COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NÃO LINEARES[1]

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Tiago Martinuzzi Buriol[2]
Vanilde Bisognin[3]

RESUMO

Neste trabalho estudou-se a estabilidade e instabilidade das soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem que são lineares e quase lineares. Para a visualização das trajetórias dos sistemas utilizou-se o software "DIAGRAMA DE FASE".

Palavras-Chave: Sistemas de equações diferenciais, estabilidade, instabilidade, comportamento assintótico.

ABSTRACT

In this work we study the stability and instability solutions of ordinary differencial system, that are linear and almost linear. We use the software "DIAGRAMAS DE FASE" for the visualization of the solutions.

Key Words: Ordinary differential systems, stability and instability, asymptotic behavior.

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais ordinárias são muito úteis e importantes para descrever o comportamento de diversos fenômenos da natureza e do homem. Além disso, têm aplicações que vão da medicina à ecologia e à macroeconomia. Podem, por exemplo, ajudar a prever o crescimento ou o declínio de uma população de bactérias, de insetos, de mamíferos ou até de seres humanos.

---

[1] Trabalho de Iniciação Científica.
[2] Aluno do Curso de Matemática - UNIFRA. Bolsista FAPERGS.
[3] Orientadora.

Muitas dessas equações, principalmente as não lineares não apresentam solução analítica conhecida. No entanto, através de métodos geométricos, pode-se conhecer as propriedades qualitativas de suas soluções que, em muitas aplicações, fornecem informações importantes sobre seu comportamento assintótico.

Neste trabalho teve-se como objetivo discutir o problema da estabilidade e instabilidade das soluções de sistemas de equações diferenciais de 1ª ordem lineares e quase-lineares.

Considerando-se a equação diferencial

$$dx/dt = f(t,x) \tag{1}$$

onde

$x = (x_1(t),....,x_n(t))$ e $f(t,x) = (f_1(t,x_1,...,x_n),...,f_n(t,x_1,...,x_n))$

é função não linear de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Basicamente tenta-se responder as seguintes questões:

1) Existe um valor $x^0 = (x^0_1, x^0_2,...,x^0_n)$ para o qual $x(t) \equiv x^0$ é uma solução do sistema (1)?

2) Seja y(t) uma solução do sistema (1) e z(t) uma segunda solução com z(0) próximo de y(0). Permanecerá y(t) próximo de z(t) para todo tempo t? Ou z(t) divergirá de y(t) quando $t \longrightarrow \infty$?

3) O que acontece com a solução quando t cresce infinitamente? Todas as soluções se aproximam de um valor de equilíbrio? Se elas não se aproximam de um valor de equilíbrio, elas se aproximam de uma solução periódica?

Consideraram-se as equações em forma de sistemas de equações diferenciais de ordem 2, possibilitando assim a interpretação das soluções como sendo curvas ou trajetórias no plano de fase. Utilizaram-se, paralelamente, o software Diagrama de Fases (disponível na INTERNET) para visualizar algumas de suas soluções (MALAJOVICH, 1988). Inicialmente consideraram-se sistemas lineares de 1ª ordem e a seguir estudaram-se os sistemas quase-lineares. Os sistemas não lineares requerem uma análise cuidadosa e os resultados principais farão parte de um trabalho em separado (GUIDORIZZI, 1997).

RESULTADOS BÁSICOS

Para responder as três questões anteriores necessitam-se de algumas definições básicas (BOYCE & DI PRIMA, 1994):

Definição1: Um ponto x^0 é um ponto de equilíbrio de (1) se, e somente se,

$$f(t,x^0) \equiv 0$$

Considera-se, inicialmente, a questão da estabilidade de sistemas autônomos, isto é, quando f não depende explicitamente de t, ou seja, quando f é uma função somente de x.

Seja x = j(t) uma solução da equação diferencial

x = f(x) . (2)

Quer-se determinar se j(t) é estável ou instável.

Definição 2: A solução x = j(t) de (2) é estável se toda solução y(t) de (2), que começa suficientemente próximo de j(t) em t=0, permanece próximo de j(t) para todo tempo.

Definição 3: A solução j(t) é instável se existe pelo menos uma solução y(t) de (2) que começa próximo a j(t) em t = 0 mas não permanece próximo a j(t) para todo tempo futuro.

Formalmente, a solução j(t) é estável se para todo x>0 existe d = d(x) tal que

$$\left|\psi_j(t)-\varphi_j(t)\right| < \xi \text{ se } \left|\psi_j(0)-\varphi_j(0)\right| < \delta \text{, j = 1,2,...}$$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM

A questão da estabilidade pode ser completamente resolvida para sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem da forma

x = Ax (3)

onde A é uma matriz $n \times n$.

