APLICAÇÃO DO TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH A UM PROBLEMA EM PROBABILIDADE [1]

APPLICATION OF BANACH FIXED POINT THEOREM TO PROBABILITY PROBLEM

Rodrigo Blanco Magalhães[2]
Eleni Bisognin[3]

RESUMO

Neste trabalho mostrou-se uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach a um problema de consumo de dois tipos de artigos distintos, por uma população fixa de uma cidade, e, por essa análise, mostrou-se que o comportamento do mercado, a longo prazo, tende a um ponto de equilíbrio e que esse ponto de equilíbrio satisfaz as condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Palavras-chave: ponto fixo, probabilidade, autovalor e autovetor

ABSTRACT

In this work we showed an application of Banach Fixed Point Theorem for the consumption of two different articles by a fixed population and, through this analysis it is showed that in a long time, behavior the marketing tends to an equilibrium point, and this equilibrium point satisfies the Banach Fixed Point Theorem.

Key words: fixed point, probability, eigenvalue and eigenvector

INTRODUÇÃO

O propósito, neste trabalho, é demonstrar-se o Teorema do Ponto Fixo de Banach e apresentar uma importante aplicação a um problema elementar em probabilidade.

Primeiramente, são apresentados alguns conceitos básicos, relativos a espaços métricos e seqüências de Cauchy para, em seguida, dar-se uma demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Posteriormente, anali-

---

[1] Trabalho Final de Graduação.
[2] Curso de Matemática - Licenciatura Plena. UNIFRA.
[3] Orientador.

sa-se um problema de consumo de duas mercadorias de tipos diferentes por uma população fixa de uma cidade, e mostra-se que, sob certas condições, o mercado apresenta um equilíbrio a longo prazo. Este ponto de equilíbrio é exatamente o ponto que satisfaz as condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Seja M um espaço métrico e d uma distância definida em M, então (M,d) é um espaço métrico munido da distância d. Segundo LIMA (1993) , uma aplicação T: $(M,d) \to (M,d)$ é uma contração se existe uma constante k, $0 < k < 1$, tal que

$$d\,(\,T(x), T(y)\,) \leq k\, d\,(x, y) \qquad (1)$$

para todo $x, y \in M$.

No caso de T ser uma função real, T: $I \to IR$, T derivável no intervalo I, então T é uma contração se existir uma constante k tal que $|\,T'(x)\,| \leq k < 1$ para todo $x \in I$.

Ainda segundo LIMA (1993), uma seqüência $\{x_n\}$ num espaço métrico M, é de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in IN$ tal que, para $n > n_0$, $d\,(x_n\,, x_{n+p}\,) < \varepsilon$ qualquer que seja $p \in IN$. Isto significa que à medida que n cresce, os elementos da seqüência se tornam cada vez mais próximos uns dos outros.

Diz-se que o espaço métrico M é completo se toda seqüência de Cauchy em M é convergente.

Com essas noções preliminares demonstra-se, a seguir, o Teorema do Ponto Fixo de Banach para, posteriormente, utilizar este resultado.

TEOREMA (Teorema do Ponto Fixo)

Seja (M, d) um espaço métrico completo. Se T: $(M, d) \to (M, d)$ for uma contração de M, então T possui um único ponto fixo.

DEMONSTRAÇÃO

Deve-se mostrar a existência e unicidade do ponto fixo.

Para mostrar a existência, considera-se x um ponto de M e seja $\{x_n\}$ uma seqüência de pontos de M definida do seguinte modo:

$$x_2 = T(x_1)\ ,\ x_3 = T(x_2)\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = T(x_{n-1})\ ,\ \ldots \tag{2}$$

Mostra-se primeiramente que esta seqüência $\{x_n\}$ é convergente em M. Sejam x_m e x_n , $n > m$, dois elementos quaisquer da seqüência, então

$$d\,(x_m , x_n) \leq d\,(x_m , x_{m+1}) + d\,(x_{m+1} , x_{m+2}) + \ldots + d\,(x_{m-1}, x_n). \tag{3}$$

