AS INTEGRAÇÕES DAS FUNÇÕES ESCADA[1]

STEP INTEGRATION FUNCTIONS

Michele dos Santos Zeilmann[2]
Adilção Beust[3]

RESUMO

No presente trabalho, o objetivo foi realizar um estudo crítico e introdutório sobre a noção de integral seguindo Lebesgue, pela análise da construção feita por Riesz. Num primeiro momento, apresentaram-se alguns conceitos básicos como a noção de "conjunto de medida nula", a propriedade "quase sempre" e outros e, também, foram estudados os fundamentos da integral de Riemann. Na etapa seguinte, estudou-se a formulação do método de Riesz, considerando o espaço vetorial das funções escada, em que se definiu a noção de integral. Entre outros resultados importantes, foram demonstrados dois lemas fundamentais que são os alicerces do método utilizado. A partir daí, foi obtida a classe das sucessões crescentes de funções escada cujas integrais são limitadas, e, as quais, provou-se que são convergentes. Foi definido também uma coleção de funções limites de sucessões e estendeu-se a noção de integral a essas funções. Numa última etapa, por inclusão da diferença de seus elementos, a nova coleção obtida foi ampliada a fim de se obter uma extensão da noção de integral. Essa nova classe obtida é a classe das funções integráveis à Lebesgue e a integral definida na nova coleção é a integral da Lebesgue.

Palavras-chave: funções escada, método de Riesz, integral de Lebesgue

ABSTRACT

The present work has as its main purpose to do a critical and introductory study about the integral function according to Lebesgue, through an analysis of the construction done by Riesz. In a first moment, some basic concepts such as the notion of "null measure set", the property "almost always" and others were presented as well as the foundations of the Rieman integral. Among other important results, two fundamental concepts which are the basis of this method were demonstrated. From this point on, the class of growing successions of the step function whose integrals are limited, was obtained; this class of successions has been proved to be convergent. It was

[1] Trabalho Final de Gradução.
[2] Curso de Matemática - Licenciatura Plena. UNIFRA.
[3] Orientador.

also defined a collection of the successive limit functions and the notion of integral was extended to these functions. In a last step, by including the difference of its elements, the new collection obtained was widened with the purpose of obtaining an extension of the notion of integral. This new class obtained is the function class integral to Lebesgue and the integral defined in the new collection is the Lebesgue integral.

Key words: step functions, Riezs method, Lebesgue integral

INTRODUÇÃO

A integral de Riemann foi proposta em torno de 1854, pelos trabalhos de Cauchy e Riemann e , basicamente, consiste em aproximar a área de uma região abaixo do gráfico de uma função f ($f(x) \geq 0$), pela soma das áreas de vários retângulos, ou seja, a função f é aproximada por funções escada do tipo: $\phi(x) = c_i$, para $t_{i-1} \leq x \leq t_i$, em que $a = t_0 < t_1, t_2, < ... < t_n = b$.

E, assim, tem-se $\int_a^b \phi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i (t_i - t_{i-1})$, tal que o supremo do conjunto $\{\int_a^b \phi : \phi$ função escada$\}$ é denominada de integral de f.

Entretanto, a partir de 1950, Henri Lebesgue e outros matemáticos começaram a perceber algumas desvantagens ou limitações na integração de Riemann. Assim, há uma certa limitação no rol de funções que podem ser integradas à Riemann, por exemplo, a função

$$f(x) \begin{cases} 1, \text{ se } x \in Q \cap [0,1] \\ 0, \text{ se } x \notin Q \cap [0,1] \end{cases}$$

não é integrável à Riemann, pois o supremo das somas inferiores é zero e o ínfimo das somas superiores é um. Outra limitação é que a passagem do limite para dentro da integral é válida somente em casos especiais e, também, que o limite de uma seqüência de funções integráveis não é necessáriamente integrável. Desta maneira, a integral de Riemann apresenta muitas desvantagens nas aplicações, pois surgem nos diversos ramos das ciências, funções que descrevem um fenômeno e que não são integráveis à Riemann.

Então, para lidar com estas questões, Lebesgue desenvolveu uma nova forma de integração. Esta integral difere da de Riemann em dois pontos principais:

- A forma de medir foi alterada e isto possibilitou a inclusão de novos conjuntos (não somente intervalos) na definição de função escada.
- A maneira de aproximar funções por meio de função escada foi modificada, e o conceito de função escada se tornou mais geral.

Portanto, ao longo desse trabalho dar-se-á ênfase ao estudo da integral de Lebesgue pelo método de Riesz, em que surgem duas conseqüências bastante úteis. A primeira é que se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e g é integrável à Lebesgue, então f também o é; e a outra é o teorema da convergência dominada.

CONCEITOS BÁSICOS

Para melhor compreensão do trabalho, serão enumerados nesta seção alguns conceitos e notações matemáticas que serão, frequentemente utilizados, no decorrer do texto, a fim de facilitar a leitura do mesmo.

a) Um dado conjunto E tem medida nula quando para todo $\varepsilon > 0$, existe uma família enumerável de intervalos abertos $[i_k]k \in N$, tal que:

(i) $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$, ou seja, I_k é um recobrimento de E; (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} amp(I_k) < \varepsilon$, em que $amp(I_k)$ é a amplitude do intervalo I_k.

Se um conjunto E tem medida nula, então um subconjunto $E' \subset E$ também tem medida nula.

b) Diz-se que uma propriedade $P(x)$ vale "quase sempre" em $x \in (a,b)$ a menos de um conjunto de medida nula.

c) $R(a,b)$ denota a classe de todas as funções limitadas e integráveis à Riemann num intervalo (a,b), na qual, valem as seguintes propriedades: (i)Se $u, v \in R(a, b)$ e $\alpha, \beta \in \Re$, então $\alpha u + \beta v \in R(a,b)$;

(ii) $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\, dx = \alpha \int_a^b u(\mathrm{x})\, \mathrm{dx} + \beta \int_a^b v(x)\, dx.$

d) um conjunto E é dito espaço vetorial quando seus elemantos são chamados de vetores, no qual se definem duas operações: (i) Se u, v são vetores e $u, v \in E$, então $u + v \in E$; (ii) Se $\alpha \in \Re$ e $v \in E$, então $\alpha v \in E$.

e) seja E um subconjunto de um dado intervalo (a,b), seja, $E \subset (a,b)$. A função $\chi_E(a,b) \to \Re$, definida por:

$$\chi_E \begin{cases} \chi_E(x) = 1, x \in E \subset (a,b) \\ \chi_E(x) = 0, x \notin E \subset (a,b) \end{cases}$$

é a função caracteristica de E.

f) Teorema de Borel-Lebesgue: Seja F um subconjunto fechado e limitado da reta. De toda família $(A\lambda)$, $\lambda \in L$, de abertos tais que $F \subset \bigcup \lambda \in \mathrm{L}$ e $\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v)$ para todo par de vetores $u, v \in E$ e todo par de escalares $\alpha, \beta \in \Re$ são chamadas funcionais lineares.

h) Dada uma função u: $(a,b) \to \Re$, definem-se as partes positivas e negativas de u, da seguinte maneira: $u^+ = u \vee$ e $u^- = (-u) \vee 0$, em que 0 é a função nula.

