CONSTRUÇÃO DA TABELA DE LOGARITMOS DECIMAIS[1]

THE DECIMAL LOGARITHM BOARD CONSTRUCTION

Raquel Oliveira dos Santos[2]
José Pedro Pereira de Carvalho[3]

RESUMO

Durante muitos anos ensinou-se a calcular com logaritmos na escola do segundo grau ou no início dos cursos superiores de matemática, utilizando muito as tábuas de logaritmos decimais, pois, na época não existiam máquinas de calcular. Essas tábuas surgiram inicialmente para ajudar no cálculo das multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes. Hoje, com o avanço tecnológico, as calculadoras de bolso, cada vez mais sofisticadas e baratas, vieram substituir essas tábuas de logaritmos. O ensino dos logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas. Porém, a função logarítmica, nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponenciais e logarítmicas são parte vital da natureza. Assim, o estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser de suma importância. O objetivo desta pesquisa foi relembrar o processo que permitiu a Henry Briggs escrever qualquer número inteiro positivo na forma de uma potência de base 10. A escolha deste assunto surgiu pela constatação de que os livros de matemática do segundo grau não fazem referência ao método que Henry Briggs utilizou na construção da tábua de logaritmos decimais. Este trabalho mostra o processo de como se pode escrever o número 3, na forma de uma potência de base 10, isto é, encontrar um número real aproximado de **x** tal que $10^x = 3$. Assim, conhecendo dois valores **y** e **z** tal que $\mathbf{10^y < 10^x < 10^z}$ onde $\mathbf{y < x < z}$ o processo consiste em aproximar **y** e **z** de x através de seqüências de valores racionais.

Palavras-Chave: Logaritmos decimais, média geométrica, média aritmética.

ABSTRACT

For many years, calculate involving logarithms has been taught in the high school or in the beginning of superior math schools using intensively

[1] Trabalho de Iniciação Científica.
[2] Aluna do Curso de Matemática - UNIFRA. Bolsista PROBIC.
[3] Orientador.

decimal logarithm boards because, at that time, there were not calculators. These boards were used first to help the calculation of multiplication, division, involution and radix extraction. Today, as a result of the tecnological advance, pocket calculators, more and more sophisticated and cheap, came to substitute the logarithm boards. The logarithm teaching, as an instrument of calculus, is disappearing from schools. Despite this, the logarithm function will never die for the simple reason that the exponential variations and logarithms are vital parts of the nature. Therefore, the logarithms study is still and will be very important. The unique objective of this research is to bring to people's memory, as an elementary way, the process that allowed Henry Briggs to write any positive integer number as an involution of 10 base. The preference for this subject arised during the observation that high school math books do not make references to the method used by Henry Briggs on the logarithm board contruction. This study shows the process by what the number 3 can be written as a 10 base involution, that is, find a real number near x such that $10^x = 3$. Thus, knowing two values y and z, that $10^y < 10^x < 10^z$, where $y < x < z$, the process consists of approaching both y and z of x by means of rational sequences values.

Key Words: Decimal logarithms; geometric medium; arithmetic medium.

INTRODUÇÃO

Por volta de 1615 surgiram as primeiras tabelas de logaritmos, despertando grande interesse em Henry Briggs[1]. Neste mesmo ano, Briggs visitou John Napier[2] em sua casa em Edimburgo, Escócia. De comum acordo, acreditaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10. Mas Napier já não tinha mais energia para expor suas idéias e, em 1617, faleceu.

Briggs então assume a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns, ou Briggsianos. Em vez de tomar potências de um número próximo de dez, como fizera Napier, Briggs começou com log 10 = 1 e depois calculou outros logaritmos tomando raízes sucessivas. Calculando que $\sqrt{10} = 3{,}16227766$, Briggs tinha que log 3,16227766 = 0,500000000, e de $10^{3/4} = \sqrt{31{,}6227766} = 5{,}623413252$ tinha que

(1)Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria do Gresham College de Londres e posteriormente professor de Oxford. Escreveu: Trigonometria Britannica; Arithmetica Logarithmica.

(2)John Napier (1550-1617), conhecido como "o inventor dos logaritmos".

$\log 5{,}623413252 = 0{,}7500000000$. Continuando dessa maneira ele calculou outros logaritmos comuns.

