia  $H_{V,k}$  é a homotetia  $H_{V,1/k}$ .

### Demonstração

Como a transformação  $H_{V,k}$  é uma bijeção, então existe a transformação inversa  $H^{-1}$ . Afirma-se que  $H^{-1} = H_{V,1/k}$  tal que  $\forall Q \in \alpha$ , tem-se  $H_{V,1/k}(Q) = Q'$  com  $VQ' = \frac{1}{|k|}VQ$  é a homotetia inversa.

De fato,  $\forall P \in \alpha$ , tem-se

$$H_{V,k} \circ H_{V,1/k}(P) = H_{V,k} \left( H_{V,1/k}(P) \right) = H_{V,k}(P') = P'', \text{ em que}$$

$VP' = \frac{1}{|k|}VP$  e  $VP'' = |k|VP'$ . Assim,  $VP'' = |k|VP' = |k|\frac{1}{|k|}VP = VP$ , isto é  $H_{V,k} \circ H_{V,1/k} = \text{identidade}$ .

De modo análogo mostra-se que  $H_{V,1/k} \circ H_{V,k} = \text{identidade}$ . Portanto, segue o resultado.

### Aplicações:

#### Exemplo 1: Ampliação ou Redução de Figuras

Se  $k > 0$ , a homotetia é chamada de homotetia direta, e se  $k < 0$ , a homotetia é dita inversa.

Em ambos os casos, quando  $|k| > 1$ , a figura homotética é uma ampliação da figura inicial; quando  $|k| = 1$ , a figura homotética é congruente à figura inicial; e quando  $|k| < 1$ , a figura homotética é uma redução da figura inicial.

O pentágono  $VA'B'C'D'$  é a ampliação do pentágono  $VABCD$ , com razão  $k > 1$ .

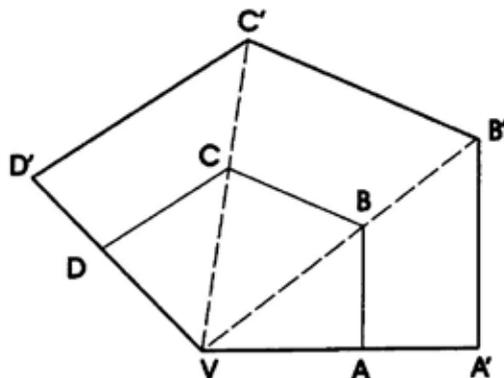


Figura 17.

**Exemplo 2:** Dado um triângulo  $ABC$ , inscrever nele um retângulo áureo<sup>4</sup> tendo o seu lado maior contido no lado  $BC$ .

**Solução:**

Considera-se um triângulo  $ABC$ . Constrói-se um quadrado  $PQRS$  em seu interior, de modo que o lado  $PQ$  esteja contido no lado  $BC$  do triângulo e o vértice  $S$  pertença ao lado  $AB$ . Seja  $M$  o ponto médio do segmento  $PQ$ . Com centro em  $M$  e raio  $MR$ , traça-se um arco encontrando  $BC$  no ponto  $N$ . Seja  $O$  o ponto de interseção da reta paralela  $BC$  passando por  $S$  com a reta perpendicular a  $BC$ , passando por  $N$ . O retângulo  $PNOS$  é um retângulo áureo (por construção).

Para inscrever esse retângulo no triângulo  $ABC$ , considera-se a semi-reta com origem em  $B$  e passando por  $O$ , sendo  $V$  o ponto de interseção desta semi-reta com  $AC$ . Para encontrar os outros vértices do retângulo considera-se a homotetia de centro  $B$  e razão  $\frac{BV}{BO}$ . O retângulo  $XYWV$  é o retângulo áureo inscrito no triângulo  $ABC$ .

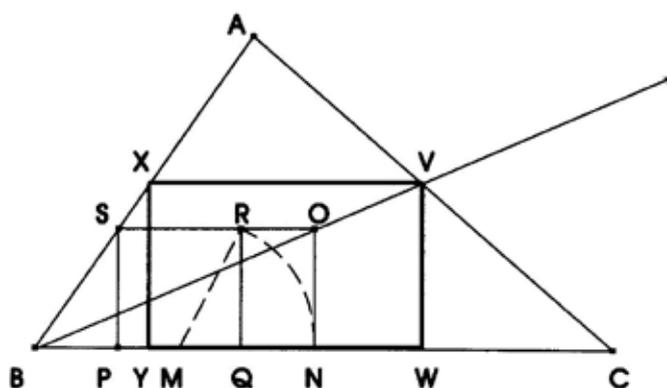


Figura 18.

## CONCLUSÕES

As transformações geométricas estudadas, isometrias e homotetias, possuem um amplo campo de aplicações. Na geometria, essas transformações são utilizadas para resolução de problemas de construções geométricas, na ampliação e redução de figuras como foi comprovado pela fundamentação teórica. Já na arte e na arquitetura, as simetrias de rotação, de reflexão e de

<sup>4</sup> Um retângulo áureo é um retângulo no qual o quociente entre seus lados é o número áureo  $(\sqrt{5} - 1) / 2$  ou o seu inverso.

translação, bem como a composta dessas fornecem beleza e harmonia aos trabalhos.

Além disso, notou-se que figuras isométricas possuem a mesma forma e as mesmas dimensões, já as figuras homotéticas possuem somente a mesma forma.

#### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

GAY, D. **Geometry by discovery**. New York: John Wiley & Sons, 1988.

LIMA, E.L. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

MORTENSON, M. **Geometric transformations**. New York: Industria Press Inc, 1995.

REZENDE, L. Q. E.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: UNICAMP, 2000.

WAGNER, E. **Construções geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 1998.