

ESTUDO DE GRAFOS E APLICAÇÕES ¹

GRAPHS AND APPLICATIONS

Gustavo Bisognin ²
Fabiano B. Franco ²
Vanilde Bisognin ³

RESUMO

Neste trabalho estudam-se os conceitos básicos e aplicações importantes da teoria de grafos. Destacam-se, nas aplicações, o problema das sete pontes de Königsberg, o problema das redes de comunicação, o problema do número cromático, o fornecimento de serviços, o planejamento de tarefas e o alinhamento de seqüências biológicas.

Palavras-chave: multigrafo, vértice, caminho euleriano.

ABSTRACT

In this work the basic concepts and import applications in the graphs theory are studied. In applications, we can mention the seven bridges of Königsberg's problem, the network's problem, the cromatic number, services, project of tasks and alignment of biological sequences.

Key Words: multigraph, vertex, eulerian path.

INTRODUÇÃO

A teoria de grafos surgiu no século XVIII e, comparada com a história da Matemática, ela é bastante recente. Destacam-se L. Euler, G. Kirchhoff e A. Cayley como os primeiros cientistas a trabalharem nesta linha de pesquisa. A teoria de grafos tem extensa aplicabilidade na área de Matemática, principalmente na modelagem matemática, que permite interpretar e analisar várias situações reais em Física, Química, Biologia, Engenharia, Pesquisa Operacional, Psicologia e Teoria da Computação.

Os conceitos e resultados básicos sobre a teoria de grafos podem ser encontrados em LUCCHESI (1979), ALDOUS & WILSON (2000) e GERSTING (1995), entre outros. Nestes textos, encontram-se todos os re-

¹ Trabalho de Iniciação Científica. FAPERGS.

² Curso de Sistemas de Informação. UNIFRA.

³ Orientador.

sultados e propriedades importantes da teoria bem como um grande número de aplicações em várias áreas do conhecimento.

Com o desenvolvimento da ciência da computação, a teoria sobre grafos tem permitido obter resultados importantes de modelos matemáticos que representam várias situações reais e auxiliam na solução de diversos problemas. Isto pode ser encontrado em ALDOUS & WILSON (2000) e LIPSCHUTZ & LIPSON (1997).

DESENVOLVIMENTO

RESULTADOS BÁSICOS

Um grafo é um conjunto de pontos no plano ligados por segmentos de reta ou flechas. Um grafo $G = (N, A)$ é constituído por um conjunto (finito e não-vazio) N de nós e um conjunto A de arcos. Cada arco é um par não-ordenado de nós (ou vértices) distintos.

Para desenhar um grafo, representa-se cada nó por um círculo e os arcos por linhas ligando estes círculos (Figura 1).

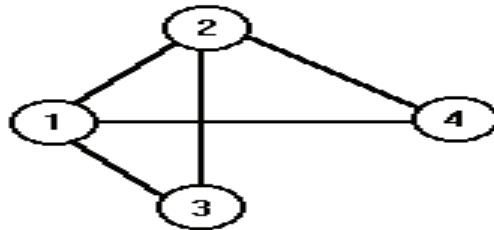


Figura 1 - Grafo.

Um arco é incidente nos nós aos quais está associado. Nó isolado é aquele que não está ligado a nenhum outro, ou seja, não existe nenhum arco, no grafo, incidente neste nó (Figura 2).

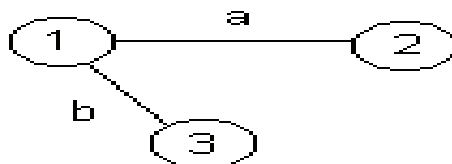


Figura 2 - Incidência de arcos.

No exemplo anterior, percebe-se que o arco a é incidente nos nós 1 e 2, assim como o arco b é incidente nos nós 1 e 3.

Arcos adjacentes são dois arcos incidentes num mesmo nó (Figura 3).