Briggs depositou todas as suas energias na construção de uma tábua com base na nova idéia e, em 1624, publicou sua obra Arithmetica Logarithmica, que continha uma tábua de logaritmos comuns, com quatorze casas decimais, dos números de 1 a 20000 e de 90000 a 100000; entre 20000 e 90000 ele preencheu com a ajuda de Adriaen Vlacq[(3)].

Como todo conteúdo desenvolvido em Matemática necessita de pré-requisitos, precisou-se trabalhar com certos conceitos e definições a fim de se chegar ao método utilizado por Briggs.

Os livros atuais do ensino médio e superior geralmente não apresentam o processo que permitiu a Henry Briggs construir a primeira tabela de logaritmos decimais.

Desta forma este trabalho teve por objetivo apresentar, de forma simples, as principais idéias usadas por Briggs para fazer a primeira tabela de logaritmos decimais.

DESENVOLVIMENTO

Propõe-se a seguir estudar a invenção dos logaritmos decimais.

Comparando-se a multiplicação de dois números e sua adição, observa-se que, geralmente o número de operações envolvidas na multiplicação, é maior que o número de operações envolvidas na adição. Como bem se pode ver comparando:

$$\begin{array}{r} 627 \\ +\,238 \\ \hline 865 \end{array} \text{ (uma operação)} \qquad\qquad \begin{array}{r} 627 \\ \times\,238 \\ \hline 5016 \\ +\,1881 \\ 1254 \\ \hline 149226 \end{array} \text{ (quatro operações)}$$

Com números muito grandes, a divergência entre o trabalho envolvido na multiplicação (ou na divisão) e o envolvido na adição (ou subtração) torna-se cada vez maior. Sendo assim, economiza-se muito trabalho, reduzindo-se a multiplicação a uma simples adição. Eis o que se deve à descoberta dos logaritmos.

(3) Adriaen Vlacq (1600-1660), livreiro e editor holandês.

Segundo Briggs, na edição de 1631 da Arithmetica Logarithmica, citada por HOGBEN (1956, p. 485):

> logaritmos são números inventados para possibilitar a solução mais rápida dos problemas aritméticos e geométricos... por seu intermédio evitam-se multiplicações e divisões trabalhosas, e efetuam-se todos os cálculos por adição, ao invés de multiplicação, e subtração, ao invés de divisão. Também a curiosa e trabalhosa extração de raízes é efetuada com grande facilidade... Em suma, todos os problemas, não só de Aritmética e Geometria, mas também de Astronomia, são resolvidos com mais simplicidade e facilidade...

O princípio fundamental da tábua de logaritmos foi compreendido por Arquimedes, que colocando uma série geométrica qualquer por debaixo da série geradora dos **n** primeiros números naturais, obtem-se:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7...**	**n**	(série aritmética)
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7**...**	3^n	(série geométrica)
3	**9**	**27**	**81**	**243**	**729**	**2187...**		

onde os números da série superior, isto é, da série aritmética, chamam-se logaritmos, e os números da série inferior, isto é, da série geométrica, antilogaritmos.

Conforme HOGBEN (1956, p. 489): "O princípio de Arquimedes é o seguinte: se queremos multiplicar dois números quaisquer da série inferior, adicionamos os números correspondentes da série superior e procuramos o número correspondente a esta soma na série inferior."

É o que se pode exprimir assim:

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

ou, numericamente

$$3^2 \times 3^4 = 3^6$$
$$9 \times 81 = 729.$$

Observa-se, por exemplo, que para $9 \times 81 = 729$ basta somar os seus correspondentes na progressão aritmética, no caso $2 + 4 = 6$, e ver qual o termo da progressão geométrica que corresponde a essa soma. Verifica-se que o valor é 729.

O princípio de Arquimedes que Briggs usou é a conhecida regra que se usa para multiplicar potências de mesma base: $a^m . a^n = a^{m+n}$. Sabe-se que os logaritmos foram inventados antes da notação exponencial.

Ainda, segundo LIMA (1991, p. 7): "Vale a propriedade fundamental $a^m . a^n = a^{m+n}$ (m, n inteiros positivos)." "Procuremos agora estender a noção de potência de um número real $a > 0$, de modo a incluir expoentes fracionários, da forma $r = \frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros e $q > 0$." E "mesmo para $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{u}{v}$ fracionários ($q > 0$ e $v > 0$), vale ainda a propriedade $a^r.a^s = a^{r+s}$."

