QUESTÕES RELACIONADAS A CERTAS SÉRIES [1]

QUESTIONS RELATED TO CERTAIN SERIES

Ana Maria Coden Silva[2]
Alcibíades Gazzoni[3]

RESUMO

Neste artigo fêz-se uma apresentação simples da série infinita $\sum 1/n^2$, mostrando como se chegou a soma dessa série usando métodos puramente algébricos, como foi feito por Euler, e através de séries de Fourier. Foram feitas ainda considerações sobre alguns procedimentos para se obter a soma de séries, quando esta existe, ou constatar que para certas séries não existe soma, como é o caso da série harmônica ($\sum 1/n$), pois mesmo somando um grande número de termos, com o auxílio do computador, não se consegue verificar sua divergência.

Palavras-Chave: séries infinitas, divergência, convergência, soma.

ABSTRACT

In this article, a plain presentation of the infinite series $\sum 1/n^2$ was done, demonstrating how we have arrived to the sum of this series, by using purely algebraic methods, as it was done by Euler and also by the Fourier series. Some considerations were done about procedures to obtain the sum of the series, when this exists, or to observe that for certain series there was no sum, as in the case of the harmonic series ($\sum 1/n$), because even when we sum a great number of terms, with the computer help, it is not possible to observe its divergence.

Key Words: infinite series, divergence, convergence, sum.

INTRODUÇÃO

As séries infinitas receberam muita atenção a partir da segunda metade do séc. XVII e disso resultou um grande número de descobertas. Entretanto, mesmo os maiores matemáticos não tinham noções claras sobre a questão

[1] Trabalho de Iniciação Científica.
[2] Aluna do Curso de Matemática - UNIFRA. Bolsista FAPERGS.
[3] Orientador.

da convergência, ou seja, não conheciam com rigor as circunstâncias em que uma adição de infinitos termos daria ou não uma soma finita. Esta matéria somente foi completamente esclarecida no séc. XIX, por Cauchy que, ao fazê-lo, demonstrou que até gênios como Newton e Euler haviam tratado do assunto com muito descuido.

Em 1673, Oldenberg, através de uma carta, consultou Leibniz sobre a soma da série

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots. \tag{1}$$

Esta série parecia convergir rapidamente para 1,64493, mas este número não dava a idéia de ter qualquer relação com outros conhecidos.

Euler conseguiu descobrir o significado dessa adição de infinitas parcelas. Apoiou-se, para isso, na teoria das equações algébricas que, a primeira vista, ninguém poderia imaginar que os temas tivessem qualquer correlação.

Nesse artigo, procurou-se mostrar como encontrar a soma da série (1) de formas diferentes e, a seguir, realizou-se considerações a cerca das séries divergentes, exemplificando com o estudo da série harmônica.

SÉRIE $\sum 1/n^2$

A série $\sum 1/n^2$ é convergente. Para isso necessita-se verificar que a série é crescente e limitada.

De fato, quaisquer que sejam os números naturais m e n, com $1 \leq m < n$, tem-se:

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} \qquad \text{e} \qquad S_n=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Como $\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}>0$, resulta $S_n > S_m$.

Agora, mostra-se que a série dada é limitada superiormente.

Tem-se:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq 1+\int_1^n\frac{1}{x^2}.$$

Mas a seqüência $n \rightarrow \int_1^n \frac{1}{x^2}dx$ é crescente e o $\lim_{n\rightarrow\infty}\int_1^n\frac{1}{x^2}dx = 1$.

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Portanto, a série dada é crescente e limitada superiormente, o que permite concluir que é convergente.

Sabe-se que se uma série é convergente então ela possui uma soma. Mas qual será a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

Para responder a essa questão pode-se ver que não existe uma única maneira de fazê-lo. Por exemplo, pode-se obter tal soma pelo método de Euler ou através da série de Fourier.

SOMA DA SÉRIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Inicialmente estudou-se como Euler, pela primeira vez, apoiado na teoria das equações algébricas, obteve essa soma.

