SOBRE UM MODELO DE VIBRAÇÕES DE UMA CORDA DE UM INSTRUMENTO MUSICAL[1]

CONCERNING A MODEL OF CHORD VIBRATIONS OF A MUSICAL INSTRUMENT

Moisés Antonio Basso[2]
Eleni Bisognin[3]

RESUMO

Neste trabalho estuda-se o modelo matemático que descreve as pequenas vibrações transversais de uma corda elástica presa nos extremos. A solução deste problema é obtida pelo método de Fourier e são analisadas as principais propriedades e características das ondas sonoras produzidas pela vibração de uma corda elástica de um instrumento musical ao ser dedilhada.

Palavras-chave: equação da corda vibrante, método de Fourier, ondas sonoras.

ABSTRACT

The mathematical model studied in the present work describes the short transversal vibrations of an elastic string fixed on its ends. The solution to the problem is achieved by using the Fourier method and by analyzing the main properties and features of the sound waves produced by the vibration of an elastic string of a musical instrument while being touched.

Key words: vibrating chord equation, Fourier method, sound waves.

INTRODUÇÃO

Vários fenômenos físicos são modelados pela equação das ondas. De acordo com (BOYCE & PRIMA,1999), o estudo das ondas acústicas das ondas em água, das ondas eletromagnéticas e das ondas sísmicas são exemplos de fenômenos modelados por essa equação.

No caso das vibrações mecânicas, de acordo com (FIGUEIREDO,1977), considera-se o problema das pequenas vibrações transversais de uma corda elástica, presa nos extremos, ao ser deslocada de sua posição de repouso ao

[1]Trabalho Final de Graduação.
[2]Curso de Matemática Aplicada Computacional - UNIFRA.
[3]Orientadora.

longo do eixo x. Se a corda for movimentada num determinado instante e depois for solta, ela vibrará livremente no plano vertical desde que os efeitos de amortecimento, como a resistência do ar, sejam desprezados. Esse fenômeno acontece quando se dedilha uma corda de um violão, de um violino ou qualquer instrumento musical de cordas, conforme (FIGUEIREDO,1977)e EDWARDS & PENNEY(1995), e essas vibrações produzem as ondas sonoras que são percebidas pelo ouvido humano.

Neste trabalho, é analisado o modelo matemático que descreve as vibrações transversais de uma corda flexível com extremidades fixas, posta a vibrar a partir de um deslocamento de sua posição de equilíbrio. É deduzida a equação que rege este movimento e sua solução é obtida utilizando-se o método de Fourier. Por último são analisadas algumas propriedades relativas às ondas sonoras e à percepção destas características pelo ouvido humano.

DESENVOLVIMENTO

Para deduzir a equação das ondas em um espaço unidimensional, na forma em que ela se aplica às vibrações transversais de uma corda ou de um cabo elástico, considera-se uma corda perfeitamente flexível e elástica, esticada entre dois suportes fixos, mantidos em um mesmo nível horizontal,e supondo que a corda coincida com o eixo x, com extremidades localizadas em $x = 0$ e $x = L$, conforme figura 1.

Figura 1 - Corda elástica presa nos extremos.

Se a corda for posta em movimento em um instante $t = 0$, ela vibrará livremente em um plano vertical se os efeitos de amortecimento, como por exemplo, a resistência do ar, forem desprezados. A fim de determinar a equação diferencial que rege o movimento da corda vibrante, consideram-se as forças que atuam sobre um pequeno elemento da corda, de comprimento Δx , situado entre os pontos x e Δx conforme figura 2.

Vamos admitir que o movimento da corda seja pequeno e que o movimento se verifique no plano xy de modo que cada ponto da corda se mova perpendicularmente ao eixo x, isto é, as vibrações são verticais. Denota-se

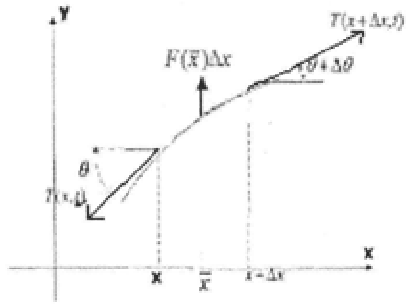

Figura 2 - Elemento deslocado da Corda Elástica.

por $u(x.t)$ o deslocamento vertical do ponto x em um instante t. Seja $T(x,t)$ a tensão na corda, na direção tangencial, e seja $\alpha(x,t)$ a massa por unidade de comprimento.

