# AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO ESTUDO DE OSCILAÇÕES[1]

## *DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE STUDY OF OSCILLATIONS*

**Eliana Baggio[2]**
**Orildo Luis Battistel[3]**

## RESUMO

Neste trabalho nós aplicamos o formalísmo das equações diferenciais ao estudo das oscilações, especificamente nos casos do oscilador harmônico simples e oscilador harmônico amortecido. Para estas situações, de inúmeras aplicações, realizamos desde uma descrição qualitativa e conceitual até uma abordagem mais formal em termos das equações diferenciais de $2^a$ ordem resultantes, suas soluções e interpretações físicas pertinentes.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais, Oscilações, Oscilador harmônico amortecido.

## ABSTRACT

In this work, the formalism of differential equations is applied to the study of oscillations, specifically in the cases of the simple harmonic oscillator and the damped harmonic oscillator. For situations in which there are several applications, it is carried out from a qualitative and conceptual description to a more formal approach in terms of the resulting differential equations of second order, their solutions and pertinent physical interpretations.

**Key words:** differential equations, oscillations, damped harmonic oscillator.

## INTRODUÇÃO

As aplicações das equações diferenciais no mundo moderno são incontáveis. Na medicina, na química, na engenharia, na ecologia, na economia, entre outras, é necessário muitas vezes se resolverem certas equações diferenciais para se determinarem, por exemplo, o crescimento de uma população, a dinâmica de reações químicas, a disseminação de uma epidemia, etc.

[1]Trabalho Final de Graduação.
[2]Curso de Matemática - Licenciatura Plena. UNIFRA.
[3]Orientador.

A formulação de modelos matemáticos é, em determinados casos, de extrema importância, pois permite avaliar-se um certo processo desenvolvendo estratégias de controle, determinando viabilidade econômica, riscos e benefícios, por exemplo. Estes modelos constituem-se de abstrações matemáticas do processo real, apresentando-se na forma de um sistema de equações cuja solução, dado um conjunto de dados de entrada, é representativa da resposta do processo. Quando as variáveis variam no tempo, estes modelos são ditos dinâmicos e resultam, em geral, em um conjunto de equações diferenciais que especificam relações entre as grandezas estudadas.

Apesar do enorme progresso da computação científica com a construção de algorítmos numéricos para a solução de equações diferenciais, o domínio dos métodos analíticos para solucionar essas equações, mesmo as mais elementares, é ainda de grande importância, visto que no momento da implementação dos processos computacionais é sempre necessário uma verificação preliminar avaliando-se casos limites, validade de aproximações, etc. Além disso, a construção de um mode-lo complexo, pode ser feita como uma combinação de modelos mais simples, cujo tratamento analítico permite, por exemplo, economia no tempo de computação.

Uma abordagem mais completa sobre o assunto, incluindo uma revisão sobre equações diferenciais ordinárias de $1^a$ e $2^a$ ordens discutindo as técnicas de solução das mesmas, sobretudo o papel das condições iniciais é apresentado em BAGGIO (2001). Na que segue utilizamos este formalismo matemático no problema específico do estudo das oscilações em física. Tratamos o problema do oscilador harmônico simples e a seguir o problema do oscilador amortecido. Damos ênfase à interpretação física das condições iniciais interpretando as soluções obtidas à luz das técnicas matemáticas desenvolvidas.

## MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Uma partícula movimentando-se de forma alternada em sentidos opostos caracteriza um fenômeno físico que denominamos oscilação. Situações do cotidiano revelam uma variedade de movimentos oscilatórios, tais como: o movimento de um pêndulo de um relógio, dos pistões no motor de um carro, das cordas de instrumentos musicais, na transmissão de rádio e televisão constituídas de oscilações eletromagnéticas. Estudaremos a seguir as oscilações mecânicas que descrevem um movimento harmônico simples e um movimento harmônico amortecido.