(i) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente se, e somente se dado $\varepsilon > 0$ existir n_0 (dependendo apenas de e) tal que $|\sum_{j=n}^{m} u_j(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in A$ e todos $m \leq n\ ^3\ n_0$.

INTEGRAL DE RIEMANN

A noção de integral de uma função como cálculo de uma área surgiu no século XVII, juntamente com o Teorema Fundamental do Cálculo, que afirma que $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, isto é $F'(x) = f(x)$, sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$. Esta igualdade era válida somente para funções contímuas num dado $[a, b]$ e a noção clara de continuidade só apareceu no século XVIII, mas só esta exigência não foi suficiente.

Foi aí nesse contexto que, aproximadamente no ano de 1852, Riemann, um estudante de doutorado apresentou o seguinte problema: "Em que condições uma certa função é integrável?" E, a partir dessa pergunta, foi possível definir a integral e seus critérios de integrabilidade:

Seja $u: I \rightarrow \Re$ uma função limitada e contínua num dado intervalo (a,b) e D uma decomposição de I, tal que: $M_j = sup\ [u(x): x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ é o supremo de $u(x)$ e $m_j = inf\ \{u(x): x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ é o ínfimo de u(x), e ainda, $s\ (u,D) = \sum_{j=1}^{k} m_j(x_j - x_{j-1})$ é a soma inferior de $u(x)$ e $S(u,D) = \sum_{j=1}^{k} M(x_j - x_{j-1})$ é a soma superior de $u(x)$.

Daí, é possivel definir $\int_{\underline{a}}^{b} u(x)dx$ e $\int_a^b u(x)dx$ como sendo a integral inferi or e a integral superior de $u(x)$, respectivamente.

Assim, se $s(u,D) \leq S(u,D)$, tem-se que $\int_a^b u(x)dx \leq \int_a^b u(x)dx$ e $u(x)$ é integrável quando: $\int_a^b u(x)dx = \int_a^b u(x)dx = \int_a^b u(x)dx$, que é a integral de Riemann num dado intervalo (a,b).

Ainda, para Riemann, é considerada a cada decomposição D de (a,b), tal que $S(u,D)^s$ - $(u,D) < \varepsilon$, a soma:

$$S = \sum_{j=1}^{k} [\Delta_j \, u(x_{j-1} + \varepsilon_j D_j)],$$

tal que $\Delta_j = x_j - x_{j-1}$, em que:

$$\int_a^b u(x)dx = \lim_{\Delta=\{max\Delta j\}\to 0} S = L \ .$$

A partir dessa análise, é possivel escrever o seguinte resultado devido a Riemann:

"A condição necessária e suficiente para que uma função $u{:}(a,b)\to\Re$ seja integrável a Riemann em um dado intervalo (a,b) é que $u(x)$ seja contínua quase sempre em (a,b)".

Assim a propriedade mais importante das funções integráveis à Riemann é que se $u \in R(a,b)$ e $x \in (a,x)$ então u é integrável em (a,x) por Rieman, ou seja, a restrição de u a $(a,x) \in R(a,x)$. Então é possivel construir a nova função $w{:}[a, b] \to \Re$ tal que $w(x) = \int_a^x u(t)dt$. E, ainda, diz-se que a função $v{:}[a, b] \to \Re$ é integral definida de u se v é dada por $v(x) = w(x) + c$, em que c é uma constante real arbitrária. Daí, obtém-se que $u \in R(a,b)$ as integrais indefinidas de u são obtidas por $v(x) = \int_a^x u(t)dt + c$.

Sabe-se que se u é uma função contínua em (a,b), então toda integral indefinida v, de u é uma primitiva de u, isto é, $v'(x) = u(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Reciprocamente, se u é contínua em (a,b), uma função $v{:}[a,b] \to \Re$ é primitiva de u se e somente se, v é uma integral indefimida de u. Este resultado é bem conhecido por ser o Teorema Fundamental do Cálculo, pois no espaço $C(a,b)$ das funções contínuas em (a,b), ele nos dá uma relação harmoniosa e simples entre a derivação e a integração no sentido de Riemann.

Entretanto, se a função u de $R\,(a,b)$ não for necessáriamente contínua, então pelo resultado devido a Riemann, u é contínua quase sempre em (a,b) e o que afirma é que as integrais indefinidas de u são deriváveis quase sempre em (a,b) e, mais detalhadamente, nos pontos de continuidade de u, tem-se, $v' = u$. Desta forma, conclui-se que as integráis indefinidas de u, quando se entende por "primitiva de u" toda função v que satisfaz $v'(x) = u(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Logo, esta definição de primitiva na forma anterior é muito exigente e a que será adotada é a que segue:

DEFINIÇÃO

Seja $u:(a, b) \to \Re$ uma função contínua. Diz-se primitiva de u, toda a função $v:[a, b] \to \Re$ derivável quase sempre em (a, b) e que satisfaz $v' = u$ quase sempre em (a,b).

O exemplo, a seguir, mostra que a recíproca não é verdadeira, existem primitivas de $u \in R\,(a, b)$ que são integrais indefinidas de u.

Exemplo: Seja v a função definida por:

$$v(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq x \leq 3 \\ 2 \text{ se } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Nota-se que v é uma primitiva da função u identicamente nula em $(0,5)$, mas não e´uma integral indefinidade u pois as integrais indefinidas de u são as funções constantes em $[0,5]$.

Contudo, observa-se que o conjunto das integrais indefinidas de $u \in R(a,b)$ está contido no conjunto de suas primitivas e, assim, dentre as primitivas de u, como caracterizar as que são integrais indefinidas? A resposta a esta deficiência e outras de Integral de Riemann é que motivou a definição da integral de Lebesgue, o que será feito a seguir, pelo método de Riesz, a partir das funções escada.

