POLIEDROS CONVEXOS E O TEOREMA DE EULER[1]

CONVEX POLYHEDRON AND THE EULER THEOREM

Raquel Martinizzi Buriol[2]
Eleni Bisognin[3]

RESUMO

Neste trabalho estuda-se o Teorema de Euler para poliedros convexos. São analisados alguns exemplos para os quais este resultado é valido e alguns casos em que este teorema não é verdadeiro. Apresentam-se duas demonstrações do Teorema de Euler para poliedros convexos tendo como idéia básica a soma dos ângulos internos do poliedro.

Palavras-Chave: Poliedros convexos, Teorema de Euler, triângulos esféricos.

ABSTRACT

In this work the Euler theorem for convex "Polyhedron" is studied. Some examples are analysed for which this result is valid and some cases where it is not true. Two demontrations of the Euler theorem for convex "Polyhedron" are showed having as a basic idea the addition of the internal angles of the "Polyedron".

Key Words: Convex polyhedron, Euler Theorem, spherical triangle.

INTRODUÇÃO

Sabe-se que se um poliedro é convexo então ele satisfaz a relação de Euler V-A+F=2 onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces. Este resultado, descoberto em 1758 teve uma demonstração realizada por Cauchy em 1813 (LIMA, 1985_b). Embora considerada primitiva e incompleta é a primeira demonstração do Teorema de Euler, cujas idéias são utilizadas até nossos dias. Mais tarde, outras demonstrações do Teorema de Euler surgiram, uma delas em 1846 realizada por A.M.Legendre, o qual utilizou as noções e propriedades básicas da geometria esférica. Embora mais elegante e

[1] Trabalho de Iniciação Científica.
[2] Aluna do Curso de Matemática - UNIFRA. Bolsista FAPERGS.
[3] Orientadora

rigorosa, Legendre utilizou na sua demonstração as mesmas relações obtidas por Cauchy para poliedros convexos.

O objetivo deste trabalho foi analizar o Teorema de Euler para poliedros convexos, utilizando-se as relações básicas fundamentais da Geometria Euclidiana e da Geometria Esférica (LIMA, 1985b).

DESENVOLVIMENTO

Uma questão importante que se põe é a seguinte: para que classe de poliedros o Teorema de Euler é válido?

Esta foi uma questão polêmica por quase um século e só foi resolvida por Poincaré em 1893.

Poincaré foi o primeiro matemático a analisar o Teorema de Euler sob a ótica da topologia ao notar que o número V-A+F é um invariante topológico, isto é, Poincaré observou que se o poliedro P com V vértices, A arestas e F faces é homeomorfo ao poliedro P' com V' vértices, A' arestas e F' faces a relação V-A+F=V'-A'+F' continua verdadeira. Devido a esta contribuição, a relação V-A+F é denominada característica de Euler-Poincaré. Na Figura 1 tem-se exemplos de poliedros convexos (a) e (b) e um poliedro não convexo (c) cuja característica de Euler-Poincaré é dois.

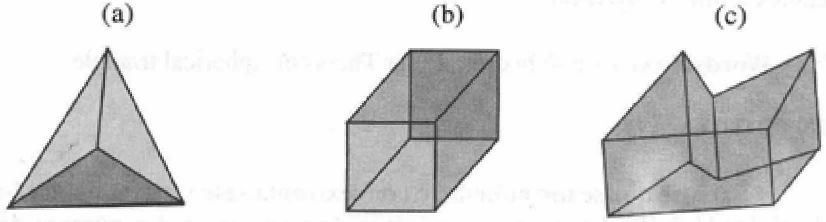

Figura 1 - Poliedros convexos (a e b) e poliedro não convexo(c).

Observa-se que se estes poliedros são inflados obtém-se uma esfera. Portanto, para os poliedros que são homeomorfos a uma esfera, é válido o teorema de Euler.

Na Figura 2 tem-se um poliedro não convexo cuja característica de Euler-Poincaré é zero. Este poliedro ao ser inflado resulta num toro. Para poliedros homeomorfos ao toro, o Teorema de Euler não é válido (LIMA, 1985a,b).

Figura 2 - Poliedro não convexo com característica de Euler-Poicaré zero.

Teorema de Euler: Seja P um poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, então V-A+F=2.

Demonstração: A demonstração deste Teorema é baseada nas idéias desenvolvidas por Cauchy no século passado.

Seja um poliedro convexo de V vértices, A arestas e F faces. Retirando-se uma das faces, a relação de Euler V-A+F=2 será modificada para V-A+F=1. Este poliedro modificado terá arestas pertencentes a apenas uma das faces, as quais são chamadas de arestas livres.

