VIDYA, v. 35, n. 2, p. 237-253, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015. **ISSN** 2176-4603

O POTENCIAL SEMIÓTICO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA ILUSTRATIVA

THE SEMIOTIC POTENTIAL OF GEOGEBRA IN THE LEARNING GEOMETRY: AN ILLUSTRATIVE EXPERIENCE

MARIA ALICE GRAVINA*

RESUMO

Este artigo discute o papel dos registros dinâmicos de representação semiótica no processo de aprendizagem da geometria, quanto ao entendimento do significado e da necessidade de uma demonstração, bem como quanto ao desenvolvimento de habilidades para produzi-las. A teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2006) é usada para o entendimento do potencial dos registros dinâmicos disponibilizados no software GeoGebra. Exemplos de tratamentos no registro *figura dinâmica* ilustram formas de pensar diferentes daquelas nas quais se usa o desenho feito no papel. Uma experiência com futuros professores de matemática, cursando uma primeira disciplina de geometria no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, ilustra a discussão teórica do artigo.

Palavras-chave: Geometria dinâmica. Registros de representação. Formação inicial de professores. Demonstração em geometria

ABSTRACT

This article discusses the role of dynamic registers of semiotic representation in geometry learning process, regarding the understanding of the meaning and the need for a demonstration, as well as the development of skills to produce them. The theory of registers of semiotic representation (DUVAL, 2006) is used to understand the potential of dynamic registers provided in the GeoGebra software. Examples illustrate treatments on the register figure that provoke ways of thinking different from those in which one uses the drawing on paper. An experience with pre-service mathematics teachers, attending a first geometry course, illustrates the theoretical discussion of the article.

Keywords: *Dynamic geometry. Registers of semiotic representation. Pre-service math teacher cords. Proof in geometry.*

* Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do IMUFRGS, Doutora em Infor-mática na Educação pelo PPGIE – UFRGS e Mestre em Matemática pelo IMPA-RJ.E-mail: gravina@mat.ufrgs.br

INTRODUÇÃO

A Matemática é, por excelência, uma área de conhecimento que depende de sistemas de representação que fazem uso da linguagem natural e de signos com regras de uso bem estabelecidas – são os sistemas de representação semiótica. Estes sistemas tem papel fundamental não só na veiculação do saber matemático, mas na produção de raciocínios e argumentos que produzem novo conhecimento. A história da matemática mostra o quanto o seu desenvolvimento se faz acompanhar do desenvolvimento de sistemas de representação cada vez mais sofisticados. Nesta direção, Radford (2013) reconhece em Leibniz (1646-1716) um moderno pensador nas suas reflexões sobre signos, pensamento e realidade. Partindo da relação entre a capacidade humana para comunicação e para entendimento da realidade, Leibniz acreditava que seria possível, até mesmo, desenvolver uma linguagem de signos, para representar "as coisas e sua essência" (RADFORD, 2013, p. 188) e de forma tal que a associação entre signos e pensamento poderia ser combinada e operada sem nenhuma ambiguidade.

A importância dos sistemas de representação semiótica na produção do conhecimento matemático, torna natural a existência, na área da educação matemática, de linha de pesquisa que trata de entender o papel de tais sistemas no processo de aprendizagem da matemática e, nos últimos anos, este tem sido um assunto recorrente. Em 2006, a revista *Educational Studies in Mathematics* teve uma edição especial dedicada ao assunto, intitulada *Semiotic Perspectives on Learning Mathematics and Communicating Mathematically*. Uma outra edição especial foi publicada em 2011, intitulada *Signifying and meaning making in mathematics thinking, teaching and learning: Semiotic perspectives*. Em 2014, mais uma edição especial, intitulada *Representing mathematics with digital media: Working across theoretical and contextual boundaries* foi publicada.

É importante dizer que este interesse de pesquisa vem sendo alimentado, especialmente, pelas indagações que se tem sobre as implicações do potencial das representações veiculadas em suporte digital, na aprendizagem da matemática. Uma contextualização histórica nos ajuda a entender a importância do tema. Shaffer & Clinton (2006) falam em espiral de ecologias cognitivas, sendo que, em cada estágio de desenvolvimento um crucial avanço cognitivo se produz e, junto com ele, uma nova cultura cognitiva se instala e prepara o terreno para um novo avanço cognitivo e uma nova ecologia cognitiva. Eles elencam, cronologicamente, quatro estágios: o estágio da *cultura mimética*, no qual a representação está no gesto; depois é o estágio da *cultura mítica*, que tem na linguagem oral um novo meio de representação, e com ela narrativas e mitos são as formas de armazenar, transmitir e produzir cultura; com a criação da escrita e dos símbolos, se desenvolve o estágio da *cultura teórica*, no qual a cognição humana, na produção e transmissão de conhecimento, faz uso de ferramentas culturais externas e de sistemas de representação (ainda estático, como por exemplo, o texto escrito).

Com as tecnologias digitais, novas possibilidades de criação, produção e veiculação de conhecimento se descortinam – agora é a possibilidade de interagir com sistemas dinâmicos de representação, que externalizam e internalizam novos pensamentos, em continuo processo de ação/reação entre sujeito e ferramenta. Estamos adentrando nova ecologia cognitiva - é o estágio da *cultura virtual*. Os autores introduzem a expressão *ferramentaparapensamento* (*toolfortoughts)* para caracterizar que ferramentas digitais e formas de pensar estão em completa dependência, pois se por um lado as ferramentas servem para externalizar pensamentos, por outro lado os pensamentos são internalizações de ações sobre as ferramentas.