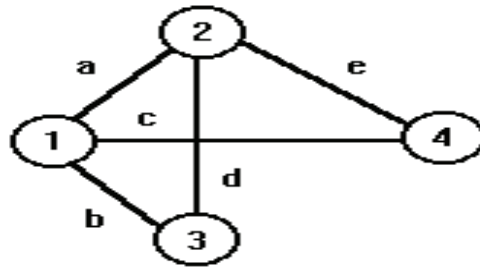


Figura 3 - Arcos adjacentes.

No exemplo anterior, o arco *a* é incidente nos nós 1 e 2, o arco *b* é incidente nos nós 1 e 3, o arco *c* nos nós 2 e 3, o arco *d* nos nós 1 e 4 e o arco *e* nos nós 2 e 4.

Multigrafos são grafos nos quais são permitidos dois ou mais arcos associados a um mesmo par de nós. O exemplo na figura 4 representa um multigrafo porque os arcos *b* e *c* conectam os mesmos pontos finais.

Pode-se representar (multi)grafos por meio de matrizes. Tem-se então a matriz de incidência nó-arco, cujas linhas estão associadas aos nós e as colunas aos arcos. Um elemento na linha *i* e coluna *j* será igual a 1 se o nó *i* for incidente no arco *j* e 0 se não for. Outra forma de representação é a matriz de adjacência, que tem linhas e colunas associadas aos nós. O elemento na linha *i* e coluna *j* é o número de arcos que tem *i* e *j* como extremidades.

A seguir, figura 4, um exemplo de um multigrafo e suas respectivas matrizes:

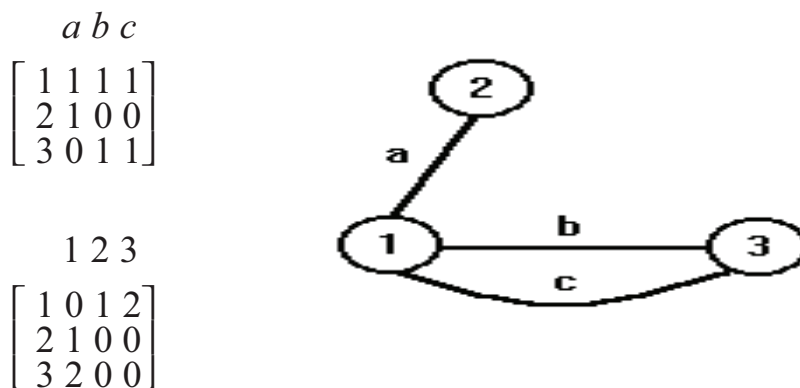


Figura 4 - Representação por meio de matrizes.

Grau de um nó é o número de arcos incidentes nele. De acordo com a figura anterior, o nó 1 tem grau 3, pois possui três arcos incidentes nele, o

arco a , b e c . Já o nó 3 possui grau 2, porque os arcos b e c incidem nele; já o nó 2 tem grau 1 porque possui somente o arco a incidendo nele.

Um circuito de Euler do grafo G é um circuito que contém todos os nós e todas as arestas de G . Isto é, o circuito euleriano é uma seqüência de nós adjacentes a qual começa e termina no mesmo nó, usando cada nó pelo menos uma vez e cada aresta também uma única vez. Sendo N um nó do circuito euleriano de G , se uma aresta chega em N , então deverá haver outra que sai. Um dos resultados estabelecidos por Euler diz que um multigrafo conexo é euleriano se, e somente se, cada nó tiver grau par.

O conceito de planaridade de um grafo está ligado ao traçado de mapas de cidades. Considerando-se o mapa de uma cidade, a ele pode estar associado a cada esquina um nó e a cada trecho de rua entre duas esquinas um arco. Entretanto, se o objetivo for traçar possíveis rotas para linhas de ônibus, verifica-se que a simples indicação de um trecho de rua entre dois pontos não é suficiente, porque nem todas as ruas possuem mão-dupla. É necessário também acrescentar essa informação na definição do grafo. Então surge o conceito de arco direcionado e dígrafo. Cada arco corresponde a um par ordenado de nós. Agora, o arco correspondente ao par (i, j) é incidente do nó i e incidente para o nó j . O grau de entrada de um nó é o número de arcos que entram no nó, isto é, são incidentes para o nó e o grau de saída é definido de maneira análoga.