Esticando-se o poliedro a partir de suas arestas livres, pode-se achatá-lo de modo que ele se transforme em uma figura plana (Figura 3). Durante este processo V-A+F não sofre modificações.

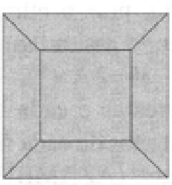

Figura 3 - Cubo planificado

Com a figura planificada, traçam-se diagonais que não se cortam para que todas as faces se tornem triângulos, conforme a Figura 4 (LIMA, 1985a,b).

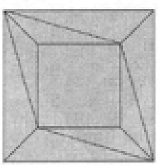

Figura 4 - Figura planificada com triângulos em todas as faces.

Retirando-se uma a uma as faces que têm arestas livres, chega-se finalmente à última face que é um triângulo para o qual V-A+F=1, conforme a Figura 5.Isto conclui a demonstração (LIMA, 1985a,b).

Figura 5 - Triângulo onde V – A + F = 1.

Daremos a seguir uma outra demonstração do Teorema de Euler baseada na soma dos ângulos internos de um poliedro.

Para demonstrar o Teorema de Euler seguindo este ponto de vista, utilizam-se duas formas distintas de calcular a soma dos ângulos internos de um poliedro convexo.

Primeira Forma :

Seja um poliedro convexo P de A arestas, V vértices e F faces, onde todas as faces são triangulares, conforme Figura 6.Traçando-se diagonais, a relação V-A+F não se altera, pois o número de arestas crescerá tanto quanto o número de faces. Sendo assim tem-se a relação:

$$3F=2A \quad (*),$$

pois cada face possui três arestas e cada aresta pertence a duas faces. Seja St a soma dos ângulos internos de cada face triangular e Sp a soma dos ângulos internos de todo poliedro (AZAMBUJA, 1983).

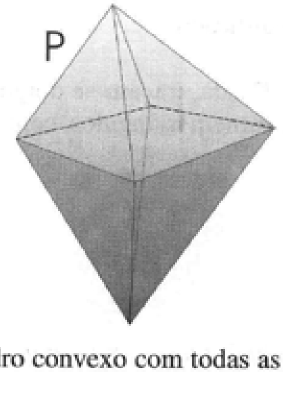

Figura 6 - Poliedro convexo com todas as faces triangulares.

Tem-se St = π pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é π radianos. Como há F triângulos resulta:

$$Sp=\pi F.$$

Usando (*) tem-se:

$$F=3F-2F=2A-2F$$

$$\text{e } Sp=\pi\ (2A-2F)$$

$$\text{ou}$$

$$Sp=2\pi A-2\pi F(^{**}).$$

Segunda forma:

Seja um plano H que passe sob o poliedro convexo P , onde H não é paralelo a nenhuma das faces e não intercepta o poliedro, conforme a Figura 7. Supondo que o poliedro seja iluminado de cima para baixo com raios verticais.Com isso se tem a parte superior do poliedro P formada por triângulos iluminados e a parte inferior formada por triângulos sombrios (AZAMBUJA, 1983).

Seja S_1 a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e S_2 a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios, então S_p, a soma dos ângulos internos do poliedro é dada, por $S_p=S_1+S_2$

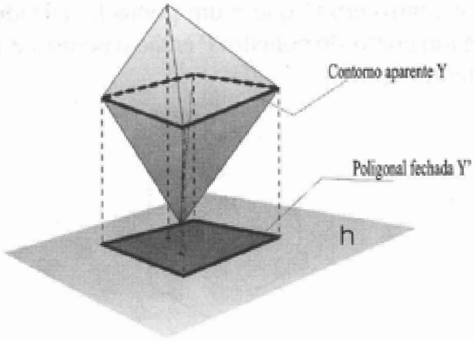

Figura 7 - Plano H passando sob o poliedro convexo P, onde H não é paralelo a nenhuma das faces e não intercepta o poliedro.

A sombra do poliedro P é um poliedro convexo do plano horizontal cujo contorno é a poligonal fechada Y (Figura 7).

Analisando-se a projeção, observa-se que se tem vértices do poliedro onde as projeções são os próprios vértices do polígono no plano H e vértices cuja projeção recaem no interior do polígono.