Segundo GABBI (1997), Euler já conhecia as séries de potências. Em particular sabia que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \tag{2}$$

Euler, concluiu que sendo 0, $\pm \pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, ... as raízes da equação sen x = 0, a equação de grau infinito ou o "polinômio infinito"

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = 0$$

tem as mesmas raízes e, pode-se escrever o produto:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= Ax(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\cdots \\ &= Ax(x^2-\pi^2)(x^2-2^2\pi^2)\cdots \end{aligned}$$

ou seja,

$\operatorname{sen} x = Bx\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots$, onde B é um valor a ser

Efetuando-se as multiplicações indicadas e igualando-se os coeficientes das mesmas potências de x, com o desenvolvimento de sen x em série, resulta:

$$B = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right).$$

Logo, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$. (3)

Euler, sem empregar produtos infinitos, deu outra solução para a questão acima.

Desembaraçando a equação (2) da raiz x = 0 ela se torna

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \frac{x^{10}}{11!} + \cdots = 0.$$

Fazendo-se $y = x^2$ tem-se:

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \frac{y^4}{9!} - \frac{y^5}{11!} + \cdots = 0.$$

As raízes dessa equação são π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, $(4\pi)^2$... Daí, usando o fato de que a soma dos inversos das raízes de uma equação algébrica de grau n é o negativo da relação entre o coeficiente do termo de 1° grau a_{n-1} e o termo independente a_n e, indicando-se tais raízes por $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tem-se:

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \cdots\right).$$

Logo, aplicando-se esse resultado, na equação anterior, tem-se:

$$\frac{1}{3!} = \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \frac{1}{(4\pi)^2} + \cdots + \frac{1}{(n\pi)^2} + \cdots\right),$$

donde resulta (3).

Deve-se observar que os procedimentos de Euler não satisfazem o rigor matemático dos nossos dias; existe uma clara diferença entre polinômios, equações de grau infinito e séries infinitas, de modo que propriedades verificadas para os polinômios não são válidas, necessariamente, para séries.

Conforme ÁVILA (1986), uma outra maneira de se obter a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é recorrer às séries de Fourier. Ou seja, com as técnicas do Cálculo e usando Análise chega-se a soma dessa série sem recorrer à equação de grau infinito.

A série de Fourier para a função f(x) = | x |, $0 \leq x < \pi$ é,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}. \tag{4}$$

Da Análise Matemática sabe-se que esta série converge uniformemente para todo x real. Daí, após passar ao limite, com $x \to \pi$, a expressão (4) toma a forma:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, \text{ donde se obtém}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{5}$$

Mas $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$

Agora, observando-se que, se $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$ então,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}. \tag{6}$$

Daí de (5) e (6) concluí-se que $S = \pi^2/6$, ou seja,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

que é o resultado desejado.

O que se viu acima mostra que o modo de se obter a soma da série em questão não é único e pode não ser fácil expressá-la. Em outros exemplos tal tarefa pode ser trabalhosa e mesmo assim obter-se valores aproximados de tais somas, ou seja, ser impossível de determiná-las com precisão.

Em contrapartida, nem sempre é possível verificar, através da soma de um número suficientemente grande de termos, que uma série é divergente. E para verificar esse fato fêz-se uma análise do que ocorre com a série harmônica.

SÉRIE HARMÔNICA $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Uma característica importante dessa série é que o termo geral tende a zero, isto é,

$a_n = 1/n \to 0$.

Numa primeira análise tem-se a impressão que a série harmônica deva ser convergente, e não divergente, afinal, os termos da série estão decrescendo para zero, de tal forma que se constata pouco crescimento nas somas parciais.

Assim, quando se tem somado, por exemplo, $n = 10^{30}$ termos, está-se somando tão pouco que se é inclinado a dizer que existe um número real que representa a soma dessa série.

A demonstração da divergência dessa série foi feita pela primeira vez por Oresme aonde se vê a importância do raciocínio lógico pois, mesmo com o uso do computador não se teria indícios de que a série seria divergente.

No entanto, existem métodos que permitem obter uma aproximação para a soma parcial S_n , dos n primeiros termos, através da Fórmula de Euler-MacLaurin.

Segundo ÁVILA (1995), essa fórmula permite substituir a soma parcial da série $\sum_1^n f(n)$ pela integral $\int_1^n f(x)dx$, que é uma expressão equivalente.