INTEGRAL DE FUNÇÃO ESCADA

Com o aparecimento de funções mais gerais, exigindo formulações mais fracas que as de Riemann, surgiu a possibilidade de estudar a integrabilidade da soma de uma série convergente através da integração termo a termo. E, assim, é fundamental a noção de função escada a fim de introduzir um estudo sobre a integral de Lebesgue, a qual tem como alicerce, neste trabalho, dois lemas fundamentais, resultados propostos por Riesz.

DEFINIÇÃO

Diz-se que $u:(a,b) \to \Re$ é uma função escada, se existe decomposição D em (a,b) tal que u é constante em cada subintervalo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$, com $k=1,2,...,n$ de D.

Exemplo: A função $u:]-2, 2[\to \Re$ definida por:

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+x^{2k}}$$

é uma função escada.

A decomposição D não é determinada univocamente para cada u e é sempre possível ser refinada, acrescentando novas subdivisões aos I_k de D, associadas a u

Se um número finito de pontos de um intervalo (a,b) for retirado, ainda é possível obter uma função escada, conforme o lema a seguir.

LEMA

Se u e v são duas funções escada definidas em um intervalo (a,b), então existe uma decomposição D desse intervalo (a,b) associada simultaneamente a u e a v.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam D_1 e D_2 decomposições associadas a u e a v simultaneamente.

É possível considerar $D = D_1 + D_2$ por acréscimo a D_1 dos pontos de D_2, e vice-versa.

Portanto, D está associada simultaneamente a u e a v.

Com base no lema, descrito anteriormente, define-se $S_0(a,b)$ ou S_0, como a classe das funções escada definidas num intervalo (a,b) que é um espaço vetorial real.

Se u e v são funções escada definidas num intervalo (a,b), então $u \vee v$ e $u \wedge v$ também são funções escada. Logo, S_0 é um reticulado vetorial real.

Desta forma, a fim de obter essa classe de funções escada, será definida a integral em S_0

INTEGRAL EM S_0

DEFINIÇÃO

Seja $u \in S_0$ e D uma decomposição de um intervalo (a,b) associada à u e seja c_k um valor constante assumido por u em intervalo $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ de D.

Logo, o número real $\sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$ é a integral de u em (a,b) isto é:

$$\int u = \int_a^b u(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

Agora é preciso provar que a integral de uma função escada definida em S_0 não depende da decomposição D considerada, na proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO

Se $u \in S_0$, então a integral de u em (a,b) não depende da decomposição D de (a,b), associada a u.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $u \in S_0(a,b)$ e sejam duas partições associadas a u, tais que $\pi_1 = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$, $\pi_2 = \{a = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = b\}$

A integral de u com a partição π_1 é $I_1 = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$.

Fazendo $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ em cada intervalo (x_{k-1}, x_k), de π_1 é possível encontrar pontos de π_2 de maneira que $x_{k-1} = z_0^k < z_1^k < z_2^k < ... < z_{n(k)}^k = x_k$, observando que:

$$x_k - x_{k-1} = (z_{n(k)}^k - z_{n(k)-1}^k) + (z_{n(k)-1}^k - z_{n(k)-2}^k) + ... + (z_2^k - z_1^k) + (z_1^k - z_0^k)$$

tem-se:

$$I_{\pi 1} = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{p=1}^{n(k)} (z_p - z_{p-1}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n(k)} c_k(z_p - z_{p-1}) = I\pi$$

Esta integral de u com a partição π. Analogamente, é possivel mostrar que $I_{\pi 2} = I_\pi$.

Assim, $I_{\pi 1} = I_{\pi 2}$, ou seja, a integral não depende da partição.

Agora, serão enunciados e demonstrados dois lemas fundamentais para a construção da definiçaõ de integral de Lebesgue apresentada por Riesz.

Estes lemas serão indicados, no texto, como Primeiro Lema Fundamental e o Segundo Lema Fundamental e, para a compreensão destes dois lemas, serão consideradas as seguintes observações:

(1) Se $\alpha \in \Re$ e $\beta \in \Re$ e $u, v \in S_0$, então $\int(\alpha u + \beta v) = \int \alpha u + \int \beta v = \alpha \int u + \beta \int v$, isto é, $u \rightarrow \int u$, é uma aplicação que a cada $u \in S_0$ e $u \leq v \Rightarrow \int_a^b u \leq \int_a^b v$, significa que o funcionamento linear $u \rightarrow \int_a^b u > 0$ em S_0.

(2) $u \leq v$ significa que existem decomposições D_1 e D_2 de (a,b) associadas, respectivamente a u e a v tais que $u(x) \leq v(x)$, para todo $x \in (a,b)$ distintos dos pontos de divisõade $D_1 + D_2$. Pode-se admitir $u(x) \leq v(x)$ uma vez que, se forem alterados os valores de uma função escada em um número finito de pontos, sua integral não se modifica.

PRIMEIRO LEMA FUNDAMENTAL

Seja (u_k) uma sucessão decrescente de funções escada não negativas em um intervalo (a,b). Se $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$, quase sempre em (a,b), então $\lim\limits_{k\to\infty} \int_a^b u_k = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $E_k = \{x: u_k(x)$ é descontínua$\}$ e $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ é enumerável. Logo, E tem medida nula .

Seja F o conjunto de todos os pontos em que a sequência (u_k) não converge para zero e que possui, por hipótese, medida nula.

Assim, tem-se $G = E \cup F$ e G tem medida nula.

Daí, dado $\varepsilon > 0$, existe $j = (j_n)$, em que j_n é um recobrimento enumerável de G, tal que:

$$\mathrm{j} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} amp(j_n) < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad M > sup\{u_1(x);\ x \in (a,b)\}$$

Seja $p \in (a,b) - G$ então $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(p) = 0$.

Logo, existe um número natural m, que depende de p e ε, tal que $u_m(p) = \dfrac{\varepsilon}{2(b - a)}$.

Como $p \notin G$, u_m é contínua em p e, como u_m é uma função escada, existe um intervalo aberto $I(p)$, para todo $x \in I(p)$, tal que $u_m(x) < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Como a seqüencia (u_k) é decrescente, para todo $k \geq m$, tem-se $u_k(x) \leq u_m(x) < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Sendo $I = \{I(p);\ p \in (a,b) - G\}$, vem que: $I \cup G$ é uma família de intervalos abertos que cobre $[a,b]$.

Daí, pelo teorma de Borel-Lebesgue, existe uma família finita de intervalos $I \cup j$ que ainda cobre $[a,b]$, dada por $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_s, I(p_1), I(p_2), ..., I(p_n)\}$ e $\sigma_i \in G$ e $I(p_i) \in I$.