Diferentemente de posicionamentos na linha sócio-cultural, que consideram ferramentas como suportes para a cognição humana, eles avançam em posicionamento provocador, ao considerarem que nas interações sujeito X ferramenta não existe a primazia de um sobre o outro e esta simbiose é parte da ecologia cognitiva da *cultura do virtual*: "Pensamentos estão conectados com ferramentas e as ferramentas estão conectadas com pensamento (...) Nenhum deles existe sem o outro (...) Nós atribuímos as ferramentas e aos pensamentos o mesmo status ontológico (p.290)".

Voltando-se a questão específica da aprendizagem da matemática, tem-se em Moreno-Armella & Hegedus (2009) um posicionamento que se aproxima da ideia de *ferramentaparapensamento.* Eles introduzem a noção de *objeto fronteira* (*border object*) – são realizações dinâmicas de objetos matemáticos, feitas através de ferramentas digitais. O sujeito pensa com um *objeto de fronteira*, através de sua ação sobre o objeto e da reação que recebe, e assim ele avança na construção de conhecimento. Dizem os autores: "O conhecimento que emerge com a mídia digital é diferente daquele que emerge a partir do lápis e papel, pois o mediador digital não é epistemologicamente neutro (...) a natureza do conhecimento está intrinsecamente ligada à ferramenta mediadora (p.511)".

Mas transformar um software em *ferramentaparapenasamento* (ou usar *objetos fronteira)*, em situações de aprendizagem da matemática, não é simples. Isto exige formas de pensar que são diferentes daquelas que estamos acostumados e ainda estamos, de fato, dando os primeiros passos na ecologia cognitiva da *cultura do virtual*.

Esta nossa reflexão introdutória tem o propósito de sinalizar que, um dos passos a ser dado diz respeito a mudança de olhar sobre o processo de ensinar e aprender matemática quando se faz uso de tecnologia digital. No que segue vamos mostrar uma possibilidade de uso do software GeoGebra na direção de ser uma *ferramenta para pensamento*, em situação de aprendizagem direcionada para desenvolvimento do pensamento geométrico, quanto ao entendimento e significado de uma demonstração e também quanto ao desenvolvimento de habilidades para produzir demonstrações. Na próxima sessão, sinalizamos de que forma os registros de representação semiótica participam do processo de construção do pensamento geométrico. Depois avançamos na discussão sobre os registros dinâmicos de representação semiótica que se tem em um software como o GeoGebra. Para ilustrar de que forma se pode fazer uso de potencial de tais registros dinâmicos apresentamos uma experiência de ensino realizada com alunos calouros do Cursos de Licenciatura em Matemática da UFRGS.

O PROCESSO DE DEMONSTRAÇÃO À LUZ DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A geometria euclidiana é a parte do saber matemático voltada a objetos idealizados. Idealizados no sentido de não existirem no mundo físico, mas apenas no mundo das ideias. Triângulos, quadrados, círculos, esferas são idealizações de formas físicas presentes no mundo ambiente. As primeiras idealizações espontâneas, de qualquer criança, apoiam-se em qualidades comuns que certos objetos apresentam, e são simplesmente impressões visuais, associadas a determinados nomes. Entender o sentido de uma teoria axiomatizada, entender o significado e a necessidade de uma demonstração, ser autor de demonstrações não é nada simples nem espontâneo: "Entendimento do sentido de rigor numa construção hipotético dedutiva, o sentimento de coerência e consistência, a capacidade de pensar com proposições, independentemente de restrições práticas, não são aquisições espontâneas. " (FISCHBEIN, 1993, p.232).

A teoria dos registros de representação de Duval (2006) ajuda no entendimento do processo de construção do pensamento geométrico. Duval introduz o conceito de registro de representação com o propósito de explicitar o quanto os sistemas de representação, além de veicular o conhecimento matemático, são ferramentas que dão suporte à criação e desenvolvimento de novas ideias e conceitos. São quatro os tipos de registro que Duval (2006) identifica: língua natural; sistemas de escritas numérica, algébrica e simbólica; desenhos; e gráficos. Ele explica o papel dos registros de representação no processo de entendimento e de produção de ideias matemáticas através do conceito de *transformação* que classifica em dois tipos: a) o *tratamento* é a transformação de uma representação semiótica em outra representação semiótica, dentro de um mesmo tipo de registro (por exemplo, registro desenho); b) *conversão* é uma transformação que transita entre representações semióticas pertencentes a registros de diferente natureza (por exemplo, registros língua natural e desenho).

Na aprendizagem da geometria é fundamental a conversão entre registro língua natural e/ou simbólica e registro desenho. Ao introduzir a noção de conceito figural (em itálico), Fischbein (1993) mostra a importância da estreita relação entre estes dois registros. O conceito figural (em itálico) tem dois componentes: um conceitual e outro figural. O componente *conceitual*, com maior ou menor grau de formalismo, em linguagem natural e/ou simbólica, caracteriza uma certa classe de idealizações (p.ex., a definição de quadrado). Já o *componente figural* é de natureza visual (forma, posição, tamanho) e se expressa através do desenho (p.ex., o desenho do quadrado). É da natureza da geometria a explicitação de relações entre elementos geométricos - é disto que tratam os teoremas e as demonstrações que os explicam - e, para tal, torna-se importante uma adequada simbiose entre componentes *conceitual* e *figural*, o que não é simples para os alunos. Diz Fischbein (1993):

