NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS E SUAS REPRESENTAÇÕES DECIMAIS[1]

RATIONAL AND IRRATIONAL NUMBERS AND THEIR DECIMAL REPRESENTATIONS

Tiago Martinuzzi Buriol[2]
Alcibíades Gazzoni[3]

RESUMO

Esta pesquisa foi realizada com a finalidade de reunir, organizar e ilustrar com exemplos simples, alguns resultados notáveis, e por vezes curiosos, sobre números racionais e irracionais e suas representações decimais. Para isto foi efetuado um estudo em diversos trabalhos e publicações de importantes matemáticos da atualidade. Os resultados obtidos proporcionaram a verificação da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e de e, a demonstração de dois teoremas sobre números racionais e a apresentação de um método para identificar números irracionais por meio de polinômios.

Palavras-chave: números racionais e irracionais, representação decimal.

ABSTRACT

With the aim organizing and illustrating with simple examples, some notables results, and for its instance curious, about rational and irrational numbers and their decimal representation, was made this research. For this, was produced the study in many works and the publications of important mathematicians of the present time. The obtained results permitted the verification of the irrationally of $\sqrt{2}$ and e, the demonstration of the theorem about rational numbers and still the presentation of one method to identify irrational numbers through out polynomials.

Key words: Rational and irrational numbers, decimal representation.

INTRODUÇÃO

Observa-se que os primeiros números surgiram, na antigüidade, para possibilitar as diversas operações de contagem que se mostraram necessári-

[1] Trabalho Final de Graduação.
[2] Curso de Matemática - Licenciatura Plena. UNIFRA.
[3] Orientador.

as para o desenvolvimento da humanidade. Já o processo de medição das grandezas ditas contínuas conduziu-nos à noção de número real e isso se fez de forma tão significativa que o conjunto dos números reais é também conhecido como reta real, ou simplesmente, reta numérica (LIMA, 1996).
Inicialmente, para representar quantidades inteiras de objetos, animais ou qualquer coisa que se quisesse contar, o homem criou símbolos que, hoje, são os números naturais. Porém, estes números foram insuficientes no trato de problemas que envolvem divisões em partes iguais fazendo com que surgissem as frações.

Com as frações surgiu uma grande crise nos alicerces do pitagorismo envolvendo a descoberta dos segmentos incomensuráveis. Esta crise foi superada com grande genialidade pelo sábio Eudoxo com a teoria das proporções, que quase dois mil anos depois, inspirou Dedekind a criar uma rigorosa teoria para construção dos números reais(LIMA, 1996).

Da necessidade de ampliar o conceito de números para além daqueles que podem ser representados pela razão de dois números inteiros, com o passar dos tempos, foram desenvolvidos estudos e descobriram-se diversos resultados relativos a frações decimais e a números racionais e irracionais que tiveram e ainda têm fundamental importância no desenvolvimento da Matemática.

FRAÇÕES

Segundo ÁVILA (1985), define-se igualdade entre frações da seguinte forma:

DEFINIÇÃO - 1: Diz-se que duas frações m/n e m'/n', com n; n' 0, são iguais se existem números inteiros a e b e números primos entre si, p e q, tais que:

$$m=a\cdot p,\ n=a\cdot q,$$
$$m'=b\cdot p,\ n'=b\cdot q.$$

Ou equivalentemente,

$$\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}\Leftrightarrow m.n'=m'.n'.$$

Ex: $\frac{8}{30}=\frac{4\times 2}{15\times 2}=\frac{4}{15}$, $\frac{12}{45}=\frac{4\times 3}{15\times 3}=\frac{4}{15}$, ou seja, $\frac{8}{30}=\frac{12}{15}$.

No entanto, ao tratar-se de grandezas contínuas de mesma espécie, como o comprimento de dois segmentos de reta, esta equivalência não é sempre verdadeira.

No caso de *m* e *n* serem segmentos comensuráveis, isto é, existe um segmento de reta a contido um número inteiro *p* de vezes em *m* e um número inteiro *q* de vezes em *n*, diz-se que *m* está para *n* na razão *p/q*, e assim, a igualdade $m/n = p/q$ terá significado único e preciso.

Porém, há quatro séculos antes de Cristo, descobriu-se que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos de retas incomensuráveis, ou seja, não existe um segmento *a* que caiba um número inteiro de vezes no lado e na diagonal de um quadrado.