Do modo como foi definida a seqüência e do fato de T ser uma contração, resulta,

$$d\,(x_{m+1} , x_{m+2}) = d\,(\,T(x_m)\,,\,T(x_{m+1}))\leq k\,d\,(x_m , x_{m+1}) \tag{4}$$
$$d\,(x_{m+2} , x_{m+3}) = d\,(\,T(x_{m+1})\,,\,T(x_{m+2}))\leq k^2\,d\,(x_m , x_{m+1}) \tag{5}$$
$$d\,(x_{m+s-1} , x_{m+s}) = d\,(\,T(x_{m+s-2})\,,\,T(x_{m+s-1}))\leq k^{s-1}\,d\,(x_m , x_{m+1}). \tag{6}$$

Quer-se calcular a distância $d\,(x_{n-1} , x_n)$. Sendo $n > m$, pode-se supor $n = m + s$, então

$$d\,(x_{n-1} , x_n) \leq k^{n-m-1}\,d\,(x_m , x_{m+1}). \tag{7}$$

Então a desigualdade (3) pode ser escrita na forma

$$d\,(x_m , x_n) \leq (\,1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-m-1}\,)\,d\,(x_m , x_{m+1}). \tag{8}$$

Como $0 < k < 1$, então $1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-m-1} = \dfrac{1}{1-k}$

logo,

$$d\,(x_m , x_{m+1}) \leq \frac{d(x_m , x_{m+1})}{1-k} \tag{9}$$

e

$$d\,(x_m , x_{m+1}) = d\,(\,x_{(m-1)+1} , x_{m+1}\,) \leq k^{m-1}\,d\,(x_1 , x_2). \tag{10}$$

Substituindo (10) em (9) obtém-se

$$d\,(x_m , x_n) \leq \frac{k^{m-1}\,d(x_1, x_2)}{1-k} \tag{11}$$

para $0 < k < 1$.

Tomando o limite quando m e n tendem para o infinito, segue que

$$\lim_{n,m\to\infty} d\,(x_m , x_n) = 0 \tag{12}$$

o que mostra que $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em M e como M é um espaço métrico completo, $\{x_n\}$ é convergente em M.

Seja

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_0. \tag{13}$$

Do modo como $\{x_n\}$ foi definida, $x_n = T(x_{n-1})$, tomando o limite em ambos os membros resulta

$$\xi = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = T(\xi) \tag{14}$$

pois T é uma aplicação contínua. Isto mostra que T admite um ponto fixo.

UNICIDADE

Supõe-se que existam dois pontos fixos ξ_1 e ξ_2 tais que $T(\xi_1) = \xi_1$ e $T(\xi_2) = \xi_2$ tem-se

$$d\,(T(\xi_1)\,,\,T(\xi_2)) \leq k\,d\,(\xi_1\,,\,\xi_2) \tag{15}$$

o que implica $d\,(\xi_1\,,\,\xi_2) = 0$, isto é, $\xi_1 = \xi_2$, o que prova que o ponto fixo é único.

Mostra-se a seguir uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach a um problema de probabilidade, porém, antes, necessita-se de algumas definições básicas da teoria de probabilidade necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

CADEIAS DE MARKOV

As cadeias de Markov, segundo LAY (1999), são usadas como modelos matemáticos para analisar situações em diversas áreas como biologia, química, engenharia, etc... Em cada caso, o modelo é usado para descrever um experimento que é realizado muitas vezes e da mesma forma, e que o resultado de cada ensaio do experimento pertence a um dentre alguns resultados possíveis previamente especificados, e ainda, que o resultado de cada ensaio só depende do ensaio anterior.

Por exemplo, se a população de uma cidade e de seus bairros fosse medida a cada ano, então o vetor do tipo

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0{,}60 \\ 0{,}40 \end{bmatrix} \tag{16}$$

indicaria que 60% da população reside na cidade e 40% residem nos bairros. Os valores em x_0 têm soma 1 pois eles correspondem a toda população. Um vetor com componentes não negativos, que tem soma 1, denomina-se vetor de probabilidade e, uma matriz quadrada cujas colunas são vetores de probabilidade, é uma matriz estocástica.