Seja V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente Y. Então $V=V_0+V_1+V_2$. Como a soma dos ângulos que têm como vértice um destes vértices é 2π radianos e a soma de todos os ângulos que têm vértices sobre o contorno aparente Y é $\pi\ (V_0-2)$, então:

$$S_1=V_1.2\pi+\pi(V_0-2).$$

Da mesma forma , a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios é dada por:

$$S_2=V_2.2\pi+\pi(V_0-2).$$

Daí

$$S=S_1+S_2=2\pi(V_0+V_1+V_2)-4\pi.$$

Comparando-se com a soma dos ângulos internos do poliedro obtida em(**) resulta:

$$2\pi\ A - 2\pi\ F = 2\pi\ V - 4\pi$$

ou

$$V - A + F = 2,$$

e o teorema está demonstrado (AZAMBUJA, 1983).

Da-se a seguir uma demonstração do Teorema de Euler baseada na soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, segundo as idéias do matemático francês A.M Legendre (LIMA, 1984).

Seja P um poliedro com V vértices, A arestas e F faces, e seja E uma esfera de raio r e centro em O que é um ponto localizado no interior do poliedro P.Se X é um ponto do poliedro P então o ponto x é a projeção radial de X sobre a esfera, Figura 8.

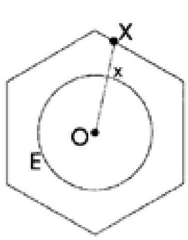

Figura 8 - Projeção radial de X sobre a esfera.

Projetando-se radialmente o poliedro P sobre a esfera E obtém-se uma decomposição de E em triângulos esféricos.

A Figura 9 representa a projeção radial do triângulo T sobre a esfera obtendo-se o triângulo esférico t.

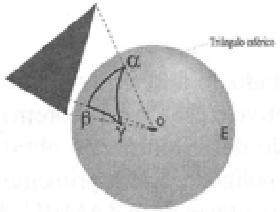

Figura 9 - Projeção radial do triangulo T sobre a esfera.

A demonstração do Teorema de Euler sob o ponto de vista da geometria esférica utiliza os resultados do geômetra francês Albert Girard sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico (LIMA, 1985a,b).

A fórmula de Girard nos diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é dada por:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+a/r^2,$$

onde α, β e γ são ângulos internos do triângulo esférico (Figura 9),e **a** é a área do triângulo esférico.

Seja P um poliedro de A arestas, V vértices e F faces triangulares. Se P tiver faces que não são triangulares, é necessário transformá-las em triângulos traçando-se diagonais. A seguir projetam-se todas as faces de P na esfera. É desta esfera decomposta em F faces que se obtém a prova do teorema. Seja St a soma dos ângulos internos de cada triângulo esférico e Sp a soma dos ângulos internos do poliedro projetado. Então:

$$St=\pi+a/r^2.$$

Como se tem F triângulos esféricos resulta:

$$Sp=\pi F+\Sigma a/r^2.$$

Ainda, $Sp=2\pi V$, porque a soma dos ângulos em torno de cada vértice é de 2π e sendo $\Sigma a=4\pi r^2$ que é a área da superfície esférica, substituindo-se na igualdade acima resulta:

$$2\pi V=\pi F+4\pi r^2/r^2$$

$$\text{ou} \quad 2V=F+4.$$

Para obter-se uma relação com o número de arestas, observa-se que cada face tem três arestas e cada aresta pertence a duas faces, então:

$$3F=2A \quad \text{e} \quad F=2A-2F,$$

portanto,

$$2V=(2A-2F)+4,$$

$$2V=2A-2F+4,$$

$$V=A-F+2,$$

que é a relação de Euler (LIMA, 1985a).

CONCLUSÕES

Este trabalho, resultado do desenvolvimento do projeto de Iniciação Científica, teve como objetivo o estudo do Teorema de Euler para poliedros convexos. A demonstração deste teorema é obtida baseando-se na soma dos ângulos internos de um polígono. É feita primeiramente uma demonstração mais elementar segundo as idéias de AZAMBUJA (1983) para poliedros convexos e, posteriormente, é realizada uma demonstração, utilizando as noções básicas da geometria esférica, baseada na demonstração feita por A.M Legendre no final de século XVIII.

No trabalho são apresentados alguns exemplos de poliedros não convexos para os quais vale o teorema de Euler e identificados para que classe de poliedros é válido este resultado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

AZAMBUJA, Zorcato. Filho, 1983; Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. **Revista do Professor de Matemática**, nº 3, p 15-17.

LIMA, Elon Lajes, 1984; Ainda sobre o Teorema de Euler sobre poliedros convexos. **Revista do professor de Matemática**, Rio de Janeiro, nº 3, p 23-27.

LIMA, Elon Lajes, 1985a; A característica de Euler-Poincaré. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, nº 1, p 47-62.

LIMA, Elon Lajes, 1985b; O Teorema de Euler sobre poliedros. **Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, nº 2, p 57-74.