O argumento é bastante simples e conhecido. Se houvesse um segmento de reta *a* que coubesse *n* vezes no lado CD e *m* vezes na diagonal AD do quadrado da Figura 1 então, tomando CD como unidade de comprimento, a medida de AD seria igual a m/n (AD/CD = m/n =>AD = m/n uma vez que CD é 1). Pelo Teorema de Pitágoras teríamos $(m/n)^2 = 1^2 + 1^2$, donde $m^2/n^2 = 2$ e $m^2 = 2n^2$. Mas esta última igualdade é absurda, uma vez que, na decomposição de m^2 em fatores primos, o expoente do fator 2 é um número par ou zero enquanto o expoente do fator 2 de $2n^2$ é ímpar, igual ou maior que 1. Desta argumentação pode-se concluir que $\sqrt{2}$ é um número irracional e se *m* e *n* forem segmentos de retas incomensuráveis, igualdades do tipo $m/n = p/q$, nunca ocorrerão, ou seja, m/n não poderão ser representados pela razão de dois inteiros e esta razão será, portanto, um número irracional (BEZERRA, 1995).

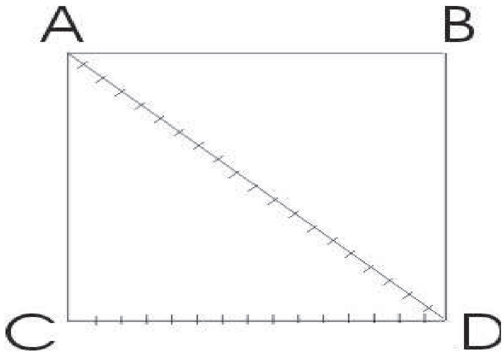

Figura 1- Quadrado de vértices A, B, C e D.

A descoberta dos incomensuráveis gerou, na época, uma enorme crise nos alicerces do pitagorismo e, por algum tempo, em toda estrutura Matemática Grega, pois baseado na definição de igualdade entre frações descrita anteriormente, fundamentou-se o Teorema de Tales, do qual depende toda teoria de semelhança entre figuras. Portanto, constatou-se novamente a necessidade de ampliar o conceito de números para além daqueles que podem ser representados pela razão de dois inteiros (com denominador diferente de zero).

Mas, o sábio Eudoxo, ainda quatro séculos a.C., desenvolveu uma teoria das proporções que superou esta crise sem a necessidade dos irracionais. Ele definiu igualdade entre razões da seguinte forma:

DEFINIÇÃO - 2: Dados quatro segmentos de reta A, B, C e D, diz-se que A está para B assim como C está para D (ou seja A/B = C/D) se, para quaisquer que sejam os números inteiros m e n, então:

nA > mB <=> nC > mD;
nA = mB <=> nC = mD;
nA < mB <=> nC < mD.

Esta é a definição essencial do livro V dos Elementos de Euclides, que PITOMBEIRA(1994) cita com a seguinte redação, bastante semelhante:

DEFINIÇÃO - 3: Dados A, B, C e D, quatro grandezas da mesma espécie, diz-se que A e B têm a mesma razão que C e D quando, para todos os inteiros m e n, temos:

a) Se nA > mB, então nC > mD;
b) Se nA = mB, então nC = mD;
c) Se nA < mB, então nC < mD.

Esta definição serve perfeitamente para grandezas incomensuráveis e comensuráveis e por ela pode-se demonstrar o Teorema de Tales e outros resultados sobre figuras semelhantes.

Mais de dois mil anos depois, Dedekind, inspirado nos estudos de Eudoxo, construiu uma rigorosa teoria dos números reais. Dedekind percebeu que a definição de Eudoxo associa a cada razão A/B um par de classes de frações A_1 e A_2 que ele chama de corte e utiliza para definir número real.

Por exemplo, o corte que define o número real (irracional) $\sqrt{2}$ é o par de classes A_1 e A_2 assim descritos: A_1 é o conjunto das frações m/n tais que $(m/n)^2<2$, são as "raízes quadradas de 2 por falta", e A_2 constitui-se da frações m/n tais que $(m/n)^2>2$, são as "raízes quadradas de 2 por excesso".

Não foi aprofundada a construção dos números reais, pois não fez parte do objetivo deste trabalho.

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS

O conjunto de todas as frações a/b, com $a,b \in$ Z e $b \neq 0$, compõe o conjunto dos números racionais que, em reunião com o conjunto dos irracionais, formam os reais.