O protótipo mais utilizado para esse estudo é o denominado *sistema massa-mola*, constituido de um corpo de massa $m$ preso à extremidade de uma mola movendo-se sobre uma superfície horizontal lisa. Para tratarmos este movimento inicialmente é preciso estabelecer o funcional do lado direito da equação

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F\left[t, y(t), \frac{dy}{dt}\right], \tag{1}$$

que é a lei de Newton expressa em termos de uma equação diferencial (NUSSENSVEIG, 1996), onde $y(t)$ representa a posição do objeto no instante $t$, medida a partir da origem de um dado sistema de referência. Ou seja, precisamos conhecer a expressão da força que atua sobre o corpo quando oscila preso à mola.

Esta relação é estabelecida por um importante resultado denominado *Lei de Hooke*. Trata-se de uma evidência experimental comprovada em práticas simples de laboratório de que a força devida à mola é proporcional ao deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio da mesma (a posição "normal" da mola, onde ela não está comprimida ou distendida), ou seja:

$$F = -kx, \tag{2}$$

onde, $k$ é uma constante de proporcionalidade denominada *constante elástica* da mola. Ela nos informa sobre as propriedades de "dureza" da mesma. Escrita na forma $k = F/x$, lemos: "quantos Newtons de força é necessário fazer sobre a mola para distendê-la de $1,0$ m".

O movimento do corpo preso à mola pode então ser analisado como os problemas de dinâmica em mecânica clássica. Uma vez que no caso do sistema massa-mola a força é dada pela lei de Hooke, temos:

$$\begin{cases} F = ma \\ F = -kx \end{cases} \longrightarrow ma = -kx \tag{3}$$

Utilizando a relação $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, podemos escrever:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{4}$$

É apropriado definir-se aqui uma constante $\omega$ tal que $\omega^2 \equiv k/m$ e reescrever a equação acima na forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{5}$$

que é a equação diferencial do oscilador harmônico simples. Antes de procedermos à busca da sua solução vamos fazer uma análise daquilo que procuramos.

Primeiramente, dentro do caráter determinístico da mecânica clássica, sabemos que tendo determinado a posição e a velocidade de um corpo num determinado instante, as equações da cinemática e as leis de Newton são capazes de nos fornecer a posição e a velocidade deste corpo em qualquer instante posterior. Isto nos dá um poder de predição muito grande a respeito de um determinado sistema e, quando somos capazes de fazer predições acerca do comportamento futuro dele temos a sensação de que temos uma descrição completa deste sistema. É isso que buscamos em geral nos problemas de física ou no estudo de um fenômeno físico qualquer. No caso do sistema corpo-mola queremos exatamente isto: Sermos capazes de fazer predições a respeito dele. É como se estivéssemos de costas para o oscilador e mesmo assim podermos saber a posição, velocidade, aceleração, energia cinética, energia potencial elástica, enfim, tudo!

Devemos ter claro que a solução da equação diferencial nos fornece a posição do corpo num determinado instante, ou seja, $x(t)$ é a "*função horária*" do oscilador. Analogamente ao que fazemos nos problemas de cinemática, a partir da equação horária podemos obter, por relações derivativas, a velocidade em função do tempo, a aceleração, etc. Sendo assim, de posse de um relógio e sabendo como o sistema *iniciou* o seu movimento podemos saber como todas as grandezas físicas associadas evoluem no tempo.

Repare que as condições iniciais não podem ser "adivinhadas", elas precisam ser fornecidas diretamente ou então algum meio de obtê-las deve ser dado. Esta situação acontece da mesma forma ao nível matemático. Não é possível resolver uma equação diferencial completamente sem que alguma condição seja dada para determinar as constantes que aparecem. Aqui vemos novamente a íntima relação entre a situação física e o problema matemático.

Retornemos agora à equação diferencial, eq.(5). Por se tratar de uma equação diferencial de $2^a$ ordem com coeficientes constantes podemos resolvê-la partindo de que $x = e^{rt}$ é solução e, realizando as derivações, obtemos a equação característica na forma:

$$r^2 + \omega^2 = 0, \tag{6}$$

que possui raízes complexas

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{+\sqrt{-4\omega^2}}{2} = i\omega \\ r_2 &= \frac{-\sqrt{-4\omega^2}}{2} = -i\omega \end{aligned} \tag{7}$$

de modo que a solução geral será uma combinação de exponenciais $e^{i\omega t}$ e $e^{-i\omega t}$. Algumas combinações desse tipo são muito bem conhecidas, sobretudo as seguintes:

$$\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}=cos\omega t \tag{8}$$

e

$$\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}=sen\omega t \tag{9}$$

de modo que as funções

$$\begin{cases} x_1(t)=sen(\omega t) \\ x_2(t)=cos(\omega t) \end{cases} \tag{10}$$

são duas soluções particulares da equação diferencial considerada.

