ANÁLISE QUALITATIVA DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS VIA O MÉTODO DE LIAPUNOV[1]

QUALITATIVE ANALYSIS OF SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS THROUGH LIAPUNOV'S METHOD

Edna Quinhones Pereira[2]
Vanilde Bisognin[3]

RESUMO

Neste trabalho estudou-se o Método de Liapunov ou Método Direto para a análise qualitativa das soluções de equações diferenciais ordinárias. O método consistiu em estudar a estabilidade ou instabilidade de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pela construção e posterior análise de uma função auxiliar adequada chamada função de Liapunov. Os resultados deste estudo foram aplicados, na segunda parte, no estudo do comportamento assintótico das soluções da equação clássica de Van der Pol.

Palavras-Chave: estabilidade, método de Liapunov, ciclos limites.

ABSTRACT

In this work we consider the Liapunov's Method or Direct Method to analyse the qualitative property of solutions of ordinary differential equations. This method is related to the study the stability or instability of solutions of ordinary differential equations of first order by construction and analysis of an adequate function, named Liapunov's Function. In the second part, we apply the results to study the asymptotic behavior of solutions of Van der Pol equation.

Key Words: Liapunov's Method, stability and instability solutions.

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais ordinárias, especialmente as não lineares, em geral não são solúveis por métodos analíticos. Neste caso é importante,

---

[1] Trabalho de Iniciação Cietífica.
[2] Aluna do Curso de Matemática - UNIFRA. Bolsista FAPERGS.
[3] Orientadora.

nas aplicações, considerar as informações qualitativas que se podem obter através das respectivas soluções sem resolver, realmente, as equações.

Existem vários métodos e técnicas distintas que permitem analisar o comportamento assintótico das soluções de equações diferenciais ordinárias lineares e não lineares. Um método clássico e simples é o chamado Método de Liapunov ou Método Direto. O método denomina-se direto, pois para aplicá-lo não é necessário o conhecimento prévio da solução da equação diferencial. Em lugar desse conhecimento, chaga-se a conclusões sobre a estabilidade ou instabilidade das soluções de equações diferenciais ordinárias pela construção e, posterior análise de uma função auxiliar adequada, chamada função de Liapunov.

Neste trabalho teve-se como objetivo, na primeira parte, fazer uma descrição do método de Liapunov e, na segunda parte, aplicar os resultados no estudo do comportamento assintótico das soluções da equação de Van der Pol.

MÉTODO DE LIAPUNOV

O método de Liapunov é utilizado para estudar a estabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares. Uma vez que as equações diferenciais, principalmente as não lineares, não são facilmente solúveis a vantagem deste método é que, para aplica-lo, não é necessário conhecer a soluças do sistema de equações diferenciais.

O método tem motivação nos sistemas físicos conservativos em que:

(i) um ponto é estável se a energia potencial tiver um mínimo local. Caso contrário é instável.

(ii) a energia é constante ao longo de todo o movimento.

Um exemplo que ilustra estes dois princípios é a equação do pêndulo não amortecido, que é um sistema mecânico conservativo, governado pela seguinte equação:

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{g}{1}\,\mathrm{sen}\theta = 0. \tag{1}$$

O sistema de equações de primeira ordem correspondente é:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{1}\ \mathrm{sem}\ x, \tag{2}$$

onde $x = \theta$ e $y = \frac{d\theta}{dt}$.

A energia potencial U é igual ao trabalho efetuado para elevar o pêndulo acima da sua posição mais baixa, isto é:

$$U(x,y) = mgl(1-\cos x). \qquad (3)$$

A energia total V, que é a soma da energia potencial U e da energia cinética ½ ml^2 ($d\theta/dt$)^2 é dada em termos de x e y por:

$$V(x,y) = mgl(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}\, ml^2y^2 \ . \qquad (4)$$

Os pontos críticos do sistema (2) sao $x = \pm n\pi$, $y = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ correspondentes a $\theta = \pm n\pi$, $(d\theta / dt) = 0$. Fisicamente, espera-se que os pontos $x = 0, y = 0; x = \pm 2\pi, \ y = 0; \ldots$ correspondentes a $\theta = 0, \pm 2\pi, \ldots$, nos quais a massa do pêndulo está na vertical, para baixo, sejam estáveis; e que os pontos $x = \pm \pi, y = 0; x = \pm 3\pi, y = 0; \ldots$ correspondentes a $\theta = \pm \pi, \pm 3\pi; \ldots$ nos quais a massa do pêndulo está na vertical, para cima, sejam instáveis. Esta expectativa está conforme o enunciado (i), pois nos primeiros pontos U atinge um mínimo igual a zero, e nos últimos pontos U atinge um máximo igual a 2mgl.