Seguindo a teoria de grafos, da mesma forma, a definição de dígrafos não prevê a existência de laços (um arco associado a um par (i, i)) e arcos repetidos, ou seja, dois arcos associados ao mesmo par ordenado de nós.

Outra informação adicional que pode ser representada no arco, é informar sua direção, e esta é indicada por meio de uma seta no nó para o qual o arco é incidente (Figura 5).

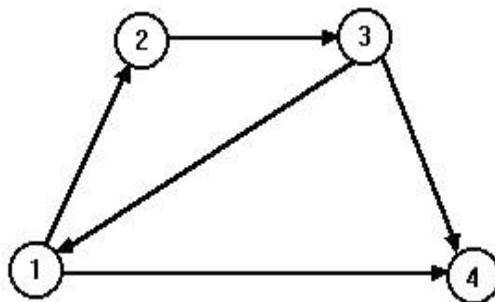


Figura 5 - Grafo com indicação da direção.

PROBLEMAS E APLICAÇÕES

PROBLEMA DAS SETE PONTES

O mais famoso problema que utiliza teoria de grafos foi resolvido por Euler em 1736. Euler ficou curioso devido a uma charada popular sobre o lugarejo de Königsberg (uma antiga cidade da Prússia, mais tarde chamada de Kaliniingrado, na Rússia). O problema é o seguinte: sete pontes cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio, como mostra a figura. A charada era determinar se uma pessoa poderia passear pela cidade passando apenas uma vez por cada ponte. É viável responder essa pergunta listando todos os caminhos possíveis, de forma que algum dedicado morador de Königsberg deve ter resolvido este problema em particular. A idéia de Euler foi representar esta situação utilizando grafos (Figura 6).

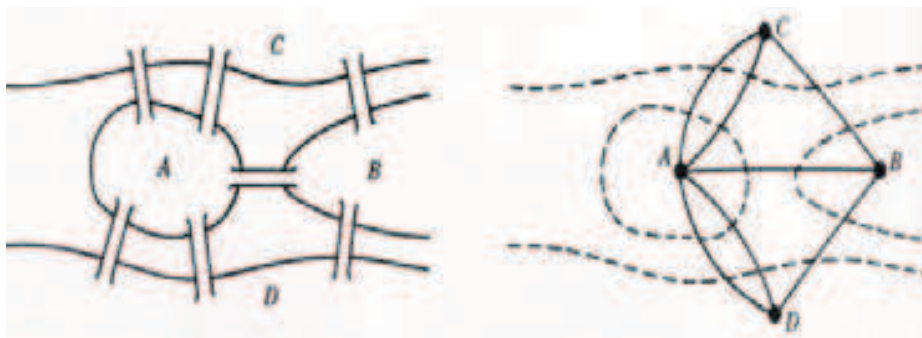


Figura 6 - O problema das sete pontes.

Euler traçou um multigrafo. A cada margem e ilha associou um nó e a cada ponte um arco, obtendo o grafo da figura 6. Este problema consiste em achar um circuito que percorra cada arco exatamente uma vez. Pode-se observar que os nós têm grau ímpar, então o multigrafo em questão não é euleriano. A resposta à pergunta é que não é possível cruzar uma ponte somente uma vez.

A resposta a este problema pode também ser encontrada na construção de um algoritmo computacional. A essência do algoritmo é contar o número de vértices adjacentes a cada vértice e determinar se este é ímpar ou par. Se existirem muitos vértices ímpares, não existe um caminho euleriano. No algoritmo a seguir, a entrada é um grafo representado por sua matriz de adjacência. A variável total mantém o número de vértices ímpares encontrados no grafo. O grau é encontrado pela totalização dos números na linha correspondente a este vértice na matriz.