Poderiamos ter encontrado a solução intuitivamente, visto que procurávamos por funções que derivadas duas vezes fossem proporcionais a elas próprias com sinal trocado multiplicadas por $\omega^2$. A validade destas soluções pode ser verificada por substituição direta na eq.(5).

A solução geral será então uma combinação linear das duas, isto é

$$x(t)=c_1sen(\omega t)+c_2cos(\omega t), \tag{11}$$

onde $c_1$ e $c_2$ são constantes. Esta forma geral pode ser posta numa outra mais simples e mais adequada para aplicações se usarmos a seguinte relação trigonométrica:

$$cos(\alpha+\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta). \tag{12}$$

Assim podemos escrever a solução $x(t)$ na forma costumeiramente encontrada na literatura:

$$x(t)=Acos(\omega t+\delta), \tag{13}$$

com $A$ e $\delta$ constantes.

Para verificar isto usemos a eq.(12) encontrando:

$$\begin{aligned} Acos(\omega t+\delta) &= Acos(\delta)cos(\omega t)-Asen(\delta)sen(\omega t) \\ &= c_1sen(\omega t)+c_2cos(\omega t), \end{aligned} \tag{14}$$

de modo que $c_1=-Asen(\delta)$ e $c_2=Acos(\delta)$. Isto significa que podemos assumir a eq.(13) como solução geral da equação diferencial do oscilador harmônico simples. A constante $\delta$ leva em conta a combinação linear em senos e cossenos e tem um significado físico importante, como veremos a seguir. Quanto à constante $A$ que foi estrategicamente introduzida, sem quebra de consistência, já que o produto de uma constante por uma dada solução continua sendo solução da equação diferencial, tem também um significado físico claro, estando relacionada à amplitude do movimento.

A constante $\omega$ é uma característica fixa de cada sistema, uma vez que está relacionado com a massa do corpo e com a constante elástica da mola que se supõem não mudem durante o processo. Para descobrirmos claramente o significado físico de $\omega$, adicionemos a $t$ na eq.(13) uma quantidade $2\pi/\omega$. Desse modo:

$$x(t + 2\pi/\omega) = Acos\,(\omega t + \delta + 2\pi)\,. \tag{15}$$

Usando a eq.(12), com $\alpha = \omega t + \delta$ e $\beta = 2\pi$, obtemos:

$$x(t + 2\pi/\omega) \;=\; Acos\,(\omega t + \delta)\,cos(2\pi) \;=\; Acos\,(\omega t + \delta) \;=\; x(t) \tag{16}$$

Isto significa que a função se repete em intervalos regulares de $t = 2\pi/\omega$, uma vez que $x(t) = x(t + 2\pi/\omega)$, ou seja, o corpo, cujo movimento é descrito pela "função horária" $x(t)$, passa pelo mesmo ponto a cada $2\pi/\omega$. Ao tempo no qual um determinado fenômeno se repete damos o nome de período, de modo que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{17}$$

Desta relação e da relação entre período e frequência, $T = 1/\nu$, podemos escrever:

$$\omega = 2\pi\nu. \tag{18}$$

De modo que identificamos $\omega$ à frequência angular do M.H.S.

O significado físico de $A$ pode ser facilmente encontrado se observarmos o intervalo de valores assumidos pela função cosseno:

$$-1 \leq cos(\omega t + \delta) \leq 1. \tag{19}$$

Isso significa que a função $x(t)$ varia entre $-A$ e $A$, ou seja, $A$ representa o valor máximo que a mola se comprime ou se elonga durante o movimento. A este valor máximo da elongação damos o nome de Amplitude do movimento. Como já comentamos anteriormente a amplitude é determinada pelas condições iniciais do problema, ela representa "*o quanto a mola é elongada, ou comprimida, antes de soltarmos o corpo*".

Para entendermos o significado físico da constante $\delta$ façamos o gráfico de um dado sistema corpo-mola variando somente o valor desta constante, para facilitar usemos: $\delta = 0$ e $\delta = \pi/2$.