Conforme LIMA (1991, p. 8): "De posse da definição e da propriedade fundamental das potências de expoente racional de um número real $a > 0$, os livros tradicionais definem o logaritmo do seguinte modo: dado um número real $a > 0$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de modo que $a^y = x$."

Assim, as duas afirmações são equivalentes: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

Com isso, de acordo com RIDER (1940, p. 212-213), pode-se construir uma tabela relacionando as formas exponenciais e logarítmicas.

10^3	=	1000	<=>	log 1000	=	3 ;
10^2	=	100	<=>	log 100	=	2 ;
10^1	=	10	<=>	log 10	=	1 ;
10^0	=	1	<=>	log 1	=	0 ;
10^{-1}	=	0,1	<=>	log 0,1	=	-1 ;
10^{-2}	=	0,01	<=>	log 0,01 =		-2 ;

Também, se $10^{1/2} = \sqrt{10}$, tem-se $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2} = 0,5$. Do mesmo modo $\log \sqrt[3]{10} = \frac{1}{3}$.

Contudo, não há número racional x para o qual $10^x = 3$.

Assume-se que quando x é um número irracional, e a é positivo e maior do que 1, $\mathbf{a^x}$ é um número maior que $\mathbf{a^y}$ e menor que $\mathbf{a^z}$, onde y e z são números racionais os quais são, respectivamente menores e maiores do que x, isto é, $\mathbf{a^y < a^x < a^z}$ onde $\mathbf{y < x < z}$.

À medida que os valores de y e z vão tendendo a se aproximar de $\mathbf{x}$, $\mathbf{a^y}$ e $\mathbf{a^z}$ assumirão valores cada vez mais próximos um do outro. De fato definimos $\mathbf{a^x}$ como o limite comum de $\mathbf{a^y}$ e $\mathbf{a^z}$ enquanto y e z aproximam-se de x através de seqüências de valores racionais.

Define-se média geométrica de dois números positivos segundo JAKUBOVIC & IMENES (1989, p. 356): "Dados a e b positivos, chamamos de média geométrica de a e b ao seguinte número: $\sqrt{ab}$." E ainda: "Dados dois números positivos **a** e **b**, com **a** ≠ **b**, a média geométrica deles é sempre um número situado entre **a** e **b** ."

Segundo JAKUBOVIC & IMENES (1989, p. 356): "O método que utilizaremos para obter o número 3 na forma de uma potência de base 10 foi utilizado por Henry Briggs, na construção da primeira tabela de logaritmos decimais, publicada em 1617 ."

De acordo com HOGBEN (1958, p. 502-503): "Para construir a sua tábua com a maior precisão possível, Briggs começou por fazer uma tábua de antilogaritmos, mediante as equações:

$$10^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{10^p}$$

$$\log_{10} \sqrt[q]{10^p} = \frac{p}{q}$$

ou

$$\text{anti}\log_{10} \frac{p}{q} = \sqrt[q]{10^p}\text{"}$$

e obtém-se:

$n = \log_{10} N$	$N = \text{anti}\log_{10} n$
1,000	10,0000 (10,0)
0,875 ($\frac{7}{8}$)	7,4989 ($\sqrt[8]{10^7}$)
0,750 ($\frac{3}{4}$)	5,6234 ($\sqrt[4]{10^3}$)
0,625 ($\frac{5}{8}$)	4,2170 ($\sqrt[8]{10^5}$)
0,500 ($\frac{1}{2}$)	3,1623 ($\sqrt{10}$)
0,375 ($\frac{3}{8}$)	2,3714 ($\sqrt[8]{10^3}$)
0,250 ($\frac{1}{4}$)	1,7783 ($\sqrt[4]{10}$)
0,125 ($\frac{1}{8}$)	1,3335 ($\sqrt[8]{10}$)
0,000	1,0000 (1,0)

Extraindo-se raízes mais elevadas, pode-se fazer os intervalos entre os números (n) da coluna da esquerda, tão pequenos quanto se desejar. Para obter uma tábua de logaritmos, isto é, uma tábua com números (N) igualmente espaçados (referência) na coluna da esquerda e seus logaritmos na coluna da direita, Briggs valeu-se das descobertas de Stifel, que observou:

• a adição de termos na série aritmética corresponde à multiplicação de termos na série geométrica;

• a subtração de termos na série aritmética corresponde à divisão de termos na série geométrica;

• a multiplicação de um termo da série aritmética, por uma constante, corresponde à elevação de um termo da série geométrica a uma dada potência;

• a divisão de um termo da série aritmética, por uma constante, corresponde à extração de uma dada raiz de um termo da série geométrica.