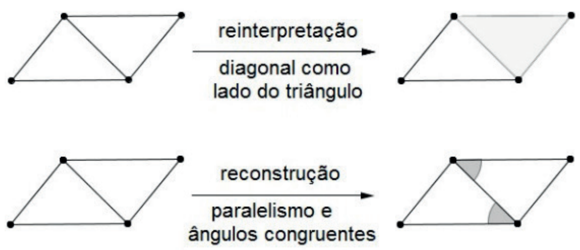
> A dificuldade em manipular conceitos figurais, isto é, a tendência de negligenciar a definição em função da pressão de restrições figurais, representa um dos maiores obstáculos ao raciocínio geométrico (...) Frequentemente, restrições figurais escapam do controle conceitual e impõem à linha de raciocínio interpretações que figurativamente são consistentes, mas que não estão mais sujeitas às restrições conceituais (p. 15)

É assim, por exemplo, que os alunos tomam como propriedade do segmento altura de um triângulo “ser um segmento no interior do triângulo”, ou que se referem ao paralelogramo como um “quadrilátero com dois ângulos agudos e dois obtusos”. Em casos extremos, os alunos até mesmo confundem características físicas do desenho - espessura do traçado, tamanho do ponto - com propriedades geométricas ao dizerem, por exemplo, que “círculos tangentes se interceptam em infinitos pontos”, pois é isto que veem no desenho que representa a situação (GRAVINA, 1996).

Em continuidade a ideia de *conceito figural*, Gravina (2001) introduz a ideia de *propriedade figural* como sendo uma propriedade também com dois componentes: o *componente proposicional*, correspondente ao enunciado em linguagem natural e/ou simbólica; e o *componente figural*, que se concretiza no desenho associado ao enunciado. No processo de demonstração o *tratamento* a ser dado ao *componente figural* é sempre uma fonte de dificuldade; é preciso transformar o registro desenho, mantendo-o sempre sob o controle da argumentação, e de tal forma que possam ser nele reconstruídos componentes figurais de teoremas e conceitos já sob domínio e que vão garantir o fluir da argumentação. Quão mais implícitos estão no componente figural os elementos geométricos necessários para concatenação lógico-inferencial de hipótese e tese do teorema, tão mais difícil se torna o processo de demonstração. A partir de trabalho de Duval (1995), e também retomando ideias de Zykova (1969), Gravina (2001) avança no detalhamento de *tratamentos* do registro desenho, presentes no processo de demonstração: a *reinterpretação de desenho,* de dificuldade menor, corresponde à situação em que um dado elemento do desenho é reinterpretado, no contexto de outra relação; a *reconstrução do desenho* exige o estabelecimento de relações entre determinados elementos do desenho, no contexto de outra relação. O terceiro tratamento é a *extensão do desenho*, este o mais complexo, pois os elementos geométricos necessários ao encadeamento de relações inferenciais não estão visíveis no desenho. Eles devem ser acrescidos para que assim se depreenda, via *reinterpretações* e *reconstruções*, o que dir-se-ia ser o *subcomponente figural (*solidário a *conceito* ou *propriedade figural* já conhecidos) que garante o fluir da argumentação. As Figuras 1 e 2 ilustram estes tratamentos de desenho[1].

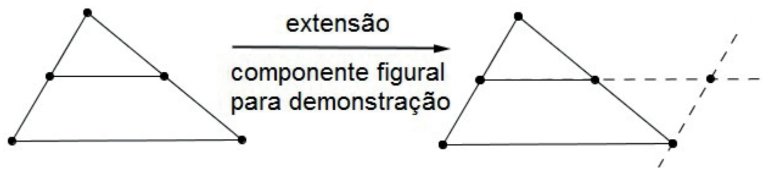
As dificuldades acentuam-se quando a *extensão do componente figural* envolve *reinterpretações* ou *reconstruções* de objetos que estão em posição não familiar, isto é, diferentes das prototípicas. Na Figura 3 tem-se um uma situação de tratamentos de desenho que envolve *reconstrução* / *extensão* / *reconstrução* e que exige a identificação de *sub-componente figural*, associado ao teorema da base média na explicação da propriedade "se no triângulo ABC tem-se M, N, R e Q pontos médios, respectivamente, dos segmentos AB, AC , BP e PC e P ponto médio de BC então o quadrilátero MNRQ é paralelogramo"

Figura 1 – Tratamento de *reinterpretação* e *reconstrução* do registro desenho



Fonte: Construção da autora.

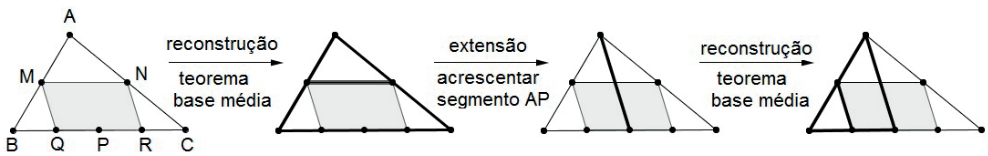
Figura 2 – Tratamento de *extensão* do registro desenho



Fonte: Construção da autora.

[1] O teorema do valor médio diz que "os pontos médios de dois lados de um triângulo determinam um segmento que é paralelo ao terceiro lado e que tem como medida a metade da medida deste terceiro lado".

Figura 3 – Sucessivos tratamentos no registro desenho



Fonte: Construção da autora.

O entendimento sobre os diferentes tipos de tratamento de desenho que se fazem presentes no processo de demonstração de um teorema ajudam a realçar as possibilidades que se tem nos registros dinâmicos de representação para o desenvolvimento do pensamento geométrico. E´ disto que trata a próxima sessão.