É aplicada a Lei de Newton $F = ma$ ao elemento Δx da corda. Esta lei afirma que a resultante das forças que atuam em virtude da tensão nas extremidades, deve ser igual ao produto da massa do elemento pela aceleração do seu centro de massa.

Como não há aceleração horizontal, as componentes horizontais obedecem à seguinte equação.

$$T(x+\Delta x,t)\ cos(\theta+\Delta\theta) - T(x,t)\ cos\theta = 0 \tag{1}$$

em que se conclui que a componente horizontal da tensão independe de x,isto é, é função só do tempo.

Levando em conta as componente verticais das forças tem-se:

$$T(x+\Delta x,t)\ sen(\theta+\Delta\theta) - T(x,t)\ sen\theta = \rho\Delta x u_{tt}(\bar{x},t) \tag{2}$$

em que $\bar{x}$ é a coordenada do centro de massa, $x < \bar{x} < x+\Delta x$.

Ao se indicar a componente vertical de T por V, a equação (2) é escrita como:

$$\frac{V(x+\Delta x,t) - V(x,t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x},t)$$

Tomando o limite com $\Delta x \to 0$ resulta $\bar{x} \to x$, e, portanto,

$$V_x(x,t) = \rho u_{tt}(x,t) \tag{3}$$

Por outro lado, ao se indicar a componente horizontal da tensão por H resulta,

$$V(x,t) = H(t)\ tg(\theta) = H(t)\ u_x(x,t) \tag{4}$$

portanto, a equação (3) pode ser escrita na forma

$$(Hu_x)_x = \rho u_{tt}$$

ou

$$Hu_{xx} = \rho u_{tt}$$

na qual, H independe de x.

Para movimentos pequenos, podemos substituir $H \cong T cos\theta$ por T, então a equação (5) assume a forma:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \tag{5}$$

em que $a^2 = \frac{T}{\rho}$, isto é, a depende da tensão e da densidade da corda.

A equação (6) é denominada equação das ondas unidimensional.

Se a corda possui comprimento L, e está fixada nas extremidades, ela satisfaz as condições,

$$u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, t \geq 0, \tag{6}$$

as quais são denominadas condições de fronteira.

A posição inicial da corda no instante $t = 0$ e a velocidade inicial da corda determinada pela função g, são determinadas por,

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq L \tag{7}$$

$$u_t(x,0) = g(x) \quad 0 < x < L \tag{8}$$

Tem-se então o seguinte problema de valor inicial e de contorno,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & 0 < x > L, t > 0; \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; & \\ u(x,0) = f(x); & 0 < x < L \\ u_t(x,0) = g(x); & 0 < x < L \end{cases} \tag{9}$$

o qual descreve o deslocamento $u(x,t)$ de uma corda vibrante, com extremidades fixas, posição inicial $f(x)$ e velocidade inicial $g(x)$.

A solução do problema (10) é obtida utilizando-se o método de separação de variáveis.

Escrevendo a solução $u(x,t)$ na forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{10}$$

obtém-se de (10), as equações diferenciais ordinárias de 2ªordem da forma:

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{11}$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0 \tag{12}$$

em que λ é uma constante positiva.