Seja $\mathrm{k} = \bigcup_{i=1}^{n} I(p_i)$, $j = \bigcup_{i=1}^{s} \sigma_i$ e $S = j \cap [a,b]$, então:

$$0 \leq \int_a^b u_k = \int_a^b u_k(\chi_k + \chi_s) = M$$

pois, $\chi_k + \chi_s = 1$, e ainda $M = \int_a^b u_k\chi_k + \int_a^b u_k\chi_s$.

Daí,

$$\int_a^b u_k\chi_s \leq u_1 \sum_{n=1}^{\infty} < \varepsilon u_1$$

$$\int_a^b u_k\chi_s \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}$$

portanto, $0 \leq \int_a^b u_k \leq \varepsilon + \varepsilon u_1$

RECIPROCA DO PRIMEIRO LEMA FUNDAMENTAL

Seja (u_k) uma seqüência decrescente de funções escada não negativas. Se $\lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k = 0$, então $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ quase sempre em (a,b).

DEMONSTRAÇÃO

Para cada x, tem-se que $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$, pois $u_k(x)$ é uma sequência numérica decrescente e limitada por zero.

É suficiente provar $u(x) = 0$ quase sempre num intervalo (a,b). Para isso, será considerado o conjunto $Ej = \{x \in (a.b): u(x) > 1/j\}$ como sendo o conjunto de pontos em que $u \neq 0$.

Portanto, será provado que, para cada $j \in N$, o conjunto E_j tem medida nula. Daí, como $u_k(x) \geq u(x)$, tem-se $E_j \subset A_k$, onde $A_k = \{x \in (a,b): u_k(x) > 1/x\}$.

Como u_k é função escada, então A_k é uma união finita de intervalos disjuntos $I_1, I_2, ..., I_s$.

Seja $S = \bigcup_{j=1}^{s} I_j$.

Como $u_k(x) \geq u_k(x)\chi_s$, então:

$$\int_a^b u_k(x)dx \geq \int_a^b u_k(x)\chi_s(x)dx \geq 1/j \sum_{j=1}^{s} amp(I_p)$$

e como $\lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k = 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in N$, tal que para todo $k > k_0$, tem-se $\int_a^b u_k < \varepsilon$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, para k suficientemente grande, vem que:

$$\varepsilon > \int_a^b u_k > 1/j \sum_{j=1}^{s} amp(I_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^{s} amp(I_j) < \varepsilon\, j$$

e como $E_j \subset \bigcup_{k=1}^{s} I_k$, E_j tem medida nula.

SEGUNDO LEMA FUNDAMENTAL

Seja (u_k) uma sucessão de funções escada em (a,b), crescente e tal que a sucessão das integrais $(\int u_k)$ tenha um majorante finito, isto é, existe M tal que $\int u_k < M$, para todo $k \in N$. Então, a sucessão (u_k) converge para um limite

finito u quase sempre num dado intervalo (a,b).

DEMONSTRAÇÃO

Considere (u_k) um seqüência positiva, pois $u_1(x) \leq u_2(x) \leq ... \leq u_k(x)$.

Daí, a sequência $(u_k) = u_k - u_1$ também é positiva.

Seja $E_0 = \{x: \lim_{k\to\infty} u_k(x) = \infty\}$. É necessário mostrar que ε_0 tem medida nula:

Dado $\varepsilon >$ o, tem-se os seguintes conjuntos: $E_{k,\varepsilon} = \{x: u_k(x) > M/\varepsilon\}$, e ainda $E_{1,\varepsilon} \subset E_{2,\varepsilon} \subset ... \subset E_{k,\varepsilon}$ e, $E_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,\varepsilon}$.

Como as u_k são funções escada, para cada k, o conjunto $E_{k,\varepsilon}$ ou é vazio, ou é a união de intervalos disjuntos contidos em (a,b).

Denota-se por $m_{k,\varepsilon}$ a soma das amplitudes desses intervalos, tal que:

$$M > \int_a^b u_k = \sum_{j=1}^{n(k)} c_j^k (x_j^k - x_{j-1}^k)$$

em que c_j^k é o valor de u_k no intervalo $(x_j^k - x_{j-1}^k)$ de uma partição associada a u_k.

Se $E_{k,\varepsilon} \neq \phi$, então é possivel separar o somatório acima em dois outros somatórios $\sum'$ e $\sum''$, em que, em $\sum'$, tem-se $c_j^k > \underline{M}$.
ε

$$M > \int_a^b u_k = \sum = \sum{}' + \sum{}'' > \frac{M}{\varepsilon} m_{k,\varepsilon}$$

Daí, é possível concluir que: $m_{k,\varepsilon} < \varepsilon, E_{k,\varepsilon}, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,\varepsilon}$ e E_0 tem medida nula.

Sabe-se que, no espaço vetorial S_0, a integral é uma funcional linear e, assim, este poderá ser estendido a um espaço vetorial contendo S_0, que será o espaço vetorial das funções integráveis a Lebesgue.

DEFINIÇÃO

Chama-se S_1 (a,b) ou S_1 o conjunto das funções definidas em (a,b) que são limites quase sempre de sucessões de função em S_0 satisfazendo as condições do Segundo Lema Fundamental, ou seja, a função u: $(a,b) \rightarrow \Re \in S_1$, se e somente se, existe uma sucessão (u_k) crescente de S_0, tal que a sucessão das integrais $(\int u_k)$ tem majorante e $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ quase sempre em $x \in (a,b)$.

Partindo dessa definição, será definida a integral em S_1.

INTEGRAL EM S_1

Seja $u \in S_1$ e (u_k) uma sucessão de funções em S_0, satisfazendo o Segundo Lema Fundamental. Sendo esta sucessão (u_k) crescente, vem que $(\int u_k)$ é crescente e como $\int u_k$ tem majorante, ela converge, isto, é, $\lim_{k\to\infty} \int u_k$ existe e é finito, e, este limite será a integral de u em (a,b), como elemento de S_1, ou seja, $u = \int_a^b u(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k(x)dx$.

Para afirmar que a integral em S_1 está bem definida, deverão ser consideradas as seguintes observações:

1- A integral em S_1 não depende da sucessão (u_k).

2- Para $u \in S_0$, a integral de u como elemento de S_0 coincide com a integral de u como elemento de S_1.

A próxima etapa será estender a integral definida em S_0, à nova classe S_1, mostrando que ela está bem definida e que preserva a ordem.

PROPOSIÇÃO

Sejam as funções u e $v \in S_1$, definidas pelas sequências (u_k) e (v_k) de S_0, satisfazendo o Segundo Lema Fundamental. Se $u \leq v$, quase sempre num intervalo (a,b), tem-se $lim \int_a^b u_k \leq lim \int_a^b u_k$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja uma função de (u_k) e seja $(u_m - v_k)$, com $k \in N$, uma sequência decrescente que converge quase sempre para $u_m - v$, isto é, $\lim_{k\to\infty} (u_m - v_k)(x) = u_m(x) - v(x) \leq u(x) - v(x) \leq 0$ quase sempre em $x \in (a,b)$, por hipótese.