Sobre a trajetória correspondente a uma solução $x = \phi(t)$, $y = \Psi(t)$ das equações (2), V pode ser considerada função de t. a derivada de $V[\phi(t), \Psi(t)]$ é a taxa de variação de V sobre a trajetória. Pela regra da cadeia tem-se que:

$$(dV/dt)[\phi(t), \Psi(t)] = {}_{Vx}[\phi(t), \Psi(t)][d\phi(t) / dt] + {}_{Vy}[\phi(t), \Psi(t)][d\Psi(t) / dt$$
$$(dV/dt)\ [\phi(t), \Psi(t)] = (mgl \text{ sen } x)\ (dx / dt) + ml^2\ y(dy / dt) \ (5)$$

onde $x = \phi(t)$, $y = \Psi(t)$.

De (2) tem-se que (5) transforma-se em:

$$(dV/dt)\ [\phi(t), \Psi(t)] = (mgl \text{ sen } x)y - ml^2\ y(g / l)\text{sen } x$$
$$(dV/dt)\ [\phi(t), \Psi(t)] = 0.$$

Assim V é uma constante sobre qualquer trajetória de sistema (2), o que corresponde ao item (ii).

Considere-se agora o sistema autônomo geral

$$(dx / dt) = F(x,y)$$
$$(dy / dt) = G(x,y)$$

e supondo-se que o ponto $x = 0$, $y = 0$ seja um ponto crítico do sistema estudou-se a estabilidade ou instabilidade das soluções do sistema. Para isso foi preciso de algumas definições.

Definição 1: Seja V uma função definida sobre um domínio D que contém a origem. A função V é ***definida positiva*** em D se V (0,0) = 0 e V (x,y) > 0 para todos os outros pontos em D. Do mesmo modo a função V é ***definida negativa*** em D se V(0,0) = 0 e V(x,y) < 0 para todos os outros pontos em D. Se forem trocados os sinais de desigualdade > e < por ≥ ou ≤ a função V é, respectivamente, ***semidefinida positiva*** e ***semidefinida negativa.***

O teorema de Liapunov, a seguir, permite concluir a estabilidade ou instabilidade das soluções de (6).

Teorema de Liapunov: Sejam $x_0 \in W$, $W \subset \Re^n$, $f \in C^1$ e $x' = f(x)$ e $f(x_0) = 0$. Seja $V: U \to \Re$ uma função contínua definida em $U \subset W$ e seja diferenciável em $U = \{x_0\}$ tal que $V(x_0) = 0$ e $V(x) > 0$, $x \neq x_0$.

1. Se $\dot{V}(x) \leq 0$ em $U - \{x_0\}$ então x_0 é estável.

2. Se $\dot{V}(x) < 0$ então x_0 é assintoticamente estável.

3. Se $\dot{V}(x) > 0$ então x_0 é instável.

Prova:

Seja $\rho > 0$ e considere-se a bola de centro x_0 e raio ρ (pequeno), $\beta\rho(x_0) \subset U$. Seja $\delta\ \beta\rho\ (x_0)$.

Seja α o mínimo de V na fronteira de $\beta\rho\ (x_0)$ e $\alpha > 0$.

Considera-se $U_1 = \{x \in \beta\rho(x_0)\ /\ V(x) < \alpha\}$. Como $\dot{V}(x) \leq 0$ então V é decrescente ao longo das órbitas e assim, todasolução começando em U_1 não pode sair da bola $\beta\rho(x_0)$. Logo x_0 é estável.

Para provar (2) deve-se provar que se $\varphi(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ descreve-se as órbitas do sistema então:

$$(V o \varphi)(t) = V(\varphi(t)) = V(t) \to 0, \text{ quando } t \to \infty.$$

Tem-se que $\dot{V} < 0$, daí V é decrescente e portanto existe lim. V(t) = L.

Suponha L > 0. Como $\dot{V}: U \to \Re$ é uma função contínua e negativa então existe K > 0 tal que $\dot{V}(t) \leq -K < 0$.