Uma cadeia de Markov é uma seqüência de vetores de probabilidade $x_0, x_1, x_2, \ldots$ juntamente com uma matriz estocástica P tal que

$$x_1 = P.x_0 \, , x_2 = P.x_1 \, , \ldots , x_n = P.x_{n-1}. \tag{17}$$

Assim a cadeia de Markov é descrita pela equação diferencial de 1[a] ordem

$$x_{k+1} = P.x_k \tag{18}$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots$

O aspecto mais interessante das cadeias de Markov é o estudo do comportamento a longo prazo dessa cadeia. Por exemplo, quer se saber o que acontecerá, a longo prazo, com a distribuição da população no exemplo citado anteriormente.

Essas noções serão utilizadas para analisar a seguinte situação. Conforme LOPES (1995), supõe-se uma cidade com uma população total fixa de N habitantes e que, cada habitante, consome apenas um tipo de artigo entre os artigos A e B, podendo cada habitante mudar de opinião de um mês para outro.

Supõe-se inicialmente que X_0 pessoas consumiam um artigo do tipo A e Y_0 pessoas consumiam um artigo do tipo B e a cada mês é contado o número de pessoas que consomem cada tipo de artigo.

Indica-se por X_n e Y_n o número de pessoas que consomem artigos do tipo A e B, respectivamente, no n-ésimo mês.

Quer se saber o que acontece, a longo prazo, com as probabilidades

$$x_n = \frac{X_n}{N} \text{ e } y_n = \frac{Y_n}{N}. \tag{19}$$

Seja a_{ij} o quociente entre o número de pessoas que consomem o artigo i no mês 1 e consumiam o artigo j no mês 0, pelo número de pessoas que consumiam o artigo j no mês 0, para $i \in \{1, 2\}, j \in \{1, 2\}$, sendo o número 1 associado ao artigo do tipo A e 2 ao artigo do tipo B.

Com esta notação tem-se que a_{11} representa o quociente entre o número de pessoas que consomem o artigo A no mês 1 e consumiam o artigo A no mês 0, pelo número de pessoas que consumiam o artigo A no mês 0. Do mesmo modo, obtêm-se os quocientes a_{12} , a_{21} e a_{22} .

Para se obter o consumo (x_1, y_1) no mês 1, tem-se $x_1 = \dfrac{X_1}{N}$ que é o quociente entre o número de pessoas que consomem o artigo A no mês 1, pelo número total da população.

Observa-se que o número de pessoas que consomem o artigo A, no mês 1, é igual a soma do número de pessoas que consumiam A no mês 0 e continuam consumindo A nos mês 1, mais o número de pessoas que consumiam o artigo do tipo B no mês 0 e passam a consumir A no mês 1.

Também pode-se expressar

$$x_1 = \frac{\text{Nº de pessoas que consumiam } A \text{ no mes 0 e continuam consumindo } A \text{ no mes 1}}{X_0} \cdot \frac{X_0}{N} +$$

$$+ \frac{\text{Nº de pessoas que consumiam } B \text{ no mes 0 e consomem } A \text{ no mes 1}}{Y_0} \cdot \frac{Y_0}{N} \tag{20}$$

Então x_1 pode ser escrito na forma $x_1 = a_{11}\, x_0 + a_{12}\, y_0$ e do mesmo modo podemos expressar $y_1 = a_{21}\, x_0 + a_{22}\, y_0$.

Portanto, existe uma matriz $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tal que

$$P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Observa-se que P é uma matriz estocástica pois suas colunas são vetores de probabilidade tais que

$$a_{11} + a_{21} = 1 \;\text{ e }\; a_{12} + a_{22} = 1. \tag{22}$$

No caso das probabilidades serem constantes, isto é,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = P^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

em que P^n é um produto de matrizes, pode-se calcular as probabilidades aplicando a matriz P a probabilidade inicial (x_0 , y_0).