Portanto: $\lim_{k\to\infty} (u_m - v_k)^+ = (u_m - v)^+ \equiv 0$.

Utilizando o lema, tem-se que $\lim_{k\to\infty} (u_m - v_k)^+ = 0$, mas; $u_m - v_k \leq [u_m - v_k]^+$

Daí, para todo k, tem-se:

$$\int_a^b (u_m - v_k) \leq \int_a^b [u_m - v_k]^+$$

$$\int_a^b u_m - \lim_{k\to\infty} \int_a^b v_k \leq \lim_{k\to\infty} \int_a^b [u_m - v_k]^+ = 0$$

$$\int_a^b u_m \leq \lim_{k\to\infty} \int_a^b v_k$$

quando m $\to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b u_m \leq \lim_{k\to\infty} u_k.$$

COROLÁRIO

Se a função $u \in S_1$ e u é limite das sucessões (u_k) e (v_k) de S_0, nas hipóteses do Segundo Lema Fundametal, então $\lim_{k\to\infty} \int u_k = \lim_{k\to\infty} \int v_k$, ou seja, a integral em S_1 está bem definida.

DEMONSTRAÇÃO

Basta considerar $v \geq u$ e $v \leq u$ na proposição anterior.

PROPOSIÇÃO

A integral em S_1, quando é restrita as funções de S_0, coincide com a integral em S_0.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $u \in S_0$, $I_0(u)$ e $I_1(u)$ as integrais de u em S_0 e S_1 respectivamente. Prova-se que se u $\in S_0$ então $I_1(u) = I_0(u)$.

(u_k) é uma sequência de funções escada que satisfazem o Segundo Lema Fundamental e $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ quase sempre num intervalo (a,b).

Considerando $u_k = u$, vem que $I_1(u) = \lim\limits_{k\to\infty} I_0(u_k) = \lim\limits_{k\to\infty} I_0(u) = I_0(u)$.

É preciso considerar também que S_1 não é um espaço vetorial, tal que se u e $v \in S_1$, com $u - v \notin S_1$ e S_1 é chamado cone convexo, como afirma a proposição abaixo:

PROPOSIÇÃO

Seja u e $v \in S_1$ $\lambda > 0 \in \Re$. tem-se: (i) $u + v \in S_1$ e, (ii) $\lambda u \in S_1$.

DEMONSTRAÇÃO

(i) Seja (u_k) e (v_k) seqüências de funções escada de S_0, satisfazendo o Segundo Lema Fundamental, sabendo que $(u_k + v_k)$ é uma sequência de funções escada que também satisfaz o Segundo Lema Fundamental, convergido para $u + v$, daí $u + v \in S_1$ e:

$$\int_a^b (u+v) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b (u_k + v_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k + \lim_{k\to\infty} \int_a^b v_k = \int_a^b u + \int_a^b v$$

Logo, $u + v \in S_1$.

(ii) Seja (λu_k) uma sequência de funções escada crescente, pois $\lambda \geq 0$, limitada uniformemente e convergindo para λu, daí $\lambda u \in S_1$ e:

$$\int_a^b \lambda u = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \lambda u_k = \lim_{k\to\infty} \lambda \int_a^b u_k = \lambda \lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k = \lambda \int_a^b u = \lambda u$$

Logo, $\lambda u \in S_1$.

Como ficou estabelecido, a integral em S_1 está bem definida. Então, é possível afirmar que as funções integráveis à Riemann coincidem com as funções integráveis em S_1, como afirma a proposição abaixo. Para isso, será considerado que $R(a,b) = \{f:(a,b) \to \Re$; integráveis à Riemann$\}$.

PROPOSIÇÃO

Se $u \in R(a,b)$ então $u \in S_1(a,b)$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja a partição P de (a,b), tal que $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$, em que $x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$ e seja uma sequência de funções escada da forma:

$u_n(x) = inf\,[u(x)]$ para todo $x \in (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, 2, ..., n$.

(u_n) é uma sequência crescente de funções escada e $\int_a^b u_n(x)dx =$ $s(u,P_n) \leq \int_a^b u(x)dx$.

Logo, $\int_a^b u_n \leq M$.

Assim, é preciso mostrar que $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$.

Como $u \in R(a,b)$ em que u é contínua quase sempre para todo $x \in (a,b)$.

Seja $x_0 \in (a,b)$ em que u é contínua e $u(x_0) - u_n(x_0) \leq w(I_n, x_0)$, em que $I(x_0)$ é o intervalo de P que contém x_0.

Sendo u contínua em x_0 e $w(x_0) = 0$, então $w(I_n, x_0) \to 0$ quando n aumenta.

Daí, $\lim_{n\to\infty} [u(x_0) - u_n(x_0)] = 0$, quase sempre em (a,b).

OBSERVAÇÃO

Nota-se que se $u \in R(a,b)$, então as integrais de u em $R(a,b)$ e S_1 coincidem, e que nem toda função de S_1 é uma função de $R(a,b)$, ou seja, a recíproca da proposição anterior, não é verdadeira, de forma geral conclui-se que: $S_0(a,b) \not\subseteq R(a,b) \not\subseteq S_1(a,b)$.

A próxima etapa será para definir a integral de Lebesgue-Riesz e determinar as funções integráveis à Lebesgue e suas caracteristicas, aprimorando a integrabilidade termo a termo da soma de uma série convergente.

DEFINIÇÃO

$L(a,b)$ é o subespaço das funções reais geradas por S_1, no qual $L(a,b)$ é um reticulado vetorial, ou seja, os elementos de $L(a,b)$ são combinações lineares finitas de elementos de S_1.

A partir desta definição é, possível determinar $w \in L(a,b)$, da seguinte forma:

PROPOSIÇÃO

$w \in L(a,b)$ se, e somente se, $w = u - v, u$ e $v \in S_1$.

DEMONSTRAÇÃO

($\Leftarrow$) como u e $v \in S_1$, então, por definição, $w \in L(a,b)$.

($\Rightarrow$) Se $w \in L(a,b)$, então $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$, $\lambda_i \in \Re$ e $v_i \in S_1$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

Daí, tem-se que $w_i \neq 0$ e é possível separar w em duas parcelas, uma com $\lambda_i > 0 = u$ e outra com $\lambda_i < 0 = v$, da seguinte forma: $w = \sum_{in_1} \lambda_i v_i - \sum_{in_2} (-\lambda_i) v_i$. Logo $w = u - v$.