Como podemos ver na fig.(1), temos apenas um deslocamento das curvas em relação ao eixo vertical. Uma vez que trata-se do mesmo corpo e da

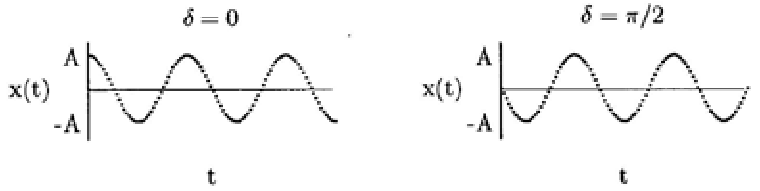


**Figura 1** - Gráficos da posição $x(t)$ do corpo preso a uma mola considerando-se dois valores distintos da constante de fase $\delta$.

mesma mola, podemos dizer que o que muda é a posição inicial do corpo e o seu sentido de deslocamento neste instante. Isto mostra que $\delta$ leva em conta "*o momento em se que aperta o cronômetro*" para se começar a analisar o movimento. No primeiro gráfico nós "*apertamos o cronômetro*" quando o corpo estava na posição $A$, ou seja, com a mola elongada ao máximo; no segundo gráfico "*apertamos o cronômetro*" quando o corpo passava pela posição de equilíbrio vindo para a esquerda e assim por diante.

Em linguagem de ondulatória dizemos que as figuras do primeiro e do segundo gráfico estão defasadas de $\pi/2$, por isso a constante $\delta$ é chamada de "*constante de fase*" e o argumento do cosseno na eq.(13), $\omega t + \delta$ é denominado fase.

Podemos concluir então que para termos uma descrição completa do M.H.S. devemos conhecer as condições iniciais do problema, identificando as constantes $A$ e $\delta$ que aparecem na solução $x(t)$.

## MOVIMENTO OSCILATÓRIO AMORTECIDO

No sistema massa-mola que estudamos anteriormente desprezamos qualquer tipo de atrito que pudesse interferir no movimento do corpo enquanto preso na mola. Na prática este movimento idealizado não pode ser verificado, a não ser em certas condições de laboratório bem específicas. Isto significa que no caso real o oscilador tende a ter as suas oscilações amortecidas durante o movimento, indicando que parte da energia do sistema será dissipada, sendo convertida em outra forma de energia, como calor, por exemplo. As formas de dissipação da energia podem ocorrer em diversos momentos, podendo estar associadas à resistência do fluido no qual o corpo se desloca, atrito entre a superfície do corpo e uma mesa, por exemplo, ou até mesmo algum atrito nas próprias espiras da mola. Consideremos o caso onde um corpo preso a uma mola oscila imerso em um líquido. Neste caso, devido à viscosidade do líquido, teremos uma força contrária ao movimento que opõe alguma resistência ao movimento do corpo. A forma dessa resistência varia, a princípio, de acordo com propriedades do líquido, temperatura, forma do corpo ou outros efeitos específicos. Para muitos líquidos verifica-se que esta força depende diretamente da velocidade do corpo, podendo-se representar a força resultante que atua sobre ele em um dado instante por

$$F = -kx - \rho\frac{dx}{dt} \tag{20}$$

onde $\rho$ é uma constante de amortecimento, característica do movimento, cujo valor pode ser estimado experimentalmente. O termo $-kx$ é a força da mola sobre o corpo já estudada anteriormente.

Nesse caso a segunda Lei de Newton adquire a seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{21}$$

onde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ é a frequência angular do movimento na ausência do amortecimento.

A eq.(21) é também uma equação diferencial de 2ª ordem, homogênea com coeficientes constantes, cuja solução segue os mesmos passos descritos nas seções anteriores. Dessa forma investigamos sua solução a partir de $x(t) = e^{rt}$, com a busca pelo valor do parâmetro $r$ que fica determinado pela seguinte equação característica:

$$r^2 + \frac{\rho}{m}r + \omega_0^2 = 0, \tag{22}$$

cujas raízes são:

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{\rho}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\frac{\rho}{2m} - \sqrt{\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \tag{23}$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{2m} + i\omega \\ -\frac{\rho}{2m} - i\omega \end{pmatrix} \tag{24}$$

em que

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\rho}{2m}\right)^2} \tag{25}$$

está relacionado com a nova frequência de oscilação. É fácil verificar que na ausência de amortecimento ($\rho = 0$) recobramos o caso ideal não amortecido.