Teorema 1:

a) A solução de (3) é estável se todos os autovalores de A têm parte real negativa.

b) A solução de (3) é instável se ao menos um valor de A tem parte real positiva.

c) Suponha que todos os autovalores de A tenham parte real ≤ 0 e $\lambda_1 = i\sigma_1,\ldots,\lambda_k = i\sigma_k$ tem parte real zero. Seja $\lambda_j = i\sigma_j$ de multiplicidade l_j.

Então, toda solução $x = \varphi(t)$ de (3) é estável se A tem l_j autovetores linearmente independentes para cada autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$. De outro modo, a solução $\varphi(t)$ é instável.

Demonstração (SIROVICH, 1980):

a)Toda solução $x = \psi(t)$ de A é da forma $\psi(t) = e^{At}\psi(0)$. Seja $e^{At} = \left(\varphi_{ij}(t)\right)$, i, j = 1,2, ... ,n e seja $\psi_1^0,\ldots,\psi_n^0$ as componentes do vetor $\psi(0)$.

Então, a i-ésima componente de y(t) é

$$\psi_j(t) = \varphi_{i1}(t)\psi_1^0 + ... + \varphi_{in}(t)\psi_n^0 = \sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(t)\psi_j(0) \ .$$

Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, então

$$|\psi_i(t)| = \left|\sum_{j=1}^{n} e^{-\alpha t}\psi_j(0)\right| \le \sum_{j=1}^{n} ke^{-\alpha t}|\psi_j(0)| = ke^{-\alpha t}\sum_{j=1}^{n}|\psi_j(0)|$$

para alguma constante k>0 e α.

Portanto, $\|\psi(t)\| = \max\{|\psi_1(t)|, ..., |\psi_n(t)|\} \le nke^{-\alpha t}\|\psi(0)\|$.

Dado $\xi > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\xi}{nk}$. Daí tem-se

$$\|\psi(t)\| \le nke^{-\alpha t}\|\psi(0)\| < \frac{nk\xi}{nk} = \xi \ \text{ se } \|\psi(0)\| < \delta \ .$$

Consequentemente, a solução de equilíbrio $x(t) \equiv 0$ é estável.

b)Seja λ um autovalor de A com parte real positiva e v um autovalor de A associado a λ.

Então $\psi(t) = ce^{\lambda t}v$ é uma solução de (3) para qualquer constante positiva. Logo $\|\psi(t)\| = |c|e^{\lambda t}\|v\|$ e $\psi(t) \longrightarrow \infty$ quando $t \longrightarrow +\infty$.

Assim, a solução é instável.

Se $\lambda = \alpha + i\beta$ então de modo análogo $\psi(t)$ é instável.

c)Se A tem l_j autovetores linearmente independentes e $\lambda_j = i\sigma_j$ de multiplicidade l_j então podemos encontrar uma constante c>0 tal que $\left|\left(e^{At}\right)_{ij}\right| \le k$ e $\|\psi(t)\| \le nc\|\psi(0)\|$ para toda solução $\psi(t)$de (3). Segue que $\psi(t)$ é estável.

Se A tem número menor do que l_j de autovetores linearmente independentes com autovalor $\lambda_j = i\sigma_j$, então

$$\psi(t) = ce^{i\sigma_j t}\left[v + t(a - i\sigma_j I)v\right] \text{ onde } (A - i\sigma_j I)v \ne 0.$$

Tem-se que $\|\psi(t)\|$ é ilimitada quando $t \longrightarrow \infty$. Logo a solução é instável.

Observação: Se todos os autovalores de A tem parte real negativa, então toda solução x(t) de (3) aproxima-se de zero quando $t \longrightarrow \infty$. Isto segue da estimativa $\|x(t)\| \le ke^{-\alpha t}\|x(0)\|$.

Portanto, a solução $\psi(t)$ é estável e além disso $\psi(t) \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$.

Este tipo de estabilidade é conhecido como estabilidade assintótica.

Definição 4: Uma solução $x = \varphi(t)$ de (1) é assintoticamente estável se é estável e se toda solução $\psi(t)$ a qual começa suficientemente próxima de $\varphi(t)$ aproxima-se de zero quando $t \to \infty$.

Ilustra-se o Teorema 1 com alguns exemplos. Para isso vamos toma-se a matriz A como uma matriz 2×2. Com o auxílio do software Diagrama de Fase pode-se, então, fazer um estudo mais completo do plano de fase de cada sistema de equações diferenciais lineares e observar a configuração de suas soluções através de algumas delas plotadas a partir de pontos iniciais aleatórios.