A função odd retorna verdadeira se o seu argumento for um inteiro ímpar. A seguir, pode-se ver o procedimento:

```
procedure TForm1.BMatrizClick(Sender: TObject);
var total, grau, i, j, ordem: integer;
    mat: array [1..20,1..20] of integer;
begin
    ordem:= StrToInt(InputBox ('Matriz de Adjacência','Digite a ordem:'));
    for i:=1 to ordem do
        for j:=1 to ordem do
            mat[i,j]:= StrToInt(InputBox('Matriz de Adjacência','Digite o elemento ['+IntToStr(i)+'/'+IntToStr(j)+''] da matriz:'));
            total:= 0;
            i:= 1;
            while (total <= 2) and (i <= ordem) do
                begin
                    grau:= 0;
                    for j:= 1 to ordem do
                        grau:= grau + mat [i,j];
                    if odd (grau)
                        then
                            total:= total + 1;
                    i:= i + 1;
                end;
            if total > 2
                then
                    ShowMessage ('Não existe caminho euleriano')
                else
                    ShowMessage ('Existe um caminho euleriano');
        end;
end;
```

REDE DE COMUNICAÇÕES

A teoria de grafos permite compreender a melhor maneira de construir redes de comunicações entre cidades.

Deseja-se configurar uma rede de comunicações entre as cidades A, B, C, D e E, de modo que possa haver comunicação entre cada par de cidades. As ligações devem ser efetuadas por cabos telefônicos. Admite-se que mensagens possam ser retransmitidas, isto é, qualquer cidade pode mandar mensagem para outra por uma terceira.

O conjunto de cidades corresponde ao conjunto de nós e cada arco corresponde a um cabo telefônico. A figura 7 mostra uma possível configu-

ração de cabos entre as cidades que satisfaz a exigência do enunciado, ou seja, cada cidade pode se comunicar com qualquer outra.

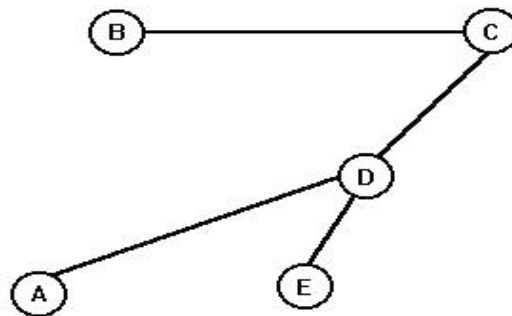


Figura 7 - Rede de comunicações.

O grafo da figura 7 é um exemplo de árvore, um grafo com exatamente um caminho entre cada par de nós. Ou seja, este tipo de grafo fornece o esquema de conexão o mais simplificado possível, pois se ocorrer a retirada de um arco que seja, elimina-se pelo menos um caminho e desconecta-se o grafo (sendo que cada arco constitui o único caminho entre as suas extremidades). Este problema também vem formulado como um problema de otimização combinatorial.

DISTRIBUIÇÃO DE TAREFAS

Tem-se um conjunto de m tarefas e m operários. O operário i tem habilidade para realizar um conjunto de tarefas. Pode-se atribuir exatamente uma tarefa a cada operário de modo que todas as tarefas sejam realizadas?

Ir-se-á associar cada operário e cada tarefa a um nó. No caso de $m = 5$ tem-se um grafo como ilustrado na figura 8:

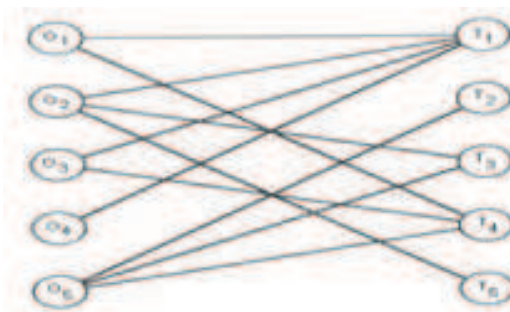


Figura 8 - Distribuição de tarefas para os operários.