Considerando-se três números consecutivos da série aritmética, observa-se que o número do meio é a média aritmética dos outros dois. Assim, se 2, 3 e 4 forem os números escolhidos, $3 = \frac{1}{2}(2+4)$. De maneira análoga, de três números consecutivos da série geométrica, o número do meio é a média geométrica dos outros dois. Assim, se 9, 27 e 81 forem os números escolhidos, $27 = \sqrt{729} = \sqrt{9 \times 81}$. Essa particularidade subsiste quando se reduz o intervalo da série aritmética a uma fração, como:

2	2,5	3
9	$3^{2,5}$	27

O termo médio da série inferior é $3^{2,5} = \sqrt[2]{3^5}$ e a média geométrica dos outros dois, $\sqrt{9 \times 27} = \sqrt{243} = \sqrt[2]{3^5}$.

Segundo JAKUBOVIC & IMENES (1989, p. 356), "Briggs começou encontrando uma potência de 10 que é inferior a 3 e outra que é superior a 3." No caso, tem-se $10^0 = 1$ e $10^1 = 10$. O processo será ilustrado por um exemplo: o cálculo do valor de $\log_{10} 3$ por aproximações sucessivas.

Como se deve exprimir o número 3 como potência de 10? Essa exigência parece, naturalmente um tanto ousada, pois tem-se que descobrir um número **x** tal que fique $10^x = 3$, isto é, que 10 tomado **x** vezes como fator, venha a dar exatamente 3. Raciocinando-se um pouco: o que significa $10^{\frac{1}{2}}$ ou, como se passa a escrever daqui por diante, $10^{0,5}$? De acordo com as definições, esse valor é a raiz quadrada de 10, um número pouco maior que 3.

Nesse esquema, abaixo de cada número considerado, encontra-se o seu valor escrito como uma potência de base 10.

Segundo JAKUBOVIC & IMENES (1989; p. 356): "A seguir Briggs obteve a média geométrica dos números que estão representados nas extremidades do esquema, calculando essa média geométrica de dois modos diferentes: primeiro, obteve o valor da média geométrica: depois obteve essa média escrita como uma potência de base 10." Observa-se:

$$\sqrt{1\times 10} = \sqrt{10} = 3{,}16227766$$

$$\sqrt{10^0.10^1} = \sqrt{10^{0+1}} = \sqrt{10^1} = 10^{\frac{1}{2}} = 10^{0,5}$$

$$\sqrt[3]{1\times 10} = \sqrt[3]{10} = 2{,}154434469$$

$$\sqrt[3]{10^0 \times 10^1} = \sqrt[3]{10^{0+1}} = \sqrt[3]{10^1} = 10^{\frac{1}{3}} = 10^{0,333...}$$

Sabe-se que $3{,}16227766 = 10^{0,5}$ e que $2{,}154434469 = 10^{0,333...}$, e quer-se encontrar $3 = 10^x$. Portanto, **x** deve estar situado entre 0,333... e 0,5 ; pois se os expoentes crescem, as potências crescem também.

Segue-se o esquema:

1 3 3,16227766

10^0 10^x $10^{0,5}$.

Agora se repete o processo: obtendo-se a média geométrica dos números que estão nas extremidades do esquema. Isso se dará de duas maneiras: primeiro, com os números que estão nas extremidades, mas acima da reta do esquema; depois, com os que estão abaixo. Não se esquecendo, que, abaixo de cada número está o seu próximo valor, mas escrito como uma potência de base 10. Acompanhe:

$$\sqrt{1\times 3{,}16227766} = \sqrt{3{,}16227766} = 1{,}77827941$$

$$\sqrt{10^0 \times 10^{0,5}} = \sqrt{10^{0+0,5}} = \sqrt{10^{0,5}} = 10^{\frac{0,5}{2}} = 10^{0,25}$$

Então $1{,}77827941 = 10^{0,5}$ e faz-se o esquema:

1,77827941 3 3,16227766

$10^{0,25}$ 10^x $10^{0,5}$.