Convém observar que a forma de escrever as funções de $L(a,b)$ como sendo a diferença de funções de S_1, não é única.

Agora é possível definir a integral de w, da seguinte forma:

Seja $w \in L(a,b)$, $w = u - v$ e $u, v \in S_1$, define-se a integral de w em $L(a,b)$ como sendo $\int_a^b w = \int_a^b u - \int_a^b v$, onde as integrais de u e v são definidas em S_1.

Para comprovar este fato, deve-se considerar $w = u_1 - v_1 = u_2 - v_2 = ... = u_n - v_n$, pois a escolha de w como a diferença de funções de S_1 não é única.

Daí, $u_1 + v_2 = u_2 + v_1$ e integrando essa igualdade em S_1, tem-se que:

$$\int_a^b (u_1 + v_2) = \int_a^b (u_2 + v_1) \Rightarrow \int_a^b u_1 - \int_a^b v_1 = \int_a^b u_2 - \int_a^b v_2 = ... = \int_a^b u_n - \int_a^b v_n = \int_a^b w$$

Logo, fica provado que a integral de w está bem definida em $L(a,b)$.

Ainda é necessário considerar algumas caracteristicas de $L(a,b)$:

A Proposição abaixo mostra que a integral em $L(a,b)$ é aditiva e homogênea.

PROPOSIÇÃO

A aplicação $w \rightarrow \int_a^b w$ é um funcional linear em $L(a,b)$.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $w_1, w_2 \in L(a,b)$, sendo:

(i) $w_1 = u_1 - v_1$ e $w_2 = u_2 - v_2$, com u_1, u_2, v_1 e $v_2 \in S_1$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (w_1 + w_2) &= \int_a^b (u_1 + u_2) - \int_a^b (v_1 + v_2)\\ &= \int_a^b u_1 - \int_a^b v_1 + \int_a^b u_2 - \int_a^b v_2\\ &= \int_a^b (u_1 - v_1) + \int_a^b (u_2 - v_2) = \int_a^b w_1 + \int_a^b w_2\end{aligned}$$

(ii) Dado $\lambda \in \Re$ tem-se que:

(a) Se $\lambda \geq 0$, tem-se $\int_a^b \lambda w = \lambda \int_a^b u - \lambda \int_a^b v = \lambda \int_a^b (u - v) = \lambda \int_a^b w.$

(b) Se $\lambda < 0$, tem-se $\int_a^b \lambda w = \int_a^b - |\lambda| w = - \int_a^b |\lambda| w = -|\lambda| \int_a^b w = \lambda \int_a^b w.$

Assim, pode-se definir o espaço vetorial $L(a,b)$ como segue abaixo.

DEFINIÇÃO

O espaço vetorial das funções integráveis à Lebesgue é denotado por $L(a,b)$ e a integral definida em *L(a,b)* denomina-se integral de Lebesgue.

A integral de Lebesgue, definida em *L(a,b),* é uma integral definida em S_1. Isto é, se $w \in S_1$ então a integral de w como elemento de S_1 coincide com a integral de Lebesgue de w. E, como $R(a,b) \subset S_1$ e a integral de Riemann da mesma função como elemento de S_1, conclui-se que toda função integravel à Riemann em (a,b) é integrável à Lebesgue e as duas integrais coincidem. Contudo, é w evidente que a recíproca não é verdadeira, pois nem toda função de S_1 é uma função de $R(a,b)$.

A proposição abaixo afirma que w é positiva quase sempre em (a,b):

PROPOSIÇÃO

Seja $w \in L(a,b)$ com $w \geq 0$ quase sempre, então $\int_a^b w \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $w = u - v$, u e $v \in S_1$. Como $w \geq 0$, $u - v \geq 0$,então $u \geq v$ quase sempre em $L(a,b)$.

Então, $\int_a^b u \geq \int_a^b v$.

Daí, $\int_a^b u - \int_a^b v \geq 0$, vem que $\int_a^b w \geq 0$.

O corolário, a seguir, afirma que $L(a,b)$ é crescente quase sempre num intervalo (a,b).

COROLÁRIO

Sejam $w_1, w_2 \in L(a,b)$. Se $w_1 \geq w_2$ quase sempre, então $\int_a^b w_1 \geq \int_a^b w_2$.

DEMONSTRAÇÃO

Basta considerar $w = w_1 - w_2$ e utilizar a proposição anterior.

COROLÁRIO

Se $w \in L(a,b)$, então $\left|\int w\right| \leq \int |w|$.

DEMONSTRAÇÃO

Do fato que $|w| \in L(a,b)$ e como $\pm w \leq |w|$, conclui-se pelo corolário anterior, que $\pm \int w \leq \int |w|$ e, logo, $\left|\int w\right| \leq \int |w|$.

A proposição, a seguir, afirma que, em $L(a,b)$, a integral é convergente.

PROPOSIÇÃO

Se $w \in L(a,b)$, então existe uma sequência de funções escada (w_n), com $\lim\limits_{n\to\infty} w_n(x) = w(x)$ quase sempre, com $x \in (a,b)$. E além disso $\lim\limits_{n\to\infty} \int |w_n - w| = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $w = u - v$, u e $v \in S_1$. Portanto, existem sequências crescentes de funções escada (u_n) e (v_n), cujos limites são finitos, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ e $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$

A sequência $w_n = u_n - v_n$ é constituída por funções escada e $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$.

Ainda:

$$\int_a^b |w_n - w| = \int_a^b |(u_n - v_n) - (u - v)| \leq \int_a^b |u_n - v_n| + \int_a^b |v_n - v_n| = \int_a^b (u - u_n) + \int_a^b (v - v_n) \to_{n\to\infty} 0$$

Logo: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |w_n - w| = 0$

É importante salientar que, a partir de S_0, foi determinada uma classe S_1 constituída de funções que são limite quase sempre de sucessões de funções de S_0, satisfazendo as hipóteses do Segundo Lema Fundamental.

Assim, na etapa seguinte, serão enunciados alguns teoremas de convergência que facilitam a compreensão da integração termo a termo.

Inicialmente será enunciado o Teorema da Convergência Monótona ou Teorema de Beppo Levi que garante que o mesmo método utilizado para construção de S_1 for aplicado em $L(a,b)$, não será obtida uma nova classe de funções.

TEOREMA DA CONVERGENCIA MONÓTONA

O Teorema da Convergência Monótona ou Teorema de Beppo-Levi é válido para as sucessões monótonas cujas sucessões das integrais é limitada, por isto, pode ser escrito nas formas crescente ou decrescente.