Toda fração ordinária tem sua representação decimal obtida por meio do algoritmo da divisão prolongada, no qual, acrescentam-se sucessivos zeros para continuar o processo de divisão, por exemplo:

$$\begin{array}{l|l} 7{,}00 & 3 \\ \underline{-6} & 2{,}33 \\ \;\;10 & \\ \;\;\underline{-9} & \\ \;\;\;\;10 & \\ \;\;\;\;\underline{-9} & \\ \;\;\;\;\;1 & \end{array}$$

10 → acrescenta-se um zero ao resto e continua-se a divisão

10 → acrescenta-se mais um zero

percebe-se que sempre sobra resto 1 que, com acréscimo do zero, fica 10, que dividido por 3, dará 3 e restará novamente o 1, portanto a fração decimal resultante será a dízima periódica 2,333..., $2{,}\overline{3}$ ou $2{,}\dot{3}$

Qualquer número racional tem representação decimal, podendo ser ou finita ou infinita . Mas quais são os números racionais que têm representação exata (finita)?

Conclui-se que somente aqueles cujo denominador é do tipo $2^n \cdot 5^m$ com $m, n \in IN$, pois assim, este número terá outra fração ordinária igual cujo denominador é uma potência de 10. De fato, se a/b com $a, b \in IN$ e $b \neq 0$ é tal que $b = 2^n \cdot 5^m$ com $m, n \in IN$, então podem ocorrer os seguintes casos:

1) Se $b = 2^n$, então, $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n}$ e como $\frac{a}{2^n} = \frac{a.5^n}{2^n.5^n}$, tem-se $\frac{a}{b} = \frac{a.5^n}{10^n}$.

O número obtido é com certeza uma decimal exata, uma vez que, para chegar a ela, basta colocar vírgulas no lugar correto.

2) No caso de $b = 5^m$, basta fazer $\frac{a\,.\,2^m}{5^m.2^m} = \frac{a.2^m}{10^m}$ que também é uma decimal finita.

3) Porém, se $b = 2^n \cdot 5^m$ com m e $n \neq 0$, procede-se da seguinte forma: se $n > m$, então $\frac{a.5^{n-m}}{2^n.5^m.5^{n-m}} = \frac{a.5^{n-m}}{2^n.5^n} = \frac{a.5^{n-m}}{10^n}$ e novamente o denominador é uma potência de 10;

se $n = m$ é simples, tem-se $a/10^m$ ou $a/10^n$; e por último, se $n < m$, então faz-se $\frac{a\,.\,2^{m-n}}{2^n.5^m.2^{m-n}} = \frac{a\,.\,2^{m-n}}{10^m}$ e novamente, tem-se a potência de 10 no denominador.

Fica assim provado que, se $b = 2^n \cdot 5^m$, com m e $n \in IN$, a fração decimal gerada pela razão a/b será finita.

Pode-se dizer que uma fração ordinária só gerará uma fração decimal finita se puder ser representada por uma outra fração ordinária igual em que o denominador é uma potência de 10.

Como toda potência de dez tem somente dois fatores primos que são o 2 e o 5, uma fração ordinária terá sua decimal finita somente se o denominador for da forma $2^n \cdot 5^m$ com $m, n \in IN$.

O que foi feito anteriormente foi a demonstração da seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO- 1: Uma fração ordinária terá representação finita se, e somente se, o denominador não tiver outros fatores primos além de 2 e 5.

Mas um fato muito curioso e interessante é que todos os números racionais podem ser representados por uma dízima periódica (infinita), mesmo aqueles que resultam em uma decimal exata. Vejamos o seguinte exemplo sugerido por NÍVEN (1984) que ilustra bem este fato (novamente utiliza-se do algoritmo das divisões prolongadas acrescentando-se zeros ao resto).

```
 2,000000 | 7
-14         0,285714
  60
 -56
   40
  -35
    50
   -49
     10
     -7
      30
     -28
       2
```

No decorrer da divisão os restos são, sucessivamente, 6, 4, 5, 1, 3, 2. Ao se chegar ao resto 2, completa-se um ciclo e reaparece a divisão de 20 por 7, gerando novamente o bloco periódico de dígitos 2856714. Os restos são todos menores que o divisor, portanto, haverá necessariamente, uma repetição, dado que existem apenas seis restos possíveis (se o resto zero aparecer, a decimal é exata, mas também terá uma representação infinita e periódica como se descreve a seguir). Tem-se 2/7 = 0,28567142856714...