O GEOGEBRA E OS REGISTROS DINÂMICOS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Observar iniciantes no uso de um software de matemática dinâmica, como o GeoGebra, muito esclarece sobre o quanto nossa forma de pensar é influenciada pelos sistemas de representação que veiculam o conhecimento e com os quais se está familiarizado. Nossa experiência com alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, cursando uma primeira disciplina de geometria, mostra que não é de forma natural que os iniciantes tiram proveito do dinamismo que se tem nos registros dinâmicos. Frente à figura dinâmica, inicialmente eles se comportam como se fosse um desenho estático feito no papel; depois, mesmo já fazendo uso de movimento de pontos, ainda não é de todo simples, para eles, identificar relações entre os elementos que compõem uma figura dinâmica, identificar propriedades que se revelam no tipo de dinamismo da figura.

Este comportamento dos alunos se justifica na falta de familiaridade com o funcionamento do software. Mas o que de diferente e não familiar se apresenta em um software como o GeoGebra? No que segue vamos responder esta pergunta.

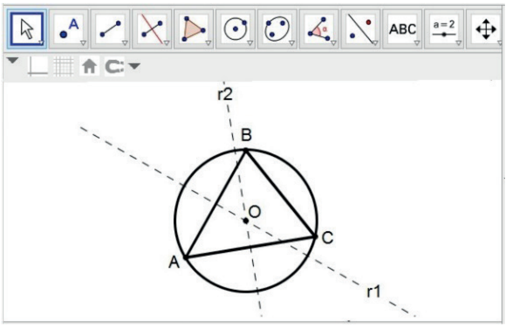
Na interface do GeoGebra tem-se menus com variadas ferramentas para realização de construções geométricas. Duas delas, básicas, funcionam como régua e compasso virtuais: *Reta passando por dois pontos* e *Círculo dado centro e ponto*. Com estas duas ferramentas poder-se-ia dar início a construções geométricas dentro do clássico princípio grego de III A.C.: a régua sendo usada para traçar reta passando por dois dados pontos e o compasso sendo usado para traçar círculo dado o seu centro e um de seus pontos[2]. Mas o GeoGebra já disponibiliza uma variada coleção de ferramentas, dentre elas *Reta Perpendicular*, *Reta Paralela*, *Mediatriz*, *Cônica por Cinco Pontos*; e outas tantas ferramentas podem ser incorporadas à sua base de conhecimento, através do recurso *Criar uma Nova Ferramenta*.

Mas é analisando outras duas características dos softwares de geometria que vamos, realmente, responder à pergunta colocada acima. A primeira característica é a disponibilização da representação semiótica que é referida na literatura como *figura dinâmica* (LABORDE&CAPPONI, 1994).

[2] É possível configurar a interface do GeoGebra de modo a ter-se visível somente algumas de suas ferramentas. Em Mariotti (2001) tem-se uma interessante experiência de ensino em que os alunos aprendem sobre a organização e construção de um modelo axiomático, iniciando com um menu reduzido de ferramentas, a saber ponto, reta, segmento, semi-reta, círculo, e gradativamente, mediante procedimento de construção, vão incluindo novas ferramentas, como por exemplo, retas perpendiculares, retas paralelas, mediatriz de um segmento, bissetriz de um ângulo, e assim por diante.

Feita uma construção, mediante deslocamentos aplicados aos elementos iniciais (no geral pontos), o desenho na tela do computador - uma instância de representação da construção - transforma-se mas preserva as relações geométricas que foram impostas à construção, bem como as relações delas decorrentes. Na tela do computador se descortina uma coleção de "desenhos em movimento" que guarda invariantes geométricos, declarados ou não no procedimento de construção. Uma *figura dinâmica* é entendida como uma coleção de "desenhos em movimento", que respeita um certo procedimento de construção.

Figura 4 – Estabilidade da construção geométrica



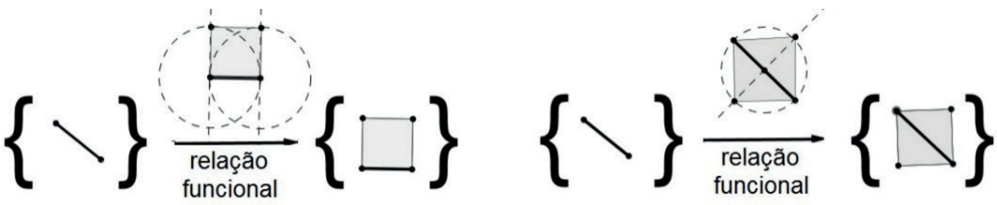
Fonte: Construção da autora.

Na Figura 4 tem-se uma construção que corresponde à *figura dinâmica:* ao aplicar-se deslocamento nos pontos A, B ou C, o triângulo muda de tamanho e posição, mas o círculo permanece sempre passando pelos vértices do triângulo. Isto acontece porque na construção são preponderantes as relações geométricas entre os elementos (a saber: triângulo ABC, mediatrizes dos lados AB e AC, ponto O de intersecção das duas mediatrizes, círculo de centro O passando por A).

Uma segunda característica dos softwares de geometria dinâmica é a representação semiótica que informa *relação funcional entre objetos geométricos*[3]. Por exemplo, pode-se ter a relação funcional entre 'segmento' e 'quadrado'- dado um segmento é possível 'enxergar', sem sombra de dúvida, o quadrado que tem como lado este segmento. Uma outra relação funcional poderia ser 'segmento' e 'quadrado', mas agora sendo ele construído a partir da diagonal. No dinamismo resultante de movimento aplicado a variável independente 'segmento' tem-se indícios das diferentes relações funcionais que determinam a variável dependente '*figura dinâmica quadrado´*. Se na *figura dinâmica* pode-se manipular somente dois vértices consecutivos, tem-se indicação de que a construção inicia com o lado do quadrado; se na *figura dinâmica* pode-se manipular somente dois vértices opostos, a indicação é de que a construção inicia com a diagonal do quadrado. As 'leis' destas duas relações funcionais estão indicadas nos procedimentos de construção dados na Figura 5.

