FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E SUA RELAÇÃO COM AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS[1]

TRIGONOMETRIC FUNCTIONS AND ITS RELATION WITH ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Sônia Suzana Farias Weber[2]
Vanilde Bisognin[3]

RESUMO

As funções trigonométricas possuem grandes aplicações tanto no campo da Matemática, como na astronomia, nas ciências econômicas, nas ciências geográficas, nas ciências agronômicas, na aviação e navegação. Neste trabalho teve-se como objetivo fazer um estudo das funções trigonométricas, seno e cosseno e de suas propriedades. Os resultados principais do trabalho, estão relacionados com o estudo das funções trigonométricas, definindo-as através de problemas de valores iniciais associados a determinadas equações diferenciais ordinárias.

Palavras-Chave: Função trigonométrica, equações diferenciais ordinárias, existência e unicidade de soluções.

ABSTRACT

Trigonometric functions have important applications in different areas: in astronomy, in economic sciences, in agronomic sciences, in aviation and sailing. The aim of the work is to study the trigonometric functions and its properties using ordinary differential equations theory. The main results of the work are related to the study of trigonometric functions, being the functions defined through the initial problems associated to specific ordinary differential equations.

Key Words: Trigonometric function, ordinary diffential equations, existence and unicity of solutions.

INTRODUÇÃO

A trigonometria, conforme CARMO et al. (1993) e IEZZI (1973), foi uma criação da Matemática grega. Ela surgiu devido às necessidades da

---

[1] Trabalho Final de Graduação.
[2] Aluna do Curso de Matemática - UNIFRA.
[3] Orientadora.

astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo e para ser utilizada na navegação e na geografia. Assim, os estudos de trigonometria se concentravam na trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, ou seja, triângulos sobre a superfície de uma esfera. Para isso foi necessário desenvolver partes da trigonometria plana.

O estudo dos triângulos esféricos na Matemática grega vinha sendo feito desde os últimos pitagóricos. Contudo, podemos dizer que Hiparco da Niceia foi o fundador da trigonometria. É provável que a divisão do círculo em 360º tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco, o qual foi o primeiro a determinar o nascer e o ocaso de várias estrelas, usando a tabela de cordas(seno) por ele calculada. Suas tabelas foram construídas para serem usadas na astronomia.

Um pouco depois de Hiparco, Menelao de Alexandria, que viveu em torno de 100 a.C. já apresenta uma trigonometria bem desenvolvida, demostrando vários teoremas sobre triângulos esféricos.

A trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, que viveu em torno de 150 d.c. Ptolomeu desenvolveu a trigonometria em seu livro "Almagesto", deduziu o que em notação moderna usando as funções seno e cosseno é a expressão para sen(a + b). Demonstrou também que $sen^2\, a + cos^2\, a = 1$, onde a é um ângulo agudo, capaz de resolver qualquer triângulo, decompondo-o em triângulos retângulos.

No século V, os astrônomos hindus abandonaram as tabelas e passaram a adotar o seno. Os árabes adotando o ponto de vista aritmético dos hindus, introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante, sendo também responsáveis pela palavra seno, que em latim significa "bolsa".

Com o desenvolvimento da navegação, tornaram-se necessários mapas mais precisos e cálculos exatos para permitir a determinação da hora e localização, durante as navegações.

Pouco a pouco, as funções Trigonométricas passaram a aparecer freqüentemente na Matemática, paralelas ao uso de tabelas, para aplicações em Topografia, Navegação e Astronomia. Já no século XVIII e XIX, tornaram-se essenciais para a resolução na Matemática e Física. A introdução das "Séries de Fourier" mostrou a necessidade das Funções na Análise Matemática e em muitas de suas aplicações.

Neste trabalho, apresenta-se uma nova forma de estudo das funções trigonométricas associando-as a resolução de equações diferenciais ordinárias, conforme pode ser encontrado em LAX et al. (1976). Estudam-se as funções básicas da trigonometria definindo-as através de problemas de valores iniciais, associados a determinadas equações diferenciais.

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Apresenta-se a seguir as principais funções trigonométricas, seno e cosseno, a partir da derivada das mesmas. Usando as identidades trigonométricas, mostra-se que as propriedades do seno e cosseno estão contidas nas equações diferenciais ordinárias, e podem assim serem estudadas a partir de problemas de valores iniciais.