No caso geral a/b, se o inteiro a for dividido pelo inteiro b, os únicos restos possíveis são 1, 2, 3,..., b-2 e b-1. Portanto, como há um número finito de valores possíveis para estes restos, pode-se ter certeza de que haverá repetição no desenrolar da divisão. A repetição ocorre com o aparecimento, pela segunda vez, de um mesmo resto, isto acontecerá sempre, mesmo que seja preciso, talvez, efetuar muitas divisões antes. Quando a repetição ocorrer, um novo ciclo se iniciará e o resultado será uma dízima periódica.

E a mais curiosa de todas as dízimas periódicas é aquela que aparece na igualdade 1 = 0,999... pois, de certa forma, ela é quem garante que mesmo as frações decimais finitas possuam uma representação infinita e periódica (LIMA, 1983).

Veja que, se $0,9999... = x$, então $9,999... = 10x$. Subtraindo-se as duas igualdades como segue, tem-se:

$$\begin{array}{rl} - & 9,999... = 10x \\ & \underline{0,999... = \quad x} \\ & 9 = 9x \Rightarrow x = 1. \end{array}$$

Logo, $1 = 0,999...$ (ou seja, não existe uma fração ordinária em que se dividindo o numerador pelo denominador se obtenha a dízima periódica 0,999...).

Segue-se que:

$$\begin{array}{l} 0,1 = 0,0999... \\ 0,01 = 0,00999... \\ 0,001 = 0,000999... \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0,0000001 = 0,0000000999... \, . \end{array}$$

Dessa forma, qualquer decimal finita pode ser representada por uma dízima periódica já que, por exemplo:

$0,5 = 0,4 + 0,0999... \Rightarrow 0,5 = 0,4999...$

$0,698 = 0,697 + 0,000999... \Rightarrow 0,698 = 0,697999...$.

Conforme NÍVEN (1984), escrevendo uma dízima periódica de forma generalizada (sem parte inteira, pois esta não desempenha nenhum papel no processo) tem-se: $x = 0,a_1a_2...a_s\overline{b_1b_2...b_t}$,multiplicando x, inicialmente por 10^{s+t}, depois por 10^s e subtraindo os resultados, obtém-se:

$$\begin{array}{l} 10^{s+t}x = a_1a_2...a_sb_1b_2...b_t + 0,\overline{b_1b_2...b_t} \, , \\ 10^s x = a_1a_2...a_s + 0,\overline{b_1b_2...b_t} \text{ e} \\ (10^{s+t} - 10^s)x = a_1a_2...a_sb_1b_2...b_t - a_1a_2...a_s \, , \end{array}$$

de modo que:

$$x = \frac{a_1a_2...a_sb_1b_2...b_t - a_1a_2...a_s}{10^{s+t} - 10^s}$$

que está na forma inteiro sobre inteiro e, portanto, é racional.

Fica dessa forma demonstrado o seguinte teorema:

TEOREMA- 1: " a é racional se, e somente se, a tem representação decimal periódica" (BEZERRA *et al*., 1995).

Observa-se que, na dízima periódica $x = 0{,}a_1a_2...a_sb_1b_2...b_t$, se s=0 teremos $x = \dfrac{b_1b_2...b_t}{10^t - 1}$ e, portanto, o denominador será do tipo 99...9 com t algarismos igual a 9. Também percebe-se que o período de x começa no primeiro algarismo decimal, ou seja, $x = 0{,}b_1b_2...b_t$ (sugestão: teste, com auxilio da calculadora, para alguns números aleatórios).

Se por outro lado $s > 0$ então obtém-se um denominador do tipo 99...900...0, que gerará uma decimal com alguns algarismos não periódicos seguidos dos algarismos periódicos.

Segundo LIMA (1987), estes resultados podem ser escritos e demonstrados mais sucintamente, da seguinte forma:

1) Uma fração ordinária irredutível p/q, quando transformada em decimal, gera uma fração decimal exata (finita) ou uma dízima periódica. O primeiro caso ocorre quando q é da forma 2^n5^m e o segundo quando q é divisível por algum número primo diferente de 2 ou 5.