Das soluções de (12) e (13) e, considerando-se as condições iniciais e de fronteira, resulta que, para cada n, as soluções de (10) são da forma,

$$u_n(x,t) = C_n sen\frac{n\pi x}{L}cos\frac{n\pi at}{L} = K_n sen\frac{n\pi x}{L}sen\frac{n\pi at}{L} \tag{13}$$

e, pelo princípio da superposição, obtém-se a solução:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sen\frac{n\pi x}{L}cos\frac{n\pi at}{L} + K_n sen\frac{n\pi x}{L}sen\frac{n\pi at}{L} \tag{14}$$

Para determinar as constantes C_n e K_n são analisadas as condições iniciais, isto é:

$$u(x,0) = f(x) \quad e \quad u_t(x,0) = g(x)$$

portanto

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n sen\frac{n\pi x}{L} = f(x)$$

em que as constantes C_n são os coeficientes da série de Fourier em senos para a função $f(x)$, em $[0,L]$, isto é,

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad n = 1,2 \tag{15}$$

Supondo que a série possa ser derivada termo a termo em t, então a condição $u_t(x,0) = g(x)$ implica

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{n\pi a}{L} sen\frac{n\pi x}{L} = g(x)$$

logo,

$$\frac{n\pi a}{L}K_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx$$

da qual se obtém:

$$K_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx \tag{16}$$

Conclui-se então de (16) e (17) , que a função u(x,t) dada por (15) é a solução do problema (10) satisfazendo as condições de fronteira e as condições iniciais

A CORDA DEDILHADA

Diversos instrumentos musicais são constituídos por cordas vibrantes, com suas extremidades fixas. Por exemplo, as cordas de um violino, de um violão, etc. Ao perturbar-se uma corda vibrante a perturbação se propaga para o restante da corda, e, ao mesmo tempo a vibração provoca uma pequena alteração na pressão do ar, propagando-se como uma onda sonora pelo do ar e nosso ouvido é sensibilizado por essas ondas, às quais se dá o nome de sensações sonoras.

Considere, para cada n, as funções,

$$u_n(x,t) = C_n sen\frac{n\pi x}{L}cos\frac{n\pi at}{L} + K_n sen\frac{n\pi x}{L}senn\pi at L$$

dadas por (15), as quais são soluções da equação de onda e satisfazem as condições de fronteira, $u(x,0) = u(x,L) = 0$. As funções u_n são chamadas ondas estacionárias no sentido que os pontos x tais que $\frac{n\pi x}{L} = K\pi$, $K = 0, 1, 2\ldots$ resulta que $sen\frac{n\pi x}{L} = 0$, portanto, esses pontos permanecem parados e são denominados nós da onda estacionária. O comprimento de onda é a distância entre dois nós.

Escrevendo

$$\alpha_n = \sqrt{C_n^2 + K_n^2} \quad e \quad \theta = arctg\frac{C_n}{K_n} \tag{17}$$

então pode ser escrita na forma:

$$u_n(x,t) = \alpha_n sen(\frac{n\pi at}{L} + \theta_n)\ sen\frac{n\pi x}{L}, \tag{18}$$

portanto as ondas estacionárias são os gráficos da função $sen\frac{n\pi x}{L}$, cuja amplitude varia com o tempo, e dada por $\alpha_n \ldots\ldots \alpha_n$

Para cada t fixo a configuração da corda é descrita por uma senóide.

Os gráficos abaixo nos mostram as três primeiras ondas estacionárias. Para $n = 1$ temos a primeira onda estacionária, ou modo fundamental de vibração, dada por

$$\mu_1(x,t) = \alpha_1 sen(\frac{\pi a t}{L} + \theta_1)\ sen(\frac{\pi x}{L})$$

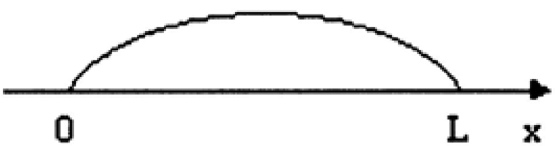

Figura 3 - Primeira onda estacionária.

Se $n = 2$, temos a segunda onda estacionária e, se $n = 3$, temos a terceira onda estacionária ,como mostram as figuras (4) e (5) respectivamente.

Figura 4 - Segunda onda estacionária.

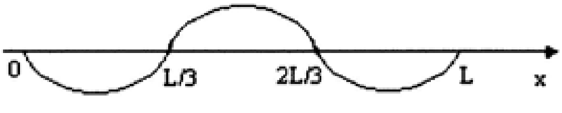

Figura 5 - Terceira onda estacionária.