Exemplo 1(Figura 1): Seja $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$

O ponto crítico é $x(t) \equiv 0$. Tem-se que os autovetores da matriz dos coeficientes são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Ambos têm parte real negativa logo, segundo o teorema, o ponto crítico é assintoticamente estável.

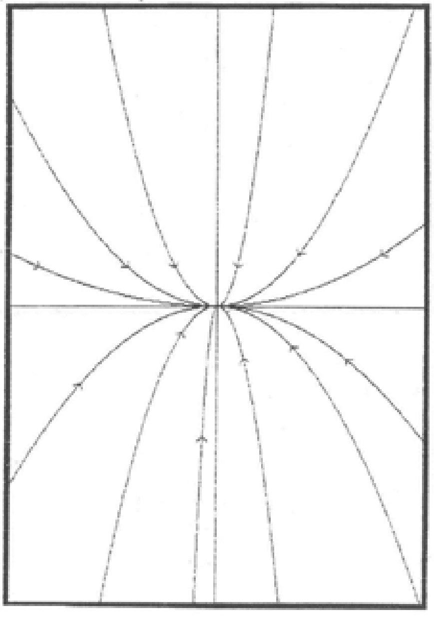

Figura 1 - Exemplo 1

Exemplo 2(Figura 2): O sistema $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$

onde $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ são os autovalores de A então, segundo o teorema, o ponto crítico $x(t) \equiv 0$ instável.

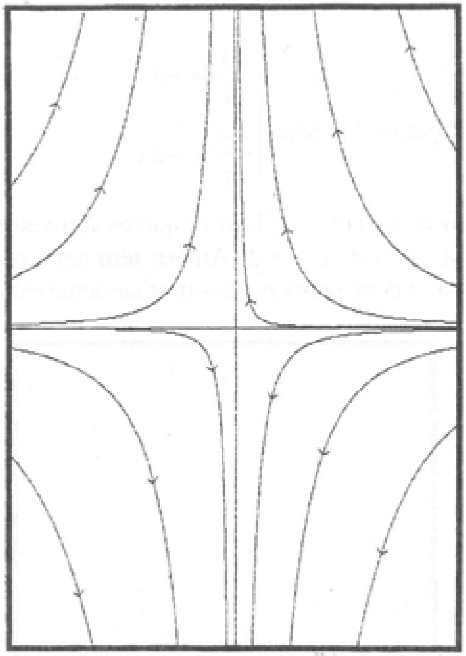

Figura 2 - Exemplo 2

Exemplo 3(Figura 3): Para $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$

temos que $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$, portanto o ponto crítico $x(t) \equiv 0$ é estável.

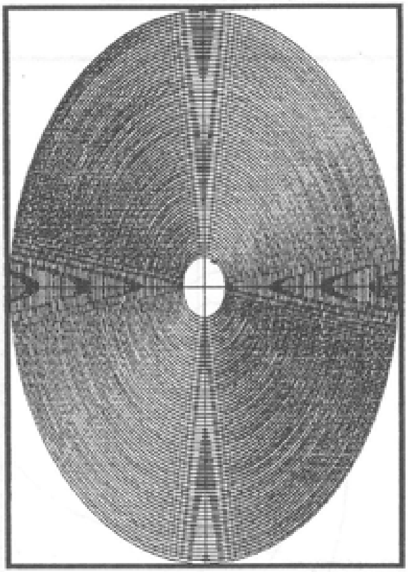

Figura 3 - Exemplo 3

Exemplo 4: Seja $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.5x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 0.5y \end{cases}$

Neste caso $\lambda_1 = -0.5 + i$ e $\lambda_2 = -0.5 - i$ o que indica que o ponto crítico $x(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável.

ESTABILIDADE DE SISTEMAS QUASE - LINEARES

Considerando o sistema

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(x). \tag{4}$$

se g é uma função contínua, com $g(0) = 0$ e $\dfrac{g(x)}{\|x\|} \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow 0$ então o sistema (4) é um sistema quase-linear.