Este é um exemplo de grafo bipartido, que são aqueles nos quais o conjunto de nós N pode ser particionado em dois subconjuntos de tal manei-

ra que nós pertencentes a um mesmo subconjunto não são adjacentes. Neste tipo de problema, deve-se verificar a possibilidade de formação de m pares (operário, tarefa), mas com cada operário e tarefa pertencendo a apenas um par. Neste grafo, pode-se mostrar que não é possível atribuir todas as tarefas aos operários.

ISÔMEROS QUÍMICOS

Na química também são encontradas importantes aplicações da teoria de grafos. Associando-se os átomos de uma determinada molécula a nós e as ligações entre esses átomos a arcos, é obtido um grafo que representa a molécula. Existe a possibilidade de que dois ou mais grafos correspondam à mesma fórmula química, como o exemplo que se pode ver na figura 9.

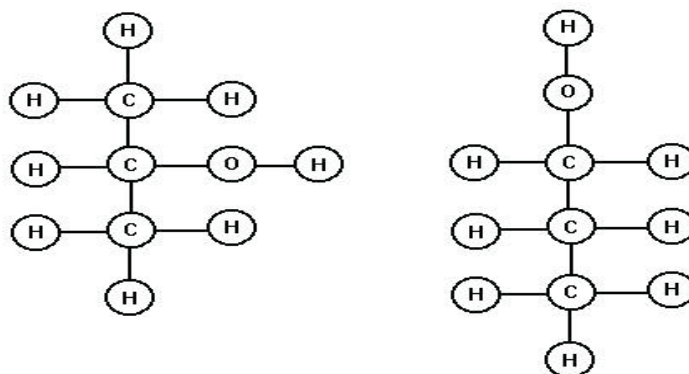


Figura 9 - Isômeros químicos.

Apesar de corresponderem à mesma fórmula, as moléculas que estão associadas aos grafos são diferentes e apresentam propriedades distintas. Este tipo de moléculas são chamados de isômeros. Em 1884, o químico A. Crum Brown se dedicou à investigação da quantidade de isômeros de hidrocarbonetos saturados, para um número n de átomos de carbono. Para atingir seu objetivo, Cayley resolveu os problemas de enumeração em árvores enraizadas (aquelas nas quais um determinado nó, o raiz, é diferenciado dos demais) e árvores cujos nós têm, no máximo grau 4, e finalmente, árvores cujos nós têm grau 1 (átomos de Hidrogênio) e grau 4 (átomos de Carbono).

FORNECIMENTO DE SERVIÇOS

Uma determinada companhia deve fornecer algum tipo de serviço à população, como exemplo, água, luz, ou telefone. Deseja-se instalar alguns desses serviços em dois prédios recém-construídos. Decidiu-se então usar tubulações subterrâneas, todas à mesma profundidade, por motivos de segu-

rança. Como deverá ser realizada essa tarefa?

A solução desse problema envolve o conceito de planaridade. Associando-se um nó a cada prédio (P_1 e P_2) e a cada tipo de serviço (A, L, T), tem-se o grafo da figura 10.

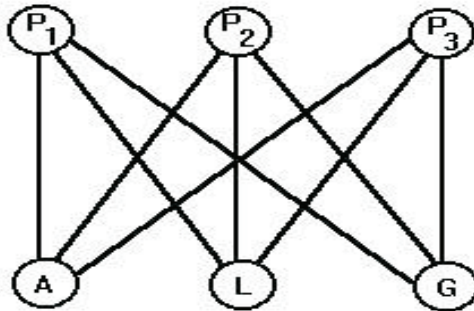


Figura 10 - Fornecimento de serviços.

Esse grafo não pode ser tomado como plano físico adequado para a construção das tubulações que devem estar à mesma profundidade. Uma planta para a construção dessas tubulações pode ser interpretada como uma representação desse grafo. Para que esta planta satisfaça a condição estabelecida pelo problema, os arcos não podem se interceptar. Como resultado, não é possível fazer uma planta que apresente essas características.