[3] É com esta representação semiótica *relação funcional* que se pode expandir a base de ferramentas do GeoGebra. Feita uma construção, tem-se a possibilidade de *Criar uma Nova Ferramenta*. Por exemplo, feita a construção do círculo que circunscreve um triângulo, conforme indica a Figura 4, pode-se criar uma nova ferramenta que automatiza este procedimento, para isto escolhendo como variáveis independentes os três pontos que serão os vértices do triângulo e como variável dependente o triângulo e o círculo que foram construídos com procedimento geométrico.

Figura 5 – Relação funcional entre elementos geométricos



Fonte: Construção da autora.

Entendido o funcionamento do GeoGebra, voltamos a questão do potencial semiótico que nele se tem e elencamos alguns aspectos:

- a manipulação da figura dinâmica introduz um novo tratamento para o registro desenho. A ‘estabilidade do desenho sob ação de movimento’ é um registro dinâmico que desafia para construções com controle geométrico e este processo propicia a fusão entre os *componentes conceitual /proposicional* e *figural*. Uma família de ‘desenhos em movimento’ substitui o particular desenho como expressão do *componente figural*, descaracterizando as particularidades não relevantes, tão presentes na formação de inadequadas imagens mentais (FISCBEIN, 1996).

- na construção e na manipulação de *figuras dinâmicas* tem-se o germe do significado e da necessidade de uma demonstração. O procedimento de construção informa os ‘fatos declarados’. As regularidades observadas mediante manipulação da figura dinâmica, informam sobre regularidades que não foram declaradas – os *fatos implícitos* - que se tronam passiveis de explicação via argumentação dedutiva. Por exemplo, na construção que está na Figura 4 tem-se como *fatos explícitos* ‘triângulo ABC, retas mediatrizes r1 e r2 dos segmentos AB e AC, ponto O de intersecção das retas r1 e r2 e círculo de centro O passando por A’. Como *fato implícito* tem-se ‘círculo contém os pontos B e C’, e este fato pode ser explicado via congruência de triângulos, após *extensão de desenho* que acrescenta os segmentos AO, OB e OC. O entendimento da distinção entre fatos explícitos e implícitos é, sem dúvida, parte da *gênese cognitiva* do significado e da necessidade de uma demonstração (GRAVINA, 2001).

- a *relação funcional* é um registro dinâmico com potencial para provocar a descoberta de teoremas, especialmente em atividades do tipo ‘caixa-preta’. Uma ‘caixa-preta’ é uma *figura dinâmica* que o sujeito manipula, mas não sabe sobre sua construção. O desafio é construir uma réplica, e para isto é preciso identificar, via movimento aplicado as variáveis independentes, as regularidades da *figura dinâmica*. A produção de caixas-pretas é feita através do recurso *Criar uma Nova Ferramenta* e exemplificamos o procedimento, a partir da construção feita na Figura 4: são escolhidos como objetos inicias as *variáveis independentes* pontos A, B e C e como objetos finais as *variáveis dependentes* triângulo e círculo, e desta forma o procedimento de construção das mediatrizes r1 e r2 e do ponto de intersecção destas retas fica oculto.

- os diferentes menus de construção e a manipulação das figuras dinâmicas propiciam o desenvolvimento de habilidades que dizem respeito ao tratamento do registro desenho. Particularmente nas *extensões de desenho*, a pertinência ou não dos elementos geométricos acrescidos pode ser analisada via o dinamismo da figura.

- com as *figuras dinâmicas*, as definições e os teoremas da geometria passam a ter *componente figural* com infinidade de representações e assim criam-se condições para o desenvolvimento de habilidades para identificar, em processos de demonstração, sub-configurações de propriedades já conhecidas, necessárias ao desenrolar da argumentação.

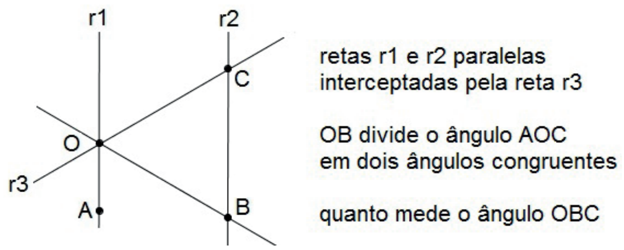
UMA EXPERIÊNCIA ILUSTRATIVA

Nesta seção apresentamos um recorte de experiência que teve como propósito responder duas questões de pesquisa (GRAVINA, 2001)[4]: a) de que forma os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para que os alunos compreendam o que é uma demonstração - que certas hipóteses implicam necessariamente novas relações geométricas, explicáveis via argumentação dedutiva?; b) de que forma os "desenhos em movimento" podem contribuir para que os alunos construam suas demonstrações, ou seja, para que se tornem versáteis no tratamento dos *componentes conceituais* / *proposicionais* / *figurais* que acompanham as argumentações dedutivas?

Participaram da experiência 16 alunos calouros do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS, e eles constituíram uma turma da disciplina Geometria I, obrigatória no primeiro semestre de Curso. Os alunos eram recém egressos do ensino médio (excluindo-se os casos de alunos egressos de cursos supletivo e profissionalizante) e na faixa etária de 17-20 anos. Estas condições se justificam: para controle da experiência julgou-se importante ter-se, na medida do possível, sujeitos com perfis similares, para melhor identificar e categorizar os comportamentos e avanços na construção de conhecimento, resultantes das interações com os registros dinâmicos de representação.