FORMA CRESCENTE

Se (w_n) é uma sucessão crescente de funções de $L(a,b)$ cujas suces sões das integrais $(\int w_n)$ são limitadas superiormente. Então (w_n) converge quase sempre para uma função $w \in L(a,b)$ e tem-se que $\int_a^b w = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja (u_n) uma sucessão crescente de funções de integráveis e supõe-se que existe uma constante A tal que $\int u_n < A$ para todo n. Seja a série $u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, para cada n, $v_n = u_{n+1} - u_n$. A demostração reduz-se a provar que a série acima converge quase sempre para uma função integrável v e que $\int v = \sum_{n=1}^{\infty} \int v_n$, pois, se este é o caso da sucessão (u_n) convergirá quase sempre para a função integrável $u = u_1 + v$ e $\int u = \int u_1 + \int v = \lim\limits_{n\to\infty} \int u_n$.

Para cada n, tem-se que $\int u_n = \int u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int v_k$ e portanto $\int \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \int u_n$ - $\int u_1 < A - \int u_1 = B$.

Sendo v_n integrável, pode-se escrever $v_n = U_n - V_n$, com U_n e V_n em S_1 e daí admitindo U_n e V_n não negativas, tem-se que $\int V_n < \frac{1}{2^n}$.

É possivel afirmar também que $(\sum_{k=1}^{n} V_n)_{k\in N}$ é uma sucessão convergente e limitada, e ainda, para todo n, vale a igualdade $\int \sum_{k=1}^{n} U_k = \int \sum_{k=1}^{n} v_k + \int \sum_{k=1}^{n} V_k$, conclui-se que a sucessão $(\int \sum_{k=1}^{n} U_k)_{n\in N}$ é limitada. Assim, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ convergem quase sempre para as funções U e V, respectivamente em S_1. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} U_n - \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ convergem quase sempre para $v = U - V$ que é uma função integrável. Além disso, tem-se que:

$$\int v = \int U - \int V = \sum_{n=1}^{\infty} \int (U_n - V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int v_n.$$

FORMA DECRESCENTE

Se (w_n) é uma sucessão decrescente de funções de $L(a,b)$ cuja sucessão das integrais $(\int u_n)$ é limitada inferiormente, então (u_n) converge quase sempre para uma função u de $L(a,b)$ e $\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n$.

DEMONSTRAÇÃO

De forma análoga, a demonstração da forma crescente.

Uma consequência da forma crescente de Beppo-Levi é a definição a seguir.

DEFINIÇÃO

Dado $w \in L(a,b)$ tal que $w \geq 0$ e $\int_a^b w = 0$. Então w = 0 quase sempre num dado intervalo (a,b).

Também com base no Teorema da Convergência Monótona, é possível enunciar o Teorema de Lebesgue, também conhecido por Teorema da Convergência Dominada.

TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE

Seja (w_n) uma sucessão de funções integráveis em um intervalo (a,b) convergente quase sempre para a função w. Se existir uma função integrável w_0 tal que $|w_n| \leq w_0$ quase sempre, para todo $n \in N$, então u é integrável e tem-se $\int_a^b w = \lim_{n\to\infty} \int_a^b w_n$, isto é:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} w_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b w_n(x)dx.$$

DEMONSTRAÇÃO

Pode-se supor que, para todo $n \in N$, $|u_n| \leq u_0$, em todo ponto de (a,b). Com efeito, é bastante, se necessário, redefinir convenientemente, as funções u_n em conjuntos de medida nula; as funções obtidas serão ainda integráveis, suas integrais coincidirão com a das u_n e a sucessão delas ainda será convergente quase sempre para u. Com essa hipótese, $\lim_{n\to\infty} \inf u_n \in L(u_0)$

e, portanto é integrável, mas, por hipótese, $\lim_{n\to\infty} \inf u_n \in L(u_0)$, e $u = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k$. Tem-se $\int v_n \leq \int u_m \leq \int u_0$, $m \geq n$. De $\int v_n \leq \int u_0$, pelo Teorema da Convergênia Monótona, resulta que $\int u = \lim_{n\to\infty} \int v_n$ e de $\int v_n \leq \int u_m$, $m \geq n$, resulta que $\int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n$.

Sobre o T.C.D é preciso considerar as seguintes observações:

(1)Não vale se for trocado $L(a,b)$ por $R(a,b)$, ou seja, não vale na integração de Riemann.

(2) Só vale para intervalos limitados.

Exemplo: Considere a função v definida em (0,1) por $v(x) = \frac{1}{x}$.

Usando o teorema de Lebesgue, pode-se afirmar que a funçãov não é integrável. Para isso, considere, para cada n a seguinte função definida em (0,1):

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \geq \frac{1}{n} \\ n, \text{ se } 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Então, as funções un são integráveis e $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Alem disso, $|u_n| \leq v$, para todo n. Se v fosse integrável ter-se-ia, pelo Teorema de Lebesgue, que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Mas isto não é verdade, uma vez que para todo n tem-se $\int_0^1 u_n = 1$. Logo, v não é integrável em (0,1).

Outro lema importante é o lema de Fatou, que apenas será enunciado e cuja demostração utiliza o T.C.D.

LEMA DE FATOU

Seja (u_n) uma sucessão de funções integráveis e não negativas, convergindo quase sempre para uma função u. Se existe uma constante c tal que $0 \leq \int u_n \leq c$, para todo n, então u é integrável e tem-se que $0 \leq \int u \leq c$.

Este lema também pode ser enunciado da seguinte forma:

LEMA DE FATOU

Seja (u_n) uma sucessão de funções integráveis e não negativas, convergindo quase sempre para uma função u. Se existir $\liminf_{n\to\infty} \int u_n$ é finito, então u é integrável e tem-se: $\int_a^b u \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b u_n$.

Com base nos teoremas enunciados, é possível construir a seguinte definição:

FUNÇÕES MENSURÁVEIS

DEFINIÇÃO

Uma função $u:(a,b) \to \Re$ é mensurável se u for limite quase sempre de uma sequência de funções escada.

Sendo assim, pode-se afirmar que S_0, S_1 e $L(a,b)$ são constituídas por funções mensuráveis e, ainda, toda função integrável e mensurável, de um modo geral.

É preciso salientar que a recíproca não é verdadeira, pois por exemplo, a função $\frac{1}{x}$ é uma função mensurável, mas não é integrável.

Até agora foram consideradas as integrais somente para funções limitadas num dado intervalo (a,b), então, com algumas modificações nas definições já apresentadas, é possível se obter todos os resultados para integrais em intervalos não limitados.