PLANEJAMENTO DE TAREFAS

Duas técnicas foram desenvolvidas no final da década de 1950 para facilitar o gerenciamento de projetos: PERT (Project Evaluation and Review Technique) e CPM (Critical Path Method). A primeira por uma firma fornecedora de consultoria para a Marinha dos Estados Unidos, no programa de mísseis Polaris, e a segunda pela firma *E.I. du Pont de Nemours Company*, para gerenciamento de projetos de construção. A aplicação destas técnicas teve tanto sucesso que passou a ser uma exigência do governo americano para firmas que ganhassem contratos para prestação de serviços e construção de obras públicas.

Como passo inicial, deve ser construído um diagrama de tarefas que representará todas as tarefas e as relações de precedência entre elas. Por exemplo, uma firma deverá fazer uma pesquisa de mercado para outra empresa qualquer. Foram definidas as tarefas e relações de precedência listadas na tabela 1.

Tabela 1- Tarefas e relações de precedência.

Tarefa	Descrição	Predecessoras
A	Elaborar questionários.	-
B	Fazer programas para interpretar dados colhidos em campo.	A
C	Contratar equipe para colher dados.	A
D	Colher dados.	C
E	Acertar contas com a equipe.	D
F	Analisar dados com auxílio de programas e elaborar relatório para o cliente.	B e D

Para o gerenciamento do projeto, é necessário fazer a inclusão de outras informações, como por exemplo, o tempo de duração de cada tarefa. Também pode ser fornecido o custo de execução de cada tarefa como função do tempo de duração.

ALINHAMENTO DE SEQÜÊNCIAS BIOLÓGICAS

Outra aplicação importante da teoria de grafos é encontrada na Biologia. Deseja-se estabelecer uma medida para similaridade entre seqüências biológicas. Considerar como exemplo, as seqüências CATT e GAT, trechos de cadeias de DNA compostas pelas bases A (adenina), C (citosina), G (guanina) e T (timina). A seguir tem-se um possível alinhamento destas seqüências:

C	A	-	T	T
-	G	A	-	T

em que - representa uma falha. Cada membro de uma seqüência é emparelhado com um membro da outra seqüência ou com uma falha.

A "qualidade" do alinhamento é medida atribuindo-se um valor para cada tipo de emparelhamento e somando-se os valores de todos os emparelhamentos do alinhamento. Atribuindo-se ao emparelhamento de dois membros iguais o valor 1, de dois membros diferentes o valor -1 e de um membro e uma falha o valor -2, o valor do alinhamento será $-2-1-2-2+1 = -6$. Já o alinhamento:

C	A	T	T
G	A	T	-

tem valor $-1+1+1-2 = -1$ e é considerado melhor, segundo este critério.

O desenvolvimento de técnicas de clonagem de moléculas, a maior disponibilidade de computadores e a compilação de banco de dados aumentaram a procura por métodos de comparação de seqüências biológicas. Este problema pode ser resolvido como um problema de caminho mais curto num dígrafo e solucionado de maneira eficiente. A figura 11 contém o dígrafo correspondente ao problema de alinhamento das seqüências acima.

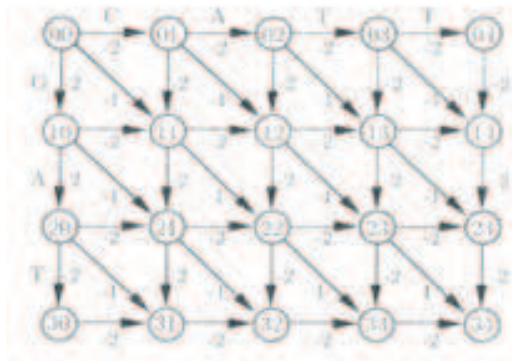


Figura 11 - Alinhamento de seqüências biológicas.