Foram estimados os conhecimentos prévios dos alunos[5] e obtiveram-se resultados que confirmam dificuldades quanto aos *conceitos* e *propriedades figurais*, em particular quanto aos *tratamentos na componente figural*: interpretações de desenho que não respeitam as *componentes conceitual /proposicional*; imagens mentais inadequadas que comprometem a fusão dos *componentes conceitual* e *figural*; validações que não se apoiam em argumentos de natureza dedutiva. Ou seja, os alunos deram indicações de conhecimento geométrico ainda no patamar empírico, fortemente influenciado por impressões perceptivas.

Figura 6 – Questão para avaliação de conhecimento prévio



Fonte: Construção da autora.

Por exemplo, frente a questão apresentada na Figura 6, observou-se *reconstru*ções no *componente figural* que fogem do controle dado no *componente conceitual*. Disseram: "os triângulos OCB e

[4] Um esclarecimento: mesmo sendo o trabalho de Gravina (2001) anterior aos trabalhos tomados como referência importante neste artigo, nele tem-se experiência com resultados que estão em plena sintonia com a discussão teórica feita no artigo e com a atualidade do tema em periódicos de pesquisa em educação matemática.

[5] Tomou-se os tópicos de geometria tratados nos livros didáticos escolares como conhecimentos prévios a serem avaliados.

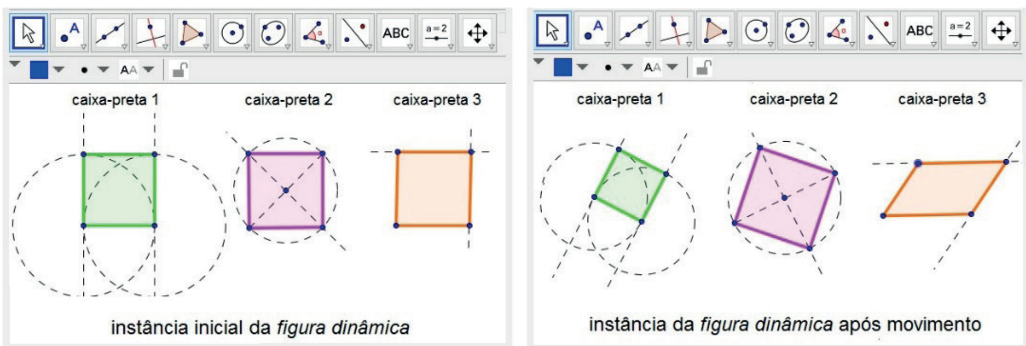
AOB são iguais"; "os ângulos AOC e ABC têm a mesma medida"; "o ângulo OCB mede 60 graus"; "o triângulo OBC tem todos os lados iguais". Chama a atenção que, no geral, não foi identificada a *sub-componente figural* 'ângulos alternos internos em reta paralelas', que resolveria imediatamente o problema; as soluções apresentadas envolveram muitos cálculos, desnecessários, com medidas de ângulos.

Na experiência, a sequência de atividades proposta aos alunos foi organizada em três níveis de complexidade: o primeiro tratou da compreensão do significado de demonstração; o segundo, tratou do desenvolvimento de competências para tratamentos no registro desenho, necessários para o fluir da argumentação; o terceiro nível tratou do desenvolvimento de competências para o tratamento do registro desenho em situações mais complexas, quanto as *extensões de desenho*.

Atividades do tipo 'caixa-preta' foram intencionalmente escolhidas para provocar a manipulação de figuras dinâmicas e a descoberta de propriedades geométricas[6]. Vamos analisar duas das atividades propostas, sendo uma delas no nível 1 e a outra no nível 2[7]. Para cada atividade, inicialmente tratamos de esclarecer sobre o uso do potencial semiótico do GeoGebra que se pretende e depois trazemos um recorte da produção dos alunos de forma a ilustrar o processo de apropriação do GeoGebra e o concomitante desenvolvimento do pensamento geométrico. Ao longo da experiência, os 16 alunos trabalharam em duplas.

A atividade do nível um, a primeira atividade da disciplina Geometria I, consiste de três 'caixas--pretas', de início, com instancias de desenho que não as diferenciam. Os alunos devem 'abrir' as 'caixas-pretas', isto é, fazer a construção de *figuras dinâmicas* que tenham o mesmo comportamento e, para isso, é preciso explorar o dinamismo das figuras de forma a identificar suas características e suas diferenças. A Figura 7 apresenta as caixas-pretas (os quadriláteros coloridos) em duas instâncias de representação. Os elementos pontilhados indicam, ao leitor, os procedimentos de construção e não são visíveis para o aluno (lembramos que as 'caixas-pretas' são produzidas com o recurso *Criar uma Nova Ferramenta*).

Figura 7 – Caixas-pretas da primeira atividade



Fonte: Construção da autora.

[6] Pouco se tem investigado sobre os efeitos de atividades do tipo "caixas pretas" na aprendizagem da geometria. Uma das primeiras referências sobre este assunto é um documento de Capponi (2001). O documento esboça critérios para elaboração de tipologia de "caixas pretas": maior ou menor evidência de indícios perceptivos; invariantes de forma;relação entre percepção e reconstrução de réplica. Tal tipologia visa classificar as "caixas pretas" de modo a antecipar à intenção de aprendizagem.