Considera-se f(x) como uma função definida no semi-eixo real positivo e suficientemente regular para que as operações indicadas possam ser efetuadas. Assim, indicando-se com f_j o valor f(j) e integrando-se por partes, tem-se:

$$\int_j^{j+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \int_j^{j+1}(x - j - 1/2)f'(x)dx.$$

Efetuando-se a soma para j = 1, 2, 3, ... , n – 1, o termo j f'(x) do integrando muda conforme j muda de valor. Para contornar esse inconveniente substitui-se esse j por [x]. Então introduzindo-se a função

$P_1(x) = (x - [x] - ½)$

e efetuando-se a soma, obtém-se:

$$\sum_1^n f(n) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f_1 - f_n) + \int_1^n P_1(x)f'(x)dx. \qquad (7)$$

Essa é a primeira versão da Fórmula de Euler-MacLaurin, que se vai aplicar ao caso da série harmônica.

Substituindo-se f(x) = 1/x em (7), a reduzida da série harmônica passa a ser

$$S_n = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{P_1(x)}{x^2}dx. \qquad (8)$$

A seqüência S_n – log n tem limite com $n \to \infty$, e esse limite é denominado constante de Euler-Mascheroni, e é denotado por γ ;

$$\gamma = \frac{1}{2} - \int_1^{\infty} \frac{P_1(x)}{x^2} dx - \int_n^{\infty} \frac{P_1(x)}{x^2} dx.$$

O valor numérico aproximado de γ é 0.57721.

Introduzindo-se a constante γ na expressão (8), e aplicando-se o Segundo Teorema da Média para Integrais, obtém-se:

$$S_n = \log n + \frac{1}{2n} + \gamma + \frac{1}{n^2} \int_n^c P_1(x)dx, \tag{9}$$

onde c é uma constante conveniente.

Essa fórmula permite determinar o menor valor de n para o qual a soma parcial S_n atinja um certo valor fixado A, isto é, dado o número A, precisa-se determinar n tal que

$S_n \geq A$ e $S_{n-1} < A$.

Como a função $P_1(x)$ é periódica de período 1 e é dada por $P_1(x) = x - ½$, no intervalo $0 \leq x < 1$, é fácil ver que

$$-\frac{1}{8} < \int_n^c P_1(x)dx < 0. \tag{10}$$

De (9) e (10) obtém-se:

$$\log n + \frac{1}{2n} + \gamma > S_n > \log n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2}.$$

Substituindo-se n por n – 1 em (10), vê-se que $S_n > A$ e $S_{n-1} < A$, se

$$\log n > \log e^{A-\gamma} - \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{4n}\right)$$

e

$$\log(n-1) < \log e^{A-\gamma} - \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$

Essas desigualdades dão critérios para a determinação de n em termos de A e γ e com um exame superficial dessas desigualdades pode-se constatar que n está próximo de $e^{A-\gamma}$.

<u>Exemplo:</u>

Quantos termos somar para que S_n atinja o valor 20?

$n = e^{A-\gamma} = e^{20-0.57721} = 272.402.000$.

Portanto, somando-se 272.402.000 termos, obtém-se soma aproximadamente igual a 20. Daí, pode-se concluir que no caso da série harmônica, mesmo com o auxílio do computador mais veloz que se possa imaginar, somando termos muito rapidamente, não se obtém informações que permitem concluir sobre a sua divergência.

CONCLUSÕES

O problema de determinar se uma série possui soma ou não despertou interesse dos matemáticos desde antigamente. Mesmo antes de se saber, com clareza, as condições que permitem concluir sobre a convergência ou não das séries, a sua soma foi calculada. Resultados interessantes de Análise foram estabelecidos, a partir do séc. XIX, e o aspecto formal e rigoroso para a convergência das séries foi satisfeito. Em contrapartida, este trabalho serviu para mostrar que, mesmo com os computadores de hoje, não é possível constatar que certas séries são divergentes e, assim, concluir sobre a importância do raciocínio lógico na solução de certas questões em matemática, como o que é usado para mostrar a divergência da série harmônica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

ÁVILA, Geraldo. 1995. A série harmônica e a fórmula de Euler MacLaurin. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, nº 19, p. 55-63.

ÁVILA, Geraldo. 1986. Sobre as somas de certas séries infinitas. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, nº 3, p. 51-60.

GABBI, Gilberto G. 1997. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Makron Books.