Da análise do valor de $\omega$ obtemos as três possibilidades para as raízes da equação característica, determinadas pela comparação entre os valores sob o radical da eq.(23):

• Se $\frac{\rho}{2m} > \omega_0$, teremos raízes complexas na eq.(23) e dizemos que o amortecimento é *subcrítico*. As duas soluções particulares são:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{(-\frac{\rho}{2m}+i\omega)t} \\ x_2(t) = e^{(-\frac{\rho}{2m}-i\omega)t}, \end{cases} \tag{26}$$

sendo a solução geral escrita como uma combinação linear das mesmas:

$$x(t) = e^{-\frac{\rho}{2m}t}(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}). \tag{27}$$

As constantes $c_1$ e $c_2$ estão relacionadas às condições iniciais. É fácil ver que

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = c_1 \\ x'(0) = v_0 = -\frac{\rho}{2m}c_1 + \omega c_2. \end{cases} \tag{28}$$

Caso o corpo seja largado do ponto de elongação máxima, parado, e aí seja "apertado o cronômetro", teremos:

$$\begin{cases} c_1 = A \\ c_2 = \frac{\rho}{2m\omega}A. \end{cases} \tag{29}$$

As exponenciais $e^{i\omega t}$ e $e^{-i\omega t}$ podem ser novamente expressas em termos de senos e cossenos e dessa forma a solução eq.(27) pode ser escrita em uma forma mais compacta como

$$x(t) = Ae^{-\frac{\rho}{2m}t}cos(\omega t + \delta). \tag{30}$$

O fator $Ae^{(-\frac{\rho}{2m})t}$ é considerado como amplitude do movimento lentamente variável e as exponenciais decrescentes indicam a envoltória das oscilações. O comportamento dessa solução para valores apropriados de $\rho$, $m$ e $k$ é mostrado na fig.(2).

• Se $\frac{\rho}{2m} < \omega_0$, as raízes são reais e distintas e neste caso o amortecimento é denominado amortecimento *supercrítico*. Suas soluções particulares são:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{(-\frac{\rho}{2m}+\beta)t} \\ x_2(t) = e^{(-\frac{\rho}{2m}-\beta)t}, \end{cases} \tag{31}$$

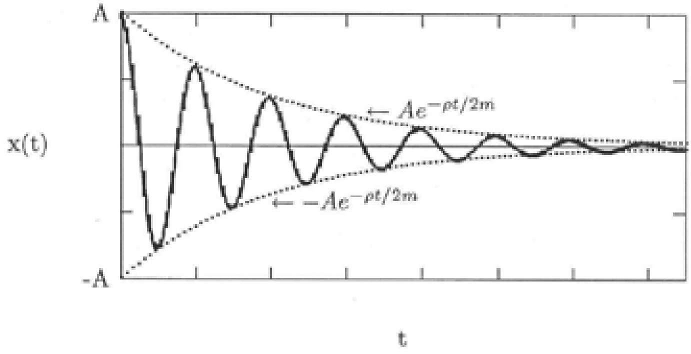


**Figura 2** - Forma da solução para um movimento com amortecimento subcrítico.

em que $\beta = \sqrt{\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2 - (\omega_0)^2}$.

A solução geral:

$$x(t) = c_1 e^{\left[-\left(\frac{\rho}{2m}-\beta\right)t\right]} + c_2 e^{\left[-\left(\frac{\rho}{2m}+\beta\right)t\right]} \tag{32}$$

consiste em uma soma de duas exponenciais decrescentes. A segunda, no entanto, decai mais rapidamente que a primeira, de modo que para tempos grandes o decaimento é como $e^{\left[-\left(\frac{\rho}{2m}-\beta\right)t\right]}$. Neste caso de amortecimento observa-se que as oscilações não são mais periódicas, prevalecendo o amortecimento. Esse comportamento é mostrado na fig.(3).