[7] A implementação e a análise da experiência está documentada, na íntegra, em Gravina (2001).

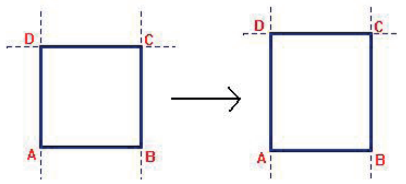
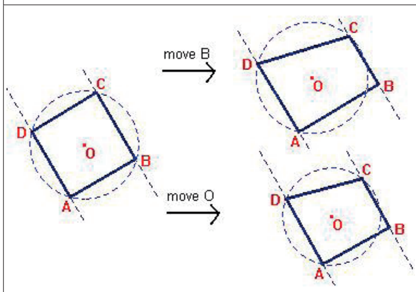
A atividade visa, inicialmente, à compreensão do conceito de *figura dinâmica* - sob ação do movimento tem-se regularidades que se mantém. Na caixa preta (a) eles vão observar que somente dois vértices consecutivos do quadrilátero podem ser movimentados e disso resulta mudança de posição e tamanho, mas a *figura dinâmica* mantém a forma de 'quadrado'; na caixa preta (2) eles podem movimentar somente dois vértices opostos, e isto produz um dinamismo diferente daquele observado em (a), mas a *figura dinâmica* também mantém sempre a forma de 'quadrado'. Já na terceira *figura dinâmica* podem aplicar movimento em três dos vértices e o resultado é um quadrilátero sempre com a forma de 'paralelogramo', com posição e tamanho variados.

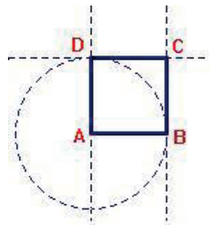
Na liberdade de movimentos dos vértices tem-se indícios para o procedimento de construção, e isto, para os iniciantes em geometria dinâmica não é nada óbvio. No primeiro quadrilátero a construção inicia com segmento lado e resulta em quadrado; o segundo inicia com segmento diagonal e resulta também em quadrado; três pontos dão início a construção do terceiro quadrilátero, que resulta em paralelogramo.

O processo de construção de réplicas das 'caixas-pretas' traz entendimento sobre os *fatos explícitos,* aqueles declarados no procedimento de construção (as hipóteses do teorema), e *fatos implícitos*, aqueles decorrentes e, portanto, passiveis de argumentação dedutiva (é a tese do teorema). Neste entendimento tem-se, a *gênese cognitiva* do significado e da necessidade de uma demonstração.

Na produção das duplas de alunos, em todos os grupos, exceto um, observou-se dificuldades na realização dessas primeiras construções. O que transparece, nas tentativas iniciais, é que os alunos, mesmo manipulando os vértices dos quadriláteros, ainda não entendem as relações geométricas que emergem nas *figuras dinâmicas*. As primeiras tentativas de construção misturam construção geométrica e desenho do tipo à 'mão livre', fazendo com que o quadrilátero tenha, aparentemente, a forma desejada. Sob ação do movimento, ele colapsa nas suas características aparentes. No Quadro 1 temos as diferentes tentativas de uma das duplas, relativas a construção da primeira caixa-preta. Na segunda coluna apresentamos comentários que esclarecem o procedimento de construção, com destaque em negrito nos aspectos que comprometem o produto final adequado.

Quadro 1 – Análise da primeira atividade

	Primeira tentativa de construção: segmento AB; retas perpendiculares pelos extremos do segmento; o ponto D sobre uma das perpendiculares **aparentemente** de forma a guardar a relação AD=AB; a reta perpendicular à AD por D e o ponto C como a intersecção de duas retas já construídas. Como três são os pontos livres (A,B,D) sob ação de movimento, a figura **deixa de ter a estabilidade** "quadrado", transformando-se em "retângulo".
	Segunda tentativa de construção: segmento AB; retas perpendiculares pelos extremos do segmento; o ponto O **aparente** centro do quadrado; círculo de centro O passando por A; pontos C e D intersecções das retas perpendiculares com o círculo. Novamente, três são os pontos livres (A,B,O). Movimentando-se B o círculo que **aparentemente** passava por este ponto **não guarda mais esta propriedade** e a figura colapsa; movimentando-se O a figura também colapsa, e mais quando círculo diminui de tamanho o ponto C deixa de existir.

	Na terceira tentativa, a dupla sucede, mas ainda é precária a descrição dos passos de construção: *"segmento, retas perpendiculares às duas extremidades do segmento, circunferência com centro em um dos pontos do segmento passando pelo outro, reta perpendicular à reta que passa pelo centro da circunferência* **(não é indicado o ponto pelo qual passa a reta perpendicular)**, *ligar os vértices* **(não é indicado como surge o quarto vértice) ."**

Fonte: Produção dos alunos

O desenho à ´mão livre´ é um reflexo de predominância de impressões ainda perceptivas – os quadriláteros ainda não estão sendo tratados como objetos geométricos. Nas primeiras construções, os grupos consideram o paralelismo e a perpendicularidade, com o propósito de garantir os ângulos retos; mas não consideram a condição de congruência dos lados do quadrilátero, para o que a ferramenta *Círculo dado centro e ponto* resolveria o problema e, no entanto, a sua utilização não foi imediata.