Observa-se também de (19) que o movimento de cada ponto x fixado da corda, a função $u_n(x,t)$ obedece a uma lei senoidal de amplitude $A = \alpha_n\ sen\frac{n\pi x}{L}$ e período $T_n = \frac{2L}{na}$ e freqüência dada por $\omega_n = \frac{na}{2L}$. Assim, a freqüência de vibração de todos os pontos da corda é a mesma. A freqüência fundamental ou primeiro harmônico $\varpi_1 = \frac{a}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ está relacionado com a altura do som produzido por um instrumento de cordas.

A freqüência da vibração é o número de vezes que a corda vibra por segundo, quanto maior a freqüência de um som , mais agudo ele será. A freqüência de vibração de uma corda depende do material da corda e da tensão com que ela está esticada. Quanto maior a tensão na corda, maior é a altura do som.Do mesmo modo, quanto menor é o comprimento da corda mais alto é o som ,isto é, a altura do som aumenta na razão inversa do comprimento da corda.

Analisa-se a seguir,o modelo que descreve o movimento de uma corda flexível,presa nos extremos e posta a vibrar ,ao ser dedilhada , devido a um deslocamento da posição de equilíbrio.

As configurações da corda são aquelas descritas pela função $u(x,t)$ a qual é solução do problema de valor inicial (10) cujas condições iniciais são descritas por

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = & \left\{ \begin{array}{ll} bx, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ b(L-x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{array} \right. \\ g(x) = 0 & \end{array} \right. \tag{19}$$

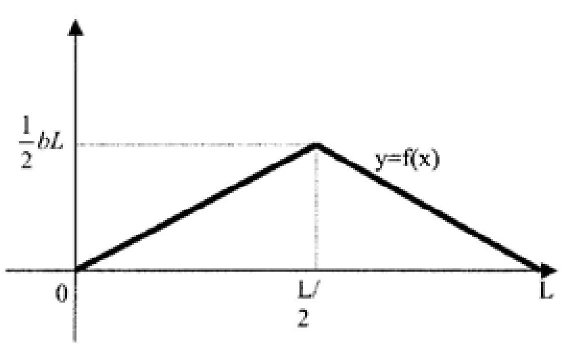

Figura 6 - Corda Dedilhada.

O gráfico da Figura 6 mostra uma corda de violino ou de violão , de comprimento L ao ser dedilhada no ponto $\frac{L}{2}$.

Considerando as funções f e g definidas em (20), a solução do problema (10) é dada por (15) com $K_n = 0$ e $C_n = \frac{4bL}{n^2\pi^2}\ sen\frac{n\pi}{2}$ n=1,2 ...... Assim o n-ésimo harmônico é dado por,

$$u_n(x,t) = \frac{4bL}{\pi^2 n^2}\, cos\frac{n\pi at}{L}\; sen\frac{n\pi}{2}\; sen\frac{n\pi x}{L} \quad n = 1,2\ \ldots \tag{20}$$

Observa-se que como a corda foi dedilhada em $x = \frac{L}{2}$ os harmônicos pares permanecem mudos. O primeiro harmônico nunca é mudo.

A configuração de $u(x,t)$ é a superposição desses harmônicos.

CONCLUSÃO

O modelo da corda dedilhada exemplifica o comportamento das soluções da equação da corda vibrante , presa nos extremos e conhecem-se as condições iniciais. Essa análise das soluções nos dão informações sobre as vibrações das cordas dos instrumentos musicais.As ondas sonoras captadas pelo ouvido humano são o resultado dessas vibrações.Os resultados obtidos desse estudo da corda vibrante podem ser aplicados a outros problemas modelados pela equação das ondas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W.E. ; DIPRIMA, R. C. 1999. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro.Livro Técnico e Científico Editora.

EDWARDS, C. H; PENNEY.E.D.. 1995. **Equações diferenciais elementares com problemas de contorno**. Prentice - Hall do Brasil.

FIGUEIREDO, D.G.. 1977. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro. IMPA. 3.ed..