• Se $\frac{\rho}{2m} = \omega_0$, as raízes $r_1$ e $r_2$ na equação eq.(23) são iguais, descrevendo um amortecimento denominado amortecimento *crítico*. Neste caso, determinamos inicialmente uma única solução particular:

$$x_1(t) = e^{-\frac{\rho}{2m}t}. \tag{33}$$

Através do método de redução de ordem (BAGGIO, 2001), obtemos uma segunda solução para encontrar a solução geral. Procedendo dessa forma obtemos:

$$x(t) = e^{-\frac{\rho}{2m}t}(c_1 + c_2 t) \tag{34}$$

na qual as constantes podem novamente ser determinadas pelas condições iniciais do problema. A forma dessa solução está também mostrada na fig.(3).

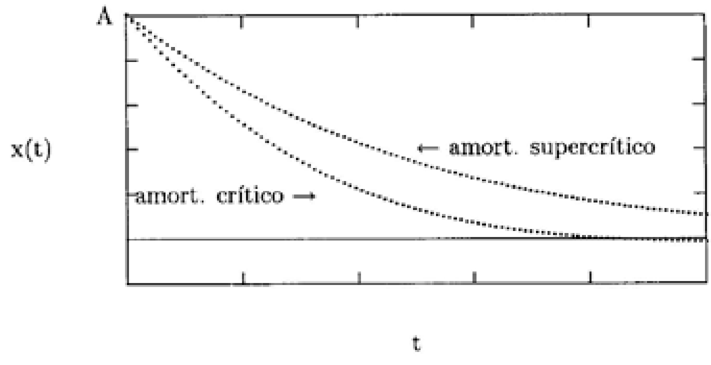


**Figura 3** - Forma da solução para movimentos com amortecimento crítico e supercrítico.

## CONCLUSÃO

Em diversas áreas do conhecimento são necessárias formulações de modelos matemáticos para o estudo de um determinado processo que possibilite uma compreensão adequada do mesmo. Estes modelos constituem-se de abstrações matemáticas do processo real, apresentando-se na forma de um dado sistema de equações, cuja solução, a res-posta do modelo, permite inferir o valor de determinadas variáveis, fazer extrapolações, enfim, dominar-se até onde possível o processo em estudo.

As equações diferenciais desempenham nesse cenário um papel extremamente importante, visto que os modelos dinâmicos, em todas as áreas, são expressos em termos de equações diferenciais, ordinárias ou parciais. Em física, no estudo da mecânica clássica, este é certamente o caso, uma vez que a segunda lei de Newton, a equação mais fundamental, é uma equação diferencial de segunda ordem.

Concluimos então que os métodos e técnicas formais, desenvolvidos para tratar-se as equações diferenciais, aplicam-se perfeitamente ao estudo de oscilações, com ou sem amortecimento. Vimos que a formulação coerente do modelo teórico necessita do conhecimento de certos resultados empíricos, uma vez que ele deve representar de forma mais coerente o fenômeno real ao qual se destina. A Lei de Hooke é um desses resultados. Da mesma forma alguns parâmetros, como a constante elástica da mola e o coeficiente de amortecimento precisam ser avaliados por experimentos físicos, incorporando ao modelo dados reais.

As condições iniciais possuem também uma realidade física estando relacionadas aos valores de certas grandezas físicas nos contornos do problema. A sua interpretação, desse modo, permite entender de modo mais claro o próprio procedimento de solução das equações diferenciais. A aplicação em problemas específicos certamente fortalece o nosso entendimento de aspectos formais do cálculo diferencial e integral.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAGGIO, E. 2001. **As equações diferenciais no estudo de oscilações**, Trabalho de Final de Graduação no Curso de Matemática do Centro Universitário Franciscano. Santa Maria.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. 1992. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. New York: Jonh Willey Sons, Inc.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. 1984. **Física**.Vol.2. Rio de Janeiro: LTC.

NUSSENSVEIG, H.M. 1996. **Física Básica**. Vol.2. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

OLIVEIRA, E.C.; MAIORINO, J.E. 1997. **Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada**. Campinas - SP: Editora da Unicamp.

RHOTE, R. 1959. **Matemática Superior para matemáticos, físicos e ingenieros**. Barcelona: Labor.