Quer se saber se existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ e, se existe, esse limite depende das probabilidades iniciais $\dfrac{x_0}{y_0}$?

No caso do limite existir, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_0}{y_0}\right) = \left(\dfrac{x}{y}\right)$ independente das probabilidades iniciais $\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)$, então conforme LOPES (1995), o mercado tem um equilíbrio natural.

O propósito agora é encontrar $\left(\dfrac{x}{y}\right)$ tal que $\left(\dfrac{x}{y}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P^n \left(\dfrac{x_0}{y_0}\right)$.

Como P define um função contínua resulta

$$\left(\frac{x}{y}\right) = P\,(\lim_{n\to\infty} P^n\left(\frac{x_0}{y_0}\right)) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} \left(\frac{x_0}{y_0}\right) = \left(\frac{x}{y}\right) \tag{25}$$

então procura-se $\left(\dfrac{x}{y}\right)$ tal que $P \left(\dfrac{x}{y}\right) = \left(\dfrac{x}{y}\right)$ isto é, busca-se um autovetor da aplicação P associado ao autovalor 1.

O conjunto dos autovetores de P, associado ao autovalor 1, é uma reta passando pela origem, pois este conjunto é um subespaço vetorial de IR^2, e o vetor $\left(\dfrac{x}{y}\right)$ é a interseção dessa reta com a reta $x + y = 1$.

Sabe-se que se P é uma matriz estocástica, então um vetor de equilíbrio para P é um vetor de probabilidade q tal que $P\,q = q$ e, toda matriz estocástica tem um vetor de equilíbrio.

Retornando ao problema, quer se saber se existe apenas um limite $(x,\ y)$ e se esse limite independe do vetor probabilidade inicial (x_0 , y_0).

Para mostrar que existe equilíbrio no mercado deve-se ter um vetor (x, y) satisfazendo $P(x, y) = (x, y)$ e $x + y = 1$.

Seja S o conjunto $S = \{ (x, y) \in IR^2, x, y \geq 0 \text{ e } x + y = 1\}$. Este conjunto é um segmento de reta no 1º quadrante e observa-se que os vetores (1, 0) e (0, 1) pertencem a S.

Ainda, os vetores (a_{11} , a_{21}) e (a_{12} , a_{22}) também pertencem a S pois e $a_{ij} > 0$, $\forall\ i , j$.

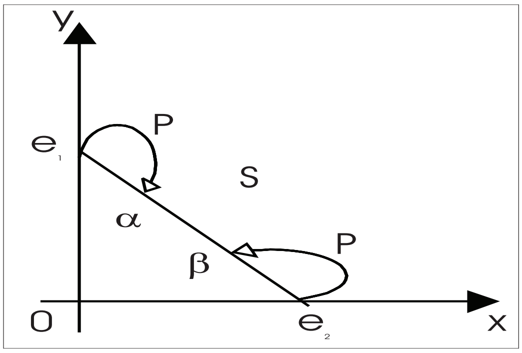
Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ de S são tais que

$$P(e_1) = P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix} = \alpha \text{ e } P(e_2) = P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix} = \beta \qquad (26)$$

onde α e β são vetores que não estão sobre os eixos coordenados, pois $a_{ij} > 0$, $\forall\, i, j$. A imagem do segmento $t\,e_1 + (1 - t)\,e_2$ para $t \in [0, 1]$ é um segmento de reta inteiramente contido em S pois

$$P[\,t\,e_1 + (1 - t)\,e_2\,] = t\,P(e_1) + (1 - t)\,P(e_2) = t\,\alpha + (1 - t)\,\beta. \qquad (27)$$

Isto pode ser visualizado,conforme LOPES (1995), na figura 1.



(28)

Figura 1- Segmento da reta inteiramente contido em *S*.