Assim, o problema de calcular o melhor alinhamento (o de valor mais alto) consiste em achar o caminho mais longo, em que seu comprimento é a soma dos comprimentos dos arcos no caminho.

PROBLEMA DAS QUATRO CORES

O problema proposto é o seguinte: é possível colorir as regiões de qualquer mapa desenhado no plano usando, no máximo quatro cores, de modo que nenhum par de regiões, que tenham fronteira em comum, sejam da mesma cor (Figura 12)?

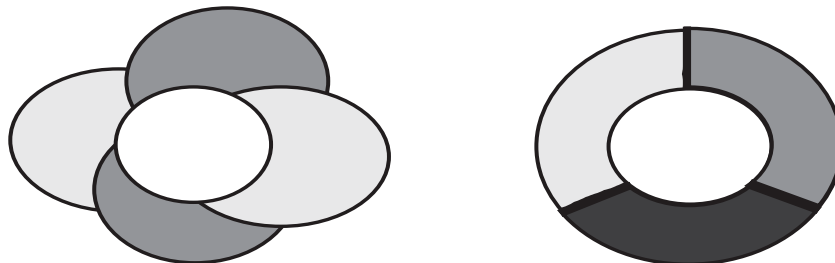


Figura 12 - Problema das quatro cores.

Associar-se-á a cada região um nó e se dir-se-á que dois nós são adjacentes se as regiões correspondentes têm fronteira comum.

A resposta a este problema pode também ser encontrada por meio da

construção de um algoritmo computacional.

```
procedure TForm1.BMatrizClick(Sender: TObject);
var mat: array [1..20,1..20] of integer;
    c: array [1..20] of integer;
    i, j, cor, maior, ordem: integer;
    aux: boolean;
    mens: string;
begin
    maior:= 0;
    ordem:= StrToInt(InputBox ('Matriz de Adjacência','Digite a ordem:'));
    for i:=1 to ordem do
        for j:=1 to ordem do
            mat[i,j]:= StrToInt(InputBox('Matriz de Adjacência','Digite o elemento ['+IntToStr(i)+' '+'IntToStr(j)'+'] da matriz:'));
            c[1]:= 1;
            for i:=2 to ordem do
                begin
                    aux:= false;
                    cor:= 1;
                    while aux = false do
                        begin
                            for j:=1 to ordem do
                                if mat[i,j] = 1
                                    then
                                        begin
                                            if cor = c[j]
                                                then
                                                    aux:= true;
                                        end
                                        if aux = true
                                            then
                                                begin
                                                    cor:= cor + 1;
                                                    aux:= false;
                                                end
                                            else
                                                begin
                                                    c[i]:= cor;
                                                    aux:= true;
                                                end;
                                        end;
                            end;
                        end;
                end;
            end;
        end;
```

```
end;  
for i:=1 to ordem do  
begin  
  mens:= mens + IntToStr(c[i]) + ' ';  
  if c[i] > maior  
  then  
    maior:= c[i];  
end;  
ShowMessage ('A seqüência de cores é: ' + mens  
  + #13 + #13 + 'O número total de cores é: '+IntToStr(maior));  
end;
```

A entrada para o programa é a matriz de adjacência correspondente. O algoritmo inicia com a cor 1 e testa se o próximo elemento da matriz é adjacente. Se for, a cor será mudada para 2 e assim por diante. Caso o elemento não seja adjacente, então o programa não altera a cor e continua o teste. Após percorrer toda matriz, é exibida uma mensagem com a seqüência de cores que foram utilizadas.

PROBLEMA DOS CAMINHOS

Como exemplo, considera-se o problema de encontrar a rota entre duas estações do metrô de Londres. O mapa da figura 13 representa a parte central do metrô da cidade. Assim como todos os mapas, este não representa toda a área, mas somente as áreas mais relevantes que as pessoas costumam utilizar, assim como as distâncias entre as estações. Ele revela somente como as estações estão interligadas. Desse modo, os passageiros podem planejar suas rotas de uma estação para outra.