Integrando de zero a t obtém-se:

$$V(t) - V(0) \leq -Kt, \text{ ou seja,}$$
$$V(t) \leq V(0) - Kt.$$

Para t grande V é negativa o que contraria a hipótese de $V(x) > 0$. Logo $L = 0$.

Para (3) observa-se que sendo $\dot{V}(x) > 0$ então V é crescente e portanto toda solução começando próximo de x_0 se afasta de x_0 quando $t \to \infty$. Logo x_0 é instável

Exemplo:

O ponto crítico (0,0) do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - xy^2 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -y - yx^2 \end{cases}$$

é assintoticamente estável.

De fato, considera-se a função $V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, e determina-se os coeficientes a, b e c de forma conveniente.

Tem-se que:

$$\dot{V}(x,y) = V_x \frac{dx}{dt} + Vy\frac{dy}{dt},$$

$$\dot{V}(x,y) = (2ax + by)\frac{dx}{dt} + (bx + 2cy)\frac{dy}{dt},$$

$$\dot{V}(x,y) = (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - yx^2),$$

$$\dot{V}(x,y) = -2ax^2 - 2ax^2y^2 - bxy - bxy^3 - bxy - bx^3y - 2cy^2 - 2cx^2y^2,$$

$$\dot{V}(x,y) = -2ax^2 - 2ax^2y^2 - 2cx^2y^2 - 2cy^2 - 2bxy - bxy^3 - bx^3y.$$

Deseja-se que o ponto crítico (0,0) seja assintoticamente estável então pelo teorema de Liapunov deve-se ter $\dot{V}(x,y) < 0$.

Assim, se for tomado $b = 0$, $a > 0$ e $c > 0$ segue que $\dot{V}(x,y) < 0$. Logo o ponto crítico (0,0) é assintoticamente estável.

SOLUÇÕES PERIÓDICAS E CICLOS LIMITES

As soluções periódicas têm, muitas vezes, papel importante nos problemas físicos, pois representam fenômenos que ocorrem repetidamente. As trajetórias correspondentes a uma solução periódica, no plano de fase, são curvas fechadas. Em muitas situações, este tipo de solução representa um "estado final" para o qual tendem todas as soluções próximas.

Há sistemas que num primeiro momento, dão a impressão de não possuírem soluções periódicas. Mas a partir de uma análise mais aprofundada percebe-se a existência de uma curva fechada que atrai todas as soluções vizinhas caracterizando, assim, uma solução periódica. Geralmente uma trajetória fechada, no plano de fase, tal que existem outras trajetórias não fechadas se espiralando na direção da curva fechada, quando $t \rightarrow \infty$, é chamada ***ciclo limite*** do sistema.

Se todas as trajetórias que começam próximas a uma trajetória fechada (ambas por dentro e por fora) se espiralizam em direção a trajetória fechada quando $t \rightarrow \infty$, o ciclo limite é ***estável***. Se de um lado tendem para a curva fechada, enquanto do outro espiralam para o infinito o ciclo limite é ***semiestável***. E se ambas as trajetórias se espiralizam para o infinito o ciclo limite é ***instável***.

A existência de trajetórias fechadas em determinados sistemas de equações é garantida pelo teorema de Poincaré – Bendixson publicado em 1901. Na literatura atual encontra-se vários enunciados deste teorema. Um deles é o seguinte:

Teorema de Poincaré – Bendixson: Seja $\Re$ uma região fechada e limitada do plano – xy que não contém pontos de equilíbrio do sistema.

Se ϕ (t) é uma solução tal que $\phi(0) \in \Re$ e $\phi(t) \in \Re$, $t \geq 0$, então a órbita de ϕ (t) é fechada ou tende espiralando na direção de uma órbita fechada do sistema, quando $t \rightarrow \infty$. Em ambos os casos o sistema tem uma solução periódica em $\Re$.

Prova:

A prova deste teorema pode ser encontrada em CODDNGTON & LEVINSON (1955).

APLICAÇÕES: A EQUAÇÃO DE VAN DER POL

A equação de Van der Pol (1889 – 1959) tem a forma

$$\frac{dx^2}{dt} - \mu(1 - x^2)\ \frac{dx}{dt} + x = 0, \qquad \mu > 0 \tag{7}$$

e descreve a corrente u em um tríodo oscilador.