Fazendo uma mudança de coordenadas, isto é, escolhendo uma parametrização x ao invés de (x, y), então o problema de conseguir um ponto fixo (x, y) sobre S é equivalente a conseguir um ponto fixo x da abscissa x cuja ordenada é y e satisfazendo $x + y = 1$. Assim a aplicação P pode ser pensada como uma transformação

$$\begin{aligned} &T : [0, 1] \to [0, 1] \\ &x \mapsto T(x) = (\,G\,P\,G^{-1}\,)\,(x) \end{aligned} \qquad (29)$$

em que $G(x, y) = x$ é a projeção na 1^{a} coordenada e G^{-1} é a sua inversa.

Observa-se que se $T^n(x_0) = x$ e $y = 1 - x$ então

$$(x, y) = G^{-1}(x) = G^{-1} \lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = \lim_{n\to\infty} G^{-1}\,T^n(x_0) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P^n(G^{-1}(x_0)) = \lim_{n\to\infty} P^n(x_0, y_0), \qquad (30)$$

onde usou-se a relação $G^{-1}\,T^n = P^n\,G^{-1}$.

Analisa-se então o comportamento da aplicação T^n em [0, 1] ao invés de analisar a evolução de P^n em S.

Da definição de T tem-se

$$T(x) = (G\,P\,G^{-1})(x) = G\,P\,(G^{-1}(x)) = G\,P\begin{pmatrix} x \\ \hline 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= G\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}(1-x) \\ a_{21}x+a_{22}(1-x) \end{pmatrix} = a_{11}\,x + a_{12}\,(1-x) = (\,a_{11} - a_{12}\,)\,x + a_{12} \qquad (31)$$

portanto, a expressão analítica de T é da forma

$$T\,(x) = (\,a_{11} - a_{12}\,)\,x + a_{12}\,. \qquad (32)$$

Tem-se que $T(0) = a_{12}$ e $T(1) = a_{11}$, logo $T(0) \neq 0$ e $T(1) \neq 0$ e sendo o gráfico de T uma reta, a intersecção do gráfico de T com a diagonal do 1º quadrante determina o ponto fixo x tal que $T(x) = x$.

A unicidade do ponto fixo decorre do fato de que a inclinação da reta que define o gráfico de T é dada por $|\,T'(x)\,| = |\,a_{11} - a_{12}\,| < 1$, $\forall\, x$ pois a_{11} e a_{12} são números entre 0 e 1, logo T é uma contração e, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, o ponto fixo é único.

Observa-se que qualquer que seja o ponto inicial $x_0 \in [0,1]$, $T^n\,(x_0)$ vai convergir para um único ponto x. Segue, então, de (30) que, para qualquer vetor de condição inicial (x_0, y_0), $\lim\limits_{n\to\infty} P^n\,(x_0, y_0) = (x\,, y)$, o qual é um ponto fixo para P e é o vetor de equilíbrio do mercado a longo prazo.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, analisou-se um problema de consumo de dois artigos de tipos diferentes por uma população fixa de uma cidade, e mostrou-se que, a longo prazo, esse consumo tende a estabilizar, isto é, o mercado tende a um ponto de equilíbrio.

Um dos aspectos importantes desse estudo foi a inter-relação entre os conceitos de Álgebra Linear, Espaços Métricos e a Teoria de Probabilidades na análise de um problema em probabilidade.

Utilizou-se o conceito de autovalor e autovetor de uma aplicação bem como a determinação de um ponto fixo dessa aplicação mostrando que, na realidade, esta aplicação é uma contração definida num espaço métrico e que esse ponto fixo, que indica o equilíbrio do mercado a longo prazo, é determinado pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIMA, E. L. 1993. **Espaços Métricos, Projeto Euclides.** 3 ed. Rio de Janeiro : IMPA

LOPES, A. 1995. **Uma Aplicação de Álgebra Linear a um Problema Elementar de Probabilidade.** Revista Matemática Universitária, São Paulo, n. 18, p. 33 - 41, junho

LAY, D. C. 1999. **Álgebra Linear e Suas Aplicações.** 2 ed. Rio de Janeiro: LTC