2) Quando o denominador q for primo com 10, a dízima periódica gerada pela fração irredutível p/q é simples, isto é, o período começa no primeiro algarismo decimal.

3) Se o denominador q for divisível por 2 ou 5 e, além disso, por outro número primo, a dízima periódica gerada pela fração irredutível p/q é composta, isto é, a parte decimal começa com alguns algarismos não periódicos seguidos dos periódicos. O número de algarismos não periódicos é igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou de 5 pela qual q é divisível.

Para chegar a estes resultados, tomar-se-á como ponto de partida os dois lemas abaixo.

LEMA-1: Todo número natural q, primo com 10, tem múltiplos cuja representação decimal é formada apenas por noves.

Demonstração: Há uma infinidade de números formados apenas por algarismos 9 (9, 9999, 99...9, etc). Quando divididos por q, estes números deixam restos que vão de 0 a q-1, ao todo um número finito de restos possíveis. Logo, existem dois números formados por nove que darão o mesmo resto. A diferença entre esses dois números é, por um lado divisível por q e por outro lado, um número formado por uma série de noves seguidos de uma série de zeros. Tem-se então: $n{\cdot}q=99...900...0=99...9{\cdot}10^m$.

Assim, q divide o produto $99...9{\cdot}10^m$, como é primo com 10^m, concluí-se que q divide.

LEMA-2: Todo número natural q tem um múltiplo cuja representação decimal é formada por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. O menor múltiplo de q, desta forma, termina com um número de zeros igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou de 5 pela qual q é divisível.

Demonstração: Tem-se $q = 2^n 5^m q'$, em que q' é primo com 10. Para fixar idéias, suponhamos $n > m$. Então n é o maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pelo qual q é divisível. Seja p o menor número natural tal que nq'=99...9. Então o menor múltiplo de q formado por noves seguidos de zeros é:

$5^{n-m}nq = 10^n nq' = 99...900...0$ (com n zeros no final).

Destes lemas resulta imediatamente, o seguinte teorema:

TEOREMA-2: Toda fração irredutível p/q é equivalente a uma fração cujo denominador tem uma das formas 10...0, 99...900...0 ou 99...9. Ocorrem os seguintes casos:

1) Se $q = 2^a 5^b$, então $p/q = n/10...0$;
2) Se q for primo com 10, então $p/q = n/99...9$;
3) Se $q = 2^a 5^b q'$ onde q' é primo com 10, então p/q = n/99...90...0.

Nos casos 1 e 3, se o numerador n não terminar em zero, o número de zeros do denominador é igual ao maior dos expoentes a ou b.

Demonstração: Basta multiplicar o numerador e o denominador da fração p/q pelo mesmo número escolhido de modo que o denominador tenha a forma desejada , o que é possível em virtude dos lemas anteriores.

Mas nem todas frações decimais infinitas são periódicas. A periodicidade só aparece quando se quer representar uma fração ordinária (número racional) sob forma decimal. Existem outros números importantes na matemática que tem sua representação decimal infinita e não periódica. É o caso dos números e, π e $\sqrt{2}$ que fazem parte do conjunto dos irracionais.

OS NÚMEROS e, π e $\sqrt{2}$

O número π é por definição a área de um círculo de raio 1 ou o comprimento do círculo de raio ½(LIMA, 1983).

Inscrevendo no círculo de raio 1 polígonos regulares cujo número de lados admite-se cada vez maior, as áreas desses polígonos apresentam valores aproximados para a área do círculo, isto é, para o número π. Existem, além deste, outros métodos bem mais sofisticados para obter o valor aproximado de π, mas desde o tempo de Arquimedes (cerca de 250 anos antes de Cristo) se conhecem algoritmos que permitem determinar razões que aproximam π com a precisão desejada, porém a dízima obtida não terá período pois π é um número irracional. Segundo informações de www.matematica.com.br, "Em tempos mais atuais, cinco trilhões de casas é o recorde quebrado por um adolescente americano de 17 anos para o valor de π. Colin Percival, usando microcomputadores, completou a última etapa dos cálculos em setembro de 1998. Vinte e cinco microcomputadores, colocados à disposição de Percival por colaboradores em várias partes do mundo, auxiliaram-no a realizar os cálculos. Comunicando-se com cada máquina por e-mail, ele desenvolveu a tarefa distribuindo trabalho pela Internet. Cinco meses foram necessários para a conclusão da façanha."