O sistema correspondente é

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu(1 - x^2)y - x \end{cases} \tag{8}$$

onde o único ponto crítico é a origem.

A equação de Van der Pol apresenta uma solução periódica estável cujo período e amplitude dependem do parâmetro μ.

Analisando as curvas das trajetórias no plano de fase através do software Diagrama de Fase, é possível um entendimento sobre o comportamento periódico.

Analisando-se as trajetórias da equação de Van der Pol fazendo o parâmetro μ assumir os seguintes valores:

1º Caso: $\mu = 0{,}2$

Na Figura 1 observa-se que a trajetória que principia na vizinhança da origem espirala para fora, no sentido horário. A outra trajetória espirala para dentro, também no sentido horário. As duas trajetórias se aproximam de uma curva fechada que corresponde a uma solução periódica estável. O ciclo limite tem a forma de um círculo.

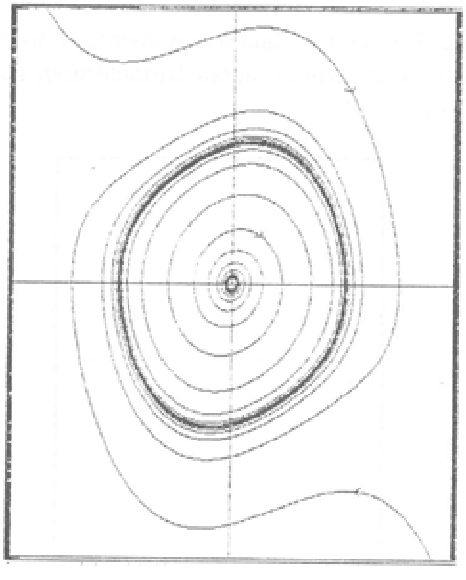

Figura 1 - 1º Caso: $\mu = 0{,}2$

2º Caso: $\mu = 1$

A Figura 2 mostra que as trajetórias continuam a se movimentar no sentido horário sobre o plano de fase, mas o ciclo limite é consideravelmente diferente de um círculo.

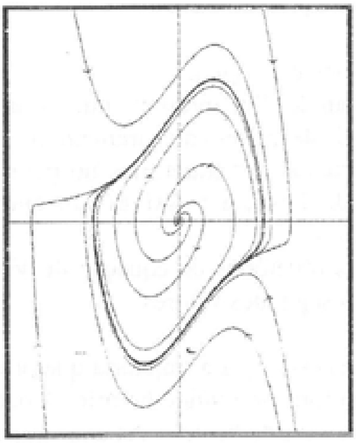

Figura 2 - 2º Caso: $\mu = 1$

3º Caso: $\mu = 5$

Já na Figura 3 observa-se que o movimento continua a ser efetuado no sentido horário, e o ciclo limite é, agora, bastante alongado, principalmente na direção do eixo y.

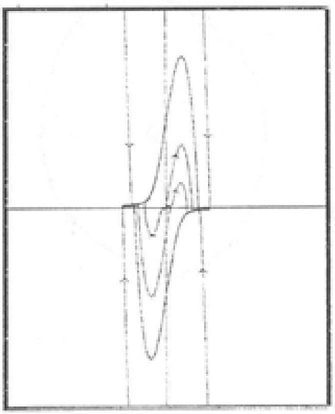

Figura 3 - 3º Caso: $\mu = 5$

A presença de um certo movimento periódico que atrai todas as soluções próximas, isto é, de um ciclo limite estável, é um fenômeno característico associado as equações diferenciais não lineares.

CONCLUSÕES

O método de Liapunov descrito de forma simples neste trabalho é um método que permite além do estudo do comportamento assintótico das soluções de equações diferenciais ordinárias, o estudo da estabilidade ou instabilidade de soluções de modelos não lineares descritos também por equações diferenciais parciais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. 1994. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S/A.

BRAUN, M. 1976. **Differential Equations and Their Applications**. Verlag: Springer.

CODDINGTON, E. A. and LEVINSON, N. 1955 **Theory of Ordinary Differential Equations**. Mc Graw-Hill.

MUÑOZ, G. M. 1987. **Um Programa para Traçar Diagramas de Fase**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática – UFRJ.

ROUCHE, N.; HABETS, P.; LALOY, M. 1976. **Stability Theory by Liapunov's Direct Method**. Verlag: Springer.