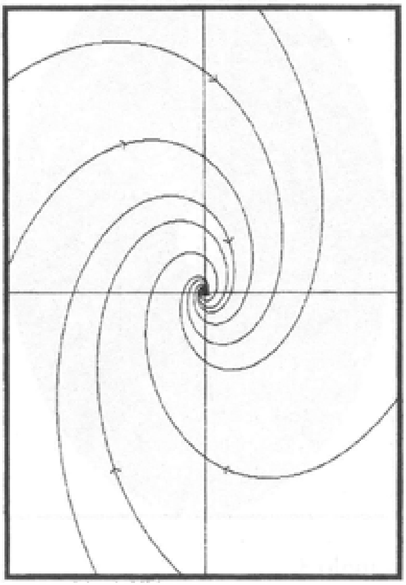

Figura 4 - Exemplo 4

Sistemas quase-lineares são sistemas cuja parte não linear é pequena em relação a parte linear. Portanto, é razoável esperar que, próximo a origem, as trajetórias das soluções do sistema quase-linear sejam boas aproximações das soluções do sistema linear.

A estabilidade das soluções dos sistemas quase-lineares está descrita no seguinte teorema:

Teorema 2:

a)A solução de equilíbrio $x(t) \equiv 0$ de (4) é assintoticamente estável se o ponto de equilíbrio do sistema linearizado é assintoticamente estável. Equivalentemente isto significa que os autovalores de A têm parte real negativa.

b)O ponto de equilíbrio $x(t) \equiv 0$ é instável se ao menos um autovalor de A tem parte real positiva.

c)Nada se pode concluir se todos os autovalores de A têm parte real ≤ 0 mas ao menos um autovalor de A tem parte real nula.

Demonstração: Ver BRAUN (1976).

Ilustram-se os resultados do teorema acima através de alguns exemplos. Usaremos novamente o software Diagramas de Fase para visualização das trajetórias do sistema.

Exemplo 1(Figura 5): Seja $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + x - x(x^2 + y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$

Pode-se escrever o sistema na forma

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dx}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

ou

dx/dt = Ax + g(x).

Os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$. Logo, de acordo com o teorema 2, a solução $x(t) \equiv 0$ é instável.

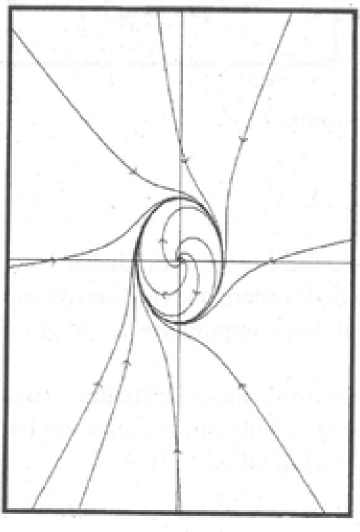

Figura 5 - Exemplo 1

Exemplo 2(Figura 6): Seja $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + xy \\ \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y - xy \end{cases}$

Tem-se que os autovalores da matriz dos coeficientes da parte linear do sistema são $\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}$ e $\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}$ com parte real negativa. Logo, o ponto crítico $x(t) \equiv 0$ é assintoticamente estável.

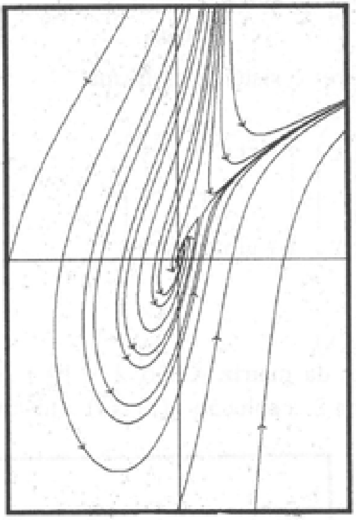

Figura 6 - Exemplo 2

CONCLUSÕES

Neste trabalho estuda-se a estabilidade e instabilidade de sistemas de equações diferenciais de 1ª ordem que são lineares e quase-lineares utilizando, paralelamente, aplicativos computacionais de grande valor para ilustração dos resultados.

Salienta-se que é utilizado no trabalho o software Diagrama de Fase por ser de uso bastante simples mas outros podem ser usados como por exemplo o MAPLE e MATHEMÁTICA.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, William E.; DI PRIMA, Richard C.; 1994. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**.5.ed. Rio de Janeiro: Editora Livros Técnicos e Científicos.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz; 1997. **Um curso de cálculo**. 2.ed. v. 4. Rio de Janeiro. Editora: Livros Técnicos e Científicos.

SIROVICH, L. 1980 **Tecniques of Asymptotic analysis,** Springuer-Verlag,.

BRAUN, M. 1976 **Differential equations and their applications,** Spriguer-Verlag,.

MALAJOVICH, Gregório, 1988 **Diagrama de fase**, Departamento de matemática aplicada. UFRJ.