Considere-se as funções s e c de classe C^1 e que satisfazem os seguintes problemas de valores iniciais:

$$c' = -s, \qquad s' = c, \qquad (1)$$
$$c(0) = 1 \qquad s(0) = 0.$$

Inicia-se por deduzir a propriedade:

$$c^2 + s^2 = 1. \qquad (2)$$

Derivando (2) obtem-se:

$$(c^2 + s^2)' = 2cc' + 2ss' = 2c(-s) + 2sc = 0.$$

Uma função de classe C^1 cuja derivada é nula é constante, isto é, $c^2 + s^2 = k$ onde k é uma constante.

Para determinar o valor de k, usa-se as condições iniciais (2) e tem-se:

$$c^2(0) + s^2(0) = 1^2 + 0^2 = 1 = k.$$

Isto completa a demonstração.

A pergunta natural que surge é: as funções c e s ficam univocamente determinadas pela equação diferencial (1) e os valores iniciais?

Para provar esta propriedade, supõe-se que haja dois conjuntos de soluções c1 e s1, bem como c2 e s2, que satisfaçam o problema de valor inicial (1), isto é:

$$c'1 = -s1, \qquad s'1 = c1, \qquad (3)$$
$$c'2 = -s2, \qquad s'2 = c2,$$

e os valores iniciais:

$$c1(0) = 1 = c2(0), \qquad (4)$$
$$s1(0) = 0 = s2(0).$$

Deve-se provar que c1 = c2 e s1 = s2. Demonstra-se este fato de dois modos distintos.

Subtraindo as equações em (3), obtem-se:

$$(c1 - c2)' = -(s1 - s2) \qquad (5)$$
$$(s1 - s2)' = c1 - c2.$$

Utilizando-se a notação:

$$c1 - c2 = c,$$
$$s1 - s2 = s,$$

as equações (5) são escritas na forma:

$c' = -s,$

$s' = c.$

Os valores iniciais são escritos como:

$c(0) = c_1(0) - c_2(0) = 0$

e

$s(0) = s_1(0) - s_2(0) = 0$

portanto

$c^2(0) + s^2(0) = 0$

e conseqüentemente,

$c^2 + s^2 = 0$

para todos os valores reais. Mas, isto é possível somente se c e s forem ambos iguais a zero, isto é,

$c = 0$ e $s = 0.$

Assim conclui-se que $c_1 = c_2$ e $s_1 = s_2$, e isto completa a demonstração.

Um segundo modo de demonstrar este fato é o seguinte. Seja a um número real qualquer, e considerando a função:

$$c_1(x)\, s_2(a - x) + s_1(x)\, c_2(a - x). \tag{6}$$

derivando (6) em relação a x obtem-se:

$$c'_1(x)\, s_2(a-x) - c_1(x)\, s'_2(a-x) + s'_1(x)\, c_2(a-x) - s_1(x)\, c'_2(a-x). \tag{7}$$

Usando (1) obtem-se:

$$-s_1(x)\, s_2(a-x) - c_1(x)\, c_2(a-x) + c_1(x)\, c_2(a-x) + s_1(x)\, s_2(a-x) = 0.$$

Logo a função em (6) é uma constante. Em particular, seus valores em $x = 0$ e $x = a$ são os mesmos, isto é,

$$c_1(0)\, s_2(a) + s_1(0)\, c_2(a) = c_1(a)\, s_2(0) + s_1(a)\, c_2(0)$$

ou seja:

$$s_2(a) = s_1(a).$$

Como a é um número escolhido arbitrariamente, segue que as funções s_1 e s_2 são idênticas, assim como c_1 e c_2 o que mostra a unicidade das funções s e c.

Considera-se agora a função em (6):

$$c(x)\, s(a - x) + s(x)\, c(a - x), \tag{8}$$

onde retira-se os subscritos.

A função em (8) é uma constante e seu valor em $x = 0$ é $s(a)$. Assim, para todo x,

$$c(x)\, s(a - x) + s(x)\, c(a - x) = s(a).$$

Fazendo $a - x = \delta$ tem-se $a = x + \delta$. Com esta notação tem-se:

$$s(x + \delta) = c(x)\, s(\delta) + s(x)\, c(\delta). \tag{9}$$

Esta função corresponde ao seno da soma de dois arcos. Para deduzir a equação do cosseno da soma de dois arcos, basta derivar (8) em relação a x e usar as equações em (1). Obtem-se:

$$c(x + \delta) = c(x)\, c(\delta) - s(x)\, s(\delta). \tag{10}$$

Assim, consegue-se deduzir as equações funcionais do seno e do cosseno, a partir das equações diferenciais que eles satisfazem .

A partir das equações definidas em (1), pode-se deduzir a forma dos gráficos destas funções, Figura 1. A ferramenta básica para isto, é a análise das regiões de crescimento e decrescimento, dos pontos de máximo e mínimo e dos pontos de inflexão das funções c e s.