Figura 13 - Mapa do metrô de Londres.

Entretanto, pode-se usar um mapa rodoviário, no qual não somente as interligações entre cidades são importantes, mas também as distâncias ou tempo de viagem entre elas. O mapa da figura 14 representa a maioria das rotas entre

um número de cidades dos Estados Unidos, e nele, os valores indicam o número de horas que se leva para percorrer o trajeto entre duas cidades.



Figura 14 - Mapa rodoviário.

Este mapa tem a forma de um grafo, em que os vértices representam as cidades e os arcos representam as rodovias.

PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Um caixeiro viajante deseja visitar um número de cidades e retornar ao seu ponto de origem, realizando suas vendas nas cidades pelas quais passa. Ele quer escolher uma rota com o menor percurso possível. Como exemplo, pode-se considerar quatro cidades ilustradas na figura 15.

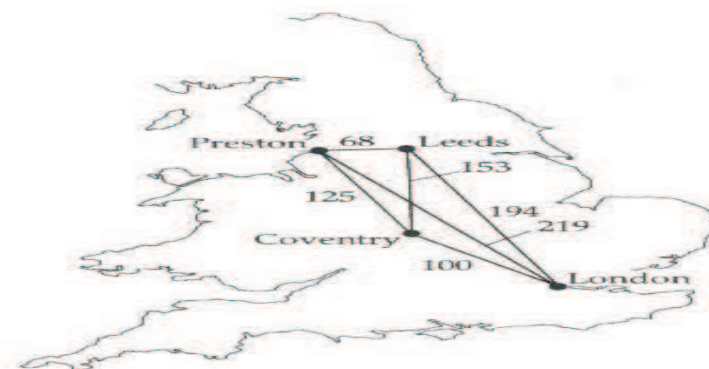


Figura 15 - Rota de viagem.

Os vértices correspondem a Londres, Coventry, Preston e Leeds, e seis arcos fazem a ligação entre elas. Os valores associados aos arcos representam a distância (em milhas) entre os pontos. É simples mostrar a solução por meio de tentativa e erro:

Londres - Coventry - Preston - Leeds - Londres, com a distância total de $100 + 125 + 68 + 194 = 487$ milhas. Qualquer outra rota implicaria no aumento total da distância.

Infelizmente, a medida que se aumenta o número de cidades, ir-se-á encontrar dificuldades. Não existe nenhum método conhecido para a solução do problema do caixeiro viajante, entretanto existem diversos procedimentos para aproximar soluções. O único procedimento garantido para resolver esse problema é olhar para todas as soluções possíveis, escolhendo a menor delas. A situação torna-se mais complicada à medida que aumenta o número de cidades. Por exemplo, escolhendo-se 20 cidades, então o número de possíveis soluções será de 12.16×10^{17} e um computador processando uma taxa de 1000 possibilidades por segundo levará 38 milhões de anos para chegar ao resultado.

Esse rápido aumento no tempo, bem como no número de cidades, é conhecido como explosão combinatorial.

CONCLUSÕES

O texto apresenta um grande número de problemas, em diversas áreas, em que a teoria de grafos é aplicada. Em todos estes problemas pode-se relacionar a teoria algorítmica computacional e chegar a bons resultados.

Como se observa, a teoria de grafos é uma área de pesquisa com vasta aplicabilidade, mas para a solução de modelos complexos, novos resultados precisam ser estudados. Estes resultados requerem conhecimentos profundos da Matemática e da Ciência da Computação.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALDOUS, Joan M.; WILSON, Robin J. 2000. **Graphs and Application - an introductory approach**. Berlim: Springer.

GERSTING, Judith L. 1995. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC.

LIPSCHUTZ, Seymour.; LIPSON, Marc. 1997. **Discrete Mathematics**. 2ª ed. Estados Unidos: McGraw-Hill.

LUCCHESI, Cláudio L. 1979. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Rio de Janeiro: IMPA.