O número e é outro número irracional que tem extrema importância pois é inevitável em diversas questões básicas da Matemática. No cálculo diferencial e integral, por exemplo, que estuda a variação das grandezas, um tipo de variação mais simples e comum é aquela em que o crescimento (ou decrescimento) da grandeza em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante, como o que ocorre em cálculos envolvendo juros, crescimento populacional, desintegração radioativa, etc. Nestes casos e em muitos outros fenômenos da natureza, o número e aparece de modo natural e insubstituível.

Por exemplo, supondo-se um empréstimo a uma pessoa de 1 (um) real a juros de 100% ao ano. Portanto, ao final de um ano, esta pessoa deverá pagar 2 (dois) reais, certo? Há quem diga que não. De certa forma pode-se chegar à conclusão que o justo seria se essa pessoa pagasse e reais.

Entende-se, em transações financeiras, que o juro é proporcional ao capital emprestado e ao tempo decorrido entre o empréstimo e o pagamento. Desta forma, se o devedor lhe pagasse seis meses após o empréstimo, você receberia um real e cinqüenta centavos, pois a taxa de juros equivalente ao período de meio ano é de 50%. No entanto, se esta pessoa está com 1,5 reais seus e demora mais seis meses, a juros de 100% ao ano, para pagar, então você deveria receber $(1,5)^2 = 2,25$ reais, e mesmo assim, poder-se-ia pensar que não é justo.

Acontece que, dividindo-se o ano em <u>n</u> períodos cada vez menores (meses, dias, horas, etc), chega-se a conclusão que, após um ano, um real aplicado a 100% ao ano, valeria: $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$, ou seja, *e* reais.

Porém isso só ocorre na teoria, pois você não pode aplicar o seu dinheiro por um período de ½ segundo, por exemplo. Então, define-se, para cada transação financeira, um período *n* adequado à sua duração.

Mas quanto vale exatamente *e* reais? Quase R$ 2,72 ou, mais aproximadamente, 2,71828182846 reais. Já que e é um número irracional, não existe fração ordinária nem decimal exata ou periódica para representá-lo.

PROPOSIÇÃO-2: O número e é irracional.

Demonstração: Segundo LEITHOLD (1994), a série que representa o número e é $1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots$. Para demonstrar a irracionalidade de e, primeiramente supõe-se que $e = 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots$ é racional, isto é, $e = p/q$ onde $p, q \in IN$, são primos entre si. Segue-se então que

$$p/q - (1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \ldots + 1/q!) = \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!}\ .$$

Agora, fazendo-se uma estimativa do segundo membro acima:

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots\right) < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right).$$

A expressão entre parênteses, no último membro dessa inequação, é uma série geométrica da forma $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, a qual, para $0 < r < 1$, tem soma igual a $r/(1- r)$. Usando este fato obtém-se: $\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$.

Com esta estimativa, a desigualdade acima resulta em:

$$0 < \frac{P}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$$

e daí,

$$0 < q! \cdot \left(\frac{P}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}\ .$$

Observa-se que o membro do meio é inteiro, pois $q!$ cancela todos os denominadores das frações aí presentes. Mas isso é impossível, pois sendo $\frac{1}{q} \leq 1$, a última expressão acima diria que o termo do meio é um inteiro positivo estritamente menor que 1, o que é, por hipótese, uma contradição. Logo, o número e é irracional.

Se $p = 2$, então $\sqrt{p}$ é irracional como foi provado logo no início deste trabalho. Prova-se, por absurdo, que $\sqrt{p}$ é irracional, se $p > 1$ é um número primo qualquer. A irracionalidade de π também pode ser demonstrada, para isto, basta o leitor consultar o livro Números Irracionais e Trascendentes de

FIGUEIREDO (1985). Apresenta-se a seguir um método bastante interessante de identificar números irracionais por meio de polinômios.

IDENTIFICANDO NÚMEROS IRRACIONAIS ATRAVÉS DE POLINÔMIOS

Este método, descrito por TAMAROZZI (2000), utiliza-se do Teorema das Raízes Racionais, enunciado abaixo, cuja demonstração detalhada encontra-se no livro Números: Racionais e Irracionais (NIVEN, 1984).