De (1) deduz-se que a função seno satisfaz em $x = 0$, $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$. ou seja, o gráfico de $s(x)$ começa na origem e aumenta para valores positivos de x. Tem-se que $s(x)$ é positiva para x pequeno e positivo.

Como $c' = - s$ segue que $c(x)$ é uma função decrescente, para x pequeno e positivo , além disso $c(0) = 1$.

De $s' = c$ deduz-se que $s(x)$ continuará aumentando enquanto $c(x)$ for positivo e de $c' = - s$, $c(x)$ diminuirá enquanto $s(x)$ continuar aumentando, passando pelo zero e assumindo valores negativos. Mas nesse ponto, $s' = c$ implica que s para de crescer, fazendo uma inflexão e tornando-se uma função decrescente de x. Designa-se por t o valor de x, em que s passa de crescente para decrescente. Este é também o ponto em que $c(t) = 0$. Do fato de $c^2 + s^2 = 1$, nota-se que $s(t) = 1$.

O mesmo tipo de argumento mostra que em $x = t$ as funções s e c decrescem ambas até que $s(x)$ chega a zero. Neste ponto, $c(x)$ atinge o valor -1. Além desse ponto, $c(x)$ começa a crescer e $s(x)$ se mantém decrescente até que $c(x)$ chegue a zero, quando então $s(x)$ faz uma inflexão e começa a crescer até atingir zero e simultaneamente $c(x)$ atinge o valor 1.

No ponto, $x = p$ em que $s(p) = 0$ e $c(p) = 1$, estas funções voltam a assumir os valores que tinham inicialmente. Daí em diante o processo se repete.

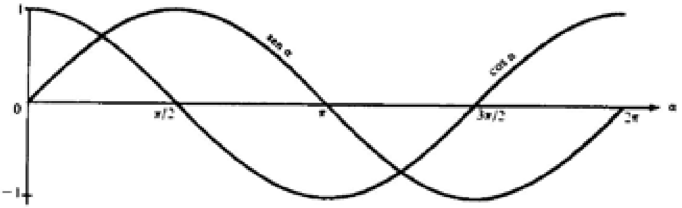

Figura 1 - Representação gráfica das funções seno e cosseno (LAX, et al., 1979)

A função s é monótona crescente entre $-\pi/2$ e $\pi/2$. Assim, no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, s tem uma inversa, a qual denotar-se-á por a(y):

$s(x) = y$, $a(y) = x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

De acordo com a regra de derivação de função inversa, tem-se:

$$a'(y) = \frac{1}{s'(x)},\ x = a(y).$$

Por (1), $s'(x) = c(x)$ e de acordo com (2) tem-se:

$$c(x) = \sqrt{1 - s^2(x)}$$

para valores positivos da raiz quadrada, visto que o cosseno é positivo em $[-\pi/2, \pi/2]$. Portanto:

$$a'(y) = \frac{1}{c(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

logo:

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arcsen} y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Do Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se:

$$\text{aresen } y = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz, -1 < y < 1$$

daí,

$$s'(x) = \frac{1}{a'(y)} = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - s^2(x)} = c(x).$$

Também, derivando

$$c(x) = \sqrt{1 - s^2(x)}$$

segue que: $c'(x) = \dfrac{-2ss'}{2\sqrt{1 - s^2}} = -s$,

que são as equações diferenciais (1).

O Teorema Fundamental do Cálculo assegura que existe uma função a(y) cuja derivada é $\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$. Isto prova que o par de equações diferenciais ordinárias definidas em (1) possui, de fato, uma solução.

CONCLUSÕES

É possível deduzir os principais resultados das funções trigonométricas seno e cosseno, via o estudo de sistema de equações diferenciais ordinárias. As demais funções trigonométricas podem ser obtidas a partir das funções aqui estudadas. A partir do Teorema Fundamental do Cálculo também é possível mostrar a existência de soluções de (1).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. 1993.**Trigonometria: números complexos.** IMPA / VITAE. Rio de Janeiro: SBM.

IEZZI, Gelson. 1973. **Fundamentos de matemática elementar: trigonometria**. 7 ed. São Paulo: Moderna.

_____ 1993. **Fundamentos de matemática elementar: trigonometria.** 7 ed. São Paulo: Atual.v. 3.

LAX, Peter; BURSTEIN, Samuel; LAX, Anatoll. 1976. **Cálculo – aplicações e programação.** Rio de Janeiro: Guanabara Dois. v. 1.