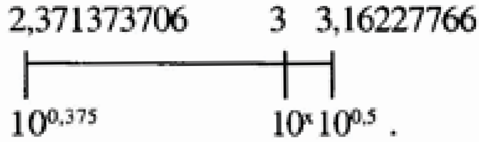
Observa-se que, ao se fazer esse esquema, utiliza-se, dentre os números que já se têm como potências de base 10, o que está mais próximo de 3, mas abaixo de 3; e o que está mais próximo de 3, mas acima de 3.

Repete-se o processo:

$$\sqrt{1{,}77827941 \times 3{,}16227766} = \sqrt{5{,}623413251} = 2{,}371373706$$

$$\sqrt{10^{0{,}25} \times 10^{0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}25+0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}75}} = 10^{\frac{0{,}75}{2}} = 10^{0{,}375}$$

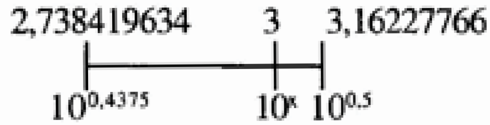
O esquema fica assim:



Repetindo-se esse processo mais cinco vezes, obtêm-se os seguintes esquemas:

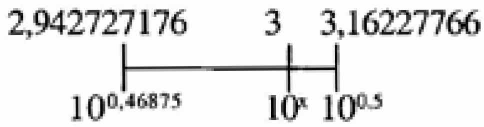
$$\sqrt{2{,}371373706 \times 3{,}16227766} = \sqrt{7{,}498942094} = 2{,}738419634$$

$$\sqrt{10^{0{,}375} \times 10^{0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}375+0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}875}} = 10^{\frac{0{,}875}{2}} = 10^{0{,}4375}$$



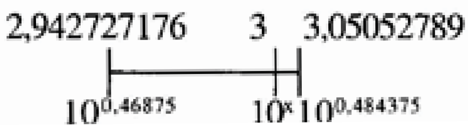
$$\sqrt{2{,}738419634 \times 3{,}16227766} = \sqrt{8{,}659643232} = 2{,}942727176$$

$$\sqrt{10^{0{,}4375} \times 10^{0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}4375+0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}9375}} = 10^{\frac{0{,}9375}{2}} = 10^{0{,}46875}$$



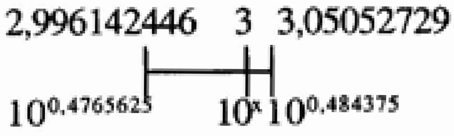
$$\sqrt{2{,}942727176 \times 3{,}16227766} = \sqrt{9{,}305720408} = 3{,}05052789$$

$$\sqrt{10^{0{,}46875} \times 10^{0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}46875+0{,}5}} = \sqrt{10^{0{,}96875}} = 10^{\frac{0{,}96875}{2}} = 10^{0{,}484375}$$



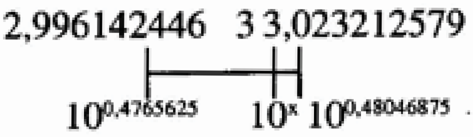
$$\sqrt{2{,}942727176 \times 3{,}05052729} = \sqrt{8{,}976869557} = 2{,}996142446$$

$$\sqrt{10^{0,46875} \times 10^{0,484375}} = \sqrt{10^{0,46875+0,484375}} = \sqrt{10^{0,953125}} = 10^{\frac{0,953125}{2}} = 10^{0,4765625}$$



$$\sqrt{2{,}996142446 \times 3{,}05052729} = \sqrt{9{,}139814296} = 3{,}023212579$$

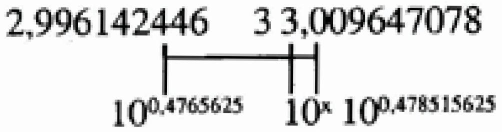
$$\sqrt{10^{0,4765625} \times 10^{0,484375}} = \sqrt{10^{0,4765625+0,484375}} = \sqrt{10^{0,960975}} = 10^{\frac{0,960975}{2}} = 10^{0,48046875}$$



Repetindo-se o processo mais cinco vezes, tem-se:

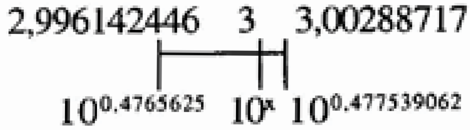
$$\sqrt{2{,}996142446 \times 3{,}023212579} = \sqrt{9{,}057975531} = 3{,}009647078$$

$$\sqrt{10^{0,4765625} \times 10^{0,48046875}} = \sqrt{10^{0,4765625+0,48046875}} = \sqrt{10^{0,95703125}} = 10^{\frac{0,95703125}{2}} = 10^{0,478515625}$$



$$\sqrt{2{,}996142446 \times 3{,}009647078} = \sqrt{9{,}017331358} = 3{,}00288717$$

$$\sqrt{10^{0,4765625} \times 10^{0,478515625}} = \sqrt{10^{0,4765625+0,478515625}} = \sqrt{10^{0,955078125}} = 10^{\frac{0,955078125}{2}} = 10^{0,477539062}$$



$$\sqrt{2{,}996142446 \times 3{,}00288717} = \sqrt{8{,}997077711} = 2{,}999512912$$

$$\sqrt{10^{0,4765625} \times 10^{0,477539062}} = \sqrt{10^{0,4765625+0,477539062}} = \sqrt{10^{0,954101562}} = 10^{\frac{0,954101562}{2}} = 10^{0,477050781}$$

2,999512912 3 3,00288717

$10^{0,477050781}$ 10^{x} $10^{0,477539062}$

$$\sqrt{2{,}999512912 \times 3{,}00288717} = \sqrt{9{,}00719884} = 3{,}001199567$$

$$\sqrt{10^{0.477050781} \times 10^{0.477539062}} = \sqrt{10^{0.477050781+0.477539062}} = \sqrt{10^{0.954589843}} = 10^{\frac{0.954589843}{2}} = 10^{0.477294921}$$

2,999512912 3 3,001199567

$10^{0,477050781}$ 10^{x} $10^{0,477294921}$

$$\sqrt{2{,}999512912 \times 3{,}001199567} = \sqrt{9{,}002136853} = 3{,}000356121$$

$$\sqrt{10^{0.477050781} \times 10^{0.477294921}} = \sqrt{10^{0.477050781+0.477294921}} = \sqrt{10^{0.954345702}} = 10^{\frac{0.954345702}{2}} = 10^{0.477172851}$$

2,999512912 3 3,000356121

$10^{0,477050781}$ 10^{x} $10^{0,477172851}$.

No último esquema, os dois expoentes são 0,477050781 e 0,477172851: as três primeiras casas são iguais. Portanto, querendo-se apresentar o expoente com três casas decimais, pode-se interromper o processo de cálculos de médias geométricas. Nesse caso, tem-se: $3 = 10^{0,477}$, que, de fato, está suficientemente próximo de 3 para quaisquer fins práticos.

No entanto, querendo-se apresentar o expoente com quatro casas decimais, deve-se retomar o processo até que, nos dois expoentes, as quatro primeiras casas sejam iguais. Tem-se então: $3 = 10^{0,4771}$.

E, querendo-se valores ainda mais precisos, deve-se fazer os cálculos das raízes quadradas com maior número de casas decimais.

Para escrever o número 5 como uma potência de base 10, Briggs utilizou-se do mesmo processo encontrado para o número 3, mas selecionando as potências mais próximas de 5, em vez de as mais próximas de 3.

Cabe ainda ressaltar que, em sua tabela de 1617, Briggs apresentou os logaritmos com 14 casas decimais. Todo esse trabalho realça a importância assumida pelos logaritmos naquela época, que permitiam a efetuação de cálculos trabalhosos, facilitando o desenvolvimento do comércio, da astronomia, da navegação e de inúmeras outras atividades.

CONCLUSÕES

A maioria dos livros de matemática do 2º grau não fazem referência ao método que Briggs utilizou na construção da primeira tabela de logaritmos decimais.

Briggs usou as definições das médias aritmética e geométrica enunciadas por Arquimedes e as regras das progressões aritméticas e geométricas enunciadas por Stifel.

Esta pesquisa ficou centrada na descoberta da escrita do número 3 como potência na base 10, usando-se para isso, o método das aproximações sucessivas de valores racionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

HOGBEN, Lancelot. 1956. **Maravilhas da Matemática: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos**. 2ª ed. Porto Alegre, RS : Globo.(Trad. de Paulo Moreira da Silva, Roberto Bins e Henrique Carlos Pfeifer).

JAKUBOVIC, José; IMENES, Luiz Márcio. 1989. **O Novo Telecurso 2º grau : matemática**. 6ª. ed. São Paulo : Editora Globo.

LIMA, Elon Lages. 1991. **Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM.

RIDER, Paul R. 1946. **College Algebra.** United States of America. The Macmilliam Company.