INTEGRAL EM UM INTERVALO NÃO LIMITADO

A integração de funções definidas em intervalos não limitados, isto é, (a, ∞); $(-\infty, b)$ ou $(-\infty, \infty)$ é muito semelhante à integração em intervalos limitados, em que a diferença fica em dois tópicos:

(i) O conceito de função escada: uma função ϕ é escada em um intervalo I não limitado se existe um intervalo limitado $j = (a,b)$, tal que ϕ é uma escada para $x \in (a, b)$; (ii) Os resultados que exigem a integrabilidade de funções constantes não valem, pois as funções constantes não são integráveis em intervalos não limitados como, por exemplo:

Se $u(x) = 1, x \in (0,\infty)$ for integrável, então $u(x) = \chi_{(0,\,n)}(x)$ é integrável e $\int_0^1 un(x) = n$ e, $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$. Daí, pelo T.C.D, tem-se $\int_0^1 1dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n u(x)dx$ $= \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Com base na definição de função mensurável, é possível estender as noções de comprimento, área e volume para conjuntos mais gerais, por meio da definição de conjuntos mensuráveis.

CONJUNTOS MENSURÁVEIS

DEFINIÇÃO

Seja $A \subset (a,b)$ um subconjunto mensurável, se sua função característica χ_A for uma função mensurável.

DEFINIÇÃO

Seja A um subconjunto mensurável de (a,b).Define-se a medida de A, como sendo $\mu(A)$, da forma: (i) $\mu(A) = \int_a^b \chi_A(x)dx$, se $\chi_A \in L(a,b)$; (ii) $\mu(A) = \infty$, se $\chi_A \notin L(a,b)$.

Em outros termos, essa definição afirma que, se um intervalo (a,b) é limitado, todos os subconjuntos mensuráveis de (a,b) têm medida finita para cada $A \subset (a,b)$ e que χ_A é uma função limitada e, portanto, é integrável. Daí, conclui-se que os subconjuntos de medida infinita só ocorrem quando o intervalo (a,b) é limitado.

Ainda desta definição salienta-se que $\mu(A) \geq 0$ e que os conjuntos mencionados, nesta etapa, são subconjuntos de um intervalo limitado(a,b).

PROPOSIÇÃO

Sejam E, F conjuntos mensuráveis num intervalo (a,b), tais que $E \subset F$, então $F - E$ é mensurávele $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\chi_{F\text{-}E} = \chi_F - \chi_E$, então, χ_F e χ_E são mensuráveis, $\chi_{F\text{-}E}$ é mensurável e

$$\int_a^b \chi_{F\text{-}E}(-x)dx = \int_a^b \chi_F(x)dx - \int_a^b \chi_E(x)dx = \mu(F) - \mu(E).$$

Por exemplo, seja $A = (a,b) - Q$; A é mensurável, pois (a,b) e Q são mensuráveis e $\mu(A) = \mu[(a,b)] - \mu[Q\text{-}(a,b)] = b - a - 0 = b - a$.

Assim, pode-se escrever a seguinte definição.

DEFINIÇÃO

Dada $\{E_i: i \in N\}$ uma família enumerável de conjuntos mensuráveis e

$E \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$, em que E_i é mensurével e $E_i \subset (a,b)$, então:(i) E é mensurável; (ii) Se $E_i \cap E_j = \phi$, ou seja, E_i são dois a dois disjuntos, então: $\mu(E)$; $\sum_{i=1}^{i} nfty(E_i)$; (iii) Se $E_1 \subset E_2$ ..., então: $\mu(E) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$; (iv) Em qualquer caso, é possível afirmar que: m(E) $\leq \sum_{i=1}^{i} \mu(Ei)$.

DEFINIÇÃO

Dado $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$, em que cada E_i é mensurável, então (i) e é um conjunto

mensurável; (ii) $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ...$, então $\mu(E) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$.

É importante fazer as seguintes considerações:

(1) Os resultados das definições acima valem para intervalos (a,b) não limitados com as devidas adaptações.

(2) Esta última definição não vale se o intervalo (a,b) não for limitado.

Sabe-se que o conjunto A de um dado intervalo (a,b) é união de uma família enumerável de intervalos abertos, dois a dois disjuntos. Como esses intervalos são mensuráveis, A é mensurável e sendo o seu complementar mensurável, decorre que todo conjunto fechado é mensurável.

Partindo das definições anteriores, conclui-se que todos os conjuntos obtidos, a partir dos intervalos abertos, são mensuráveis e esses conjuntos são chamados de conjunto de Borel ou Borelianos.

Pode se afirmar também que existem conjuntos limitados não mensuráveis.

Como conseqüência da definição de conjuntos mensuráveis, é possível definir a integral sobre esses conjuntos.

INTEGRAL SOBRE CONJUNTOS MENSURÁVEIS

Dado $E \subset (a,b)$, um conjunto mensurável e u: $E \rightarrow \Re$ uma função.

Diz-se que u é integrável sobre E se a funçaõ uX_E for integrável sobre (a,b) e define-se a integral como sendo: $\int_E u = \int_a^b u\chi_E$.

Desta forma, analisando, as definições de função mensurável, conjunto mensurável e de integral sobre conjuntos mensuráveis, neste trabalho conclui-se o estudo do método de Riesz para definir a integral de Lebesgue.

Contudo, é importante salientar que é possível mostrar a equivalência das definições de Riesz e Lebesgue. Entretanto, este não é o objetivo deste trabalho e para tal indica-se a bibliografia em anexo.

CONCLUSÕES

Após realizar este trabalho, conclui-se que, considerando as idéias de Riemann e pelo estudo do método de Riesz, tornou-se possível definir um novo conjunto de funções integráveis, por meio da generalização do conceito de funções escada. Fundamentalmnte, os dois lemas apresentados neste texto permitiram definir uma coleção de funções limites de sucessões às quais estendeu-se a noção de integral.

Esta nova classe de sucessões de funções determinam o espaço das funçoes integráveis à Lebesgue, que segundo Riesz, é menos rigoroso e mais geral que o conceito de integral para Riemann como foi analisado no decorrer do trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MEDEIROS, L.A.; DE MELLO, E.A. 1989. **Textos de métodos matemátcos**. n° 18. 4 Ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, UFRJ.

LIMA, E,L. 1976. **Curso de análise**. Vol I 8Ed. Rio de Janeiro: IMPA.

FIGUEIREDO, D.G. 1996. **Análise I**. 2 Ed. Rio de Janeiro: LTC.

LIMA, E.L. 1977. **Espaços métricos**. 3 Ed. Rio de Janeiro: IMPA.