TEOREMA-3: Se o número racional p/q (p e q inteiros primos entre si) é raiz do polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_0$, com coeficientes inteiros, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Partindo deste teorema, pode-se concluir que todas as raízes $\sqrt[n]{a}$, não exatas, de um natural a, são irracionais. Pois $p(x) = x^n - a$ é o polinômio cuja raiz é $\sqrt[n]{a}$, e tem-se $a_n = 1$ e $a_0 = -a$; logo, se um número racional p/q é raiz deste polinômio, segundo o teorema das Raízes Racionais, q é divisor de 1, ou seja $q = \pm 1$, o que mostra que p/q é um número inteiro. Observa-se que, por hipótese, $\sqrt[n]{a}$ não é um número inteiro o que nos leva a concluir que o polinômio $p(x) = x^n - a$ não admite raízes racionais, ou seja, $\sqrt[n]{a}$ é um número irracional sempre que $\sqrt[n]{a}$ não é exata.

Se n=2 e a>1 é um número primo, tem-se casos particulares deste, isto é, o polinômio $p(x) = x^n - a$ terá como raiz o número irracional .

De forma análoga, utilizando polinômios e o teorema anterior, pode-se verificar a irracionalidade ou racionalidade de alguns números reais específicos. Veja dois exemplos:

1 - O número $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ é irracional.

Verificação: fazendo $\sqrt{5} - \sqrt{3} = a$ ou, ainda, $(\sqrt{5})^2\ (a + \sqrt{3})^2$, obtém-se a igualdade $2 - a^2 = 2\sqrt{3}\cdot a$, a qual, após mais um quadramento, mostra ser a a raiz do polinômio $x^4 - 16x^2 + 4$. Pelo teorema, as únicas raízes racionais possíveis deste polinômio são ± 1 ,± 2 e ± 4 como, por verificação direta, estes números não são raízes, $a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ não pode ser racional.

2 - Surpreendentemente, o número $a = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ é racional.

De fato elevando-se ao cubo ambos os membros da igualdade, obtém-se

$$a^3 = 4 - 3\ (\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\ )$$

Isto é, a é raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 3x - 4$.

É fácil verificar que $x = 1$ é raiz deste polinômio e que o quociente da divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$ é $q(x) = x^2 + x + 4$, que não admite raízes reais. Portanto, $x = 1$ é a única raiz real de $p(x)$. Logo,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1$$

CONCLUSÕES

Os números irracionais surgem da necessidade de medir grandezas que são incomensuráveis com a unidade de medida adotada.

Analisando a representação decimal de um número irracional, percebe-se que não existe período, porém, apenas examinando o desenvolvimento decimal de um número qualquer, nunca se pode garantir que ele é irracional mesmo que, aparentemente, não possua período.

No entanto, existem diferentes métodos para se identificar números irracionais e, para verificar sua irracionalidade, deve-se buscar apoio na Análise e na Lógica Matemática.

O conceito de dízimas periódicas e as justificativas dos cálculos com elas envolvem a idéia de limite e de série, que são de grande importância para a Matemática e que são abordados mais detalhadamente apenas nos cursos superiores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo. 1985. **Olhando mais de Cima: Eudoxo, Dedekind, Números Reais** e **Ensino de Matemática.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, n.7, p.5-10.

BEZERRA, Licio Hernanes, BARROS, Paulo Henrique V. de, TOMEI, Carlos, et al. 1995.**Introdução à Matemática.** 1. ed. Florianópolis , SC: Editora da UFSC.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. 1985. **Números Irracionais e Transcendentes.** Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, RJ.

LEITHOLD, Louis.1994.**O Cálculo com Geometria Analítica.**3.ed. São Paulo, SP: HARBRA ltda.

LIMA, Elon Lages. 1983. **Conceitos e Controvérsias.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, n.2, p.6-9.

LIMA, Elon Lages. 1987. **Conceitos e Controvérsias: Voltando a falar sobre Dízimas.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, n.10, p.23-28.

LIMA, Elon Lages. 1996. **Matemática no Ensino Médio.** 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática.v.3.

MATEMÁTICA ON-LINE. 2000. **O Famoso Número Pi.** http//www.matematica.com.br. 27/08/01

NÍVEN, Ivan. 1984. **Números: Racionais e Irracionais.** Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. 1.ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática.

PITOMBEIRA, João Bosco. 1994. **Os elementos de Euclides.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, v.5, n.1, p.24-25.

TAMAROZZI, Antônio Carlos. 2000. **Identificando Números Irracionais Através de polinômios.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, n.42, p.16-19.