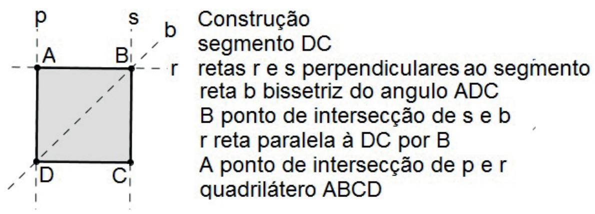
As duplas, de início, também não utilizam a informação advinda da relação funcional que existe entre os objetos geométricos. Nas primeiras explorações, o dinamismo serve tão somente para identificar as regularidades dos quadriláteros; os grupos não consideram que a relação funcional é um subsídio importante ao entendimento das 'caixas pretas', a saber, objetos livres são as variáveis independentes que dão início a construção.

Mas, gradativamente, a exigência de produzir 'desenhos em movimento que guardam regularidades' leva ao acurado controle do processo de construção. Todos os grupos, com exceção de um, apresentam, depois de algumas tentativas, construções satisfatórias para os três quadriláteros. Houve decréscimo no número de tentativas feitas pelos grupos na construção das três caixas pretas. Em quatro grupos há decréscimo no número de tentativas da primeira caixa preta para a segunda.

Em seis das oito duplas, a redação dos procedimentos de construção fez uso de linguagem geométrica bastante adequada, o que indica desenvoltura na conversão de *registro figura* para *registro língua natural e/ou simbólica*. Esta competência foi desenvolvida, em grande parte, nas interações com as ferramentas de construção disponibilizadas no GeoGebra.

Ainda como parte desta primeira atividade foi solicitado que fossem identificados os *fatos explícitos* e os *fatos implícitos* em uma das construções apresentada como réplica da primeira 'caixa-preta', ilustrada na Figura 8. Foi bastante satisfatória a produção das duplas, o que indica entendimento sobre pressupostos (hipóteses) e conclusões (tese) de uma propriedade geométrica. No geral, ficou evidente o entendimento de que: a) os ângulo C e D serem retos e a reta r ser paralela à DC são os *fatos explícitos*; b) os ângulos A e B serem retos e todos os lados serem congruentes entre si são *fatos implícitos.*

Figura 8 – Construção de réplica da primeira caixa-preta



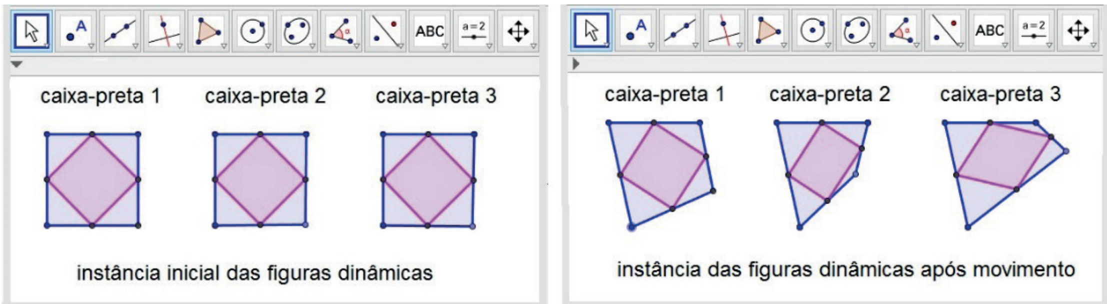
Fonte: Construção da autora

Com a identificação dos *fatos explícitos* e *implícitos* tem-se as condições para desencadear-se a argumentação dedutiva que explica porque o procedimento de construção, escolhido pela dupla, garante que o quadrilátero é realmente um quadrado, e aqui é preciso recorrer à congruência de triângulos e à congruência de ângulos em situação de retas paralelas cortadas por uma transversal[8].

A segunda atividade que vamos comentar também é do tipo 'caixa-preta'. Nela as exigências de *tratamento de desenho* são maiores, tanto na observação do tipo de dinamismo quanto nas *extensões* de *desenho*. As 'caixas pretas', sob ação de movimento, tem regularidades que surpreendem. Na Figura 9 tem-se duas instâncias das *figuras dinâmicas* e a segunda surpreende, pois os quadriláteros azuis parecem do tipo qualquer e no entanto os quadriláteros de cor rosa tem particularidades - são do tipo quadrado, retângulo ou losango.

É na exploração do tipo de dinamismo das figuras que emergem indícios para completar enunciados do tipo 'se quadrilátero ABCD tem ... tal propriedade ... então o quadrilátero MNPQ é quadrado'. A construção das réplicas depende de *extensões de desenho* que não são óbvias. Uma vez obtidas as réplicas, tem-se, nelas, de modo evidente, as informações que completam os enunciados. No processo de demonstração, o fluir da argumentação depende de reconstrução da sub-configuração 'teorema da base média'.

Figura 9 - Caixas-Pretas da segunda atividade



Fonte: Construção da autora.

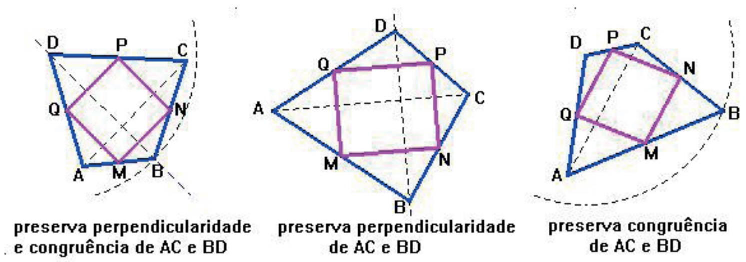
Quanto a produção das duplas, elas recorrem decididamente ao dinamismo da figura, concentrando-se na primeira caixa-preta. Movimentando os vértices do quadrilátero ABCD procuram identificar propriedades que garantem a forma 'quadrado' para o quadrilátero MNPQ. De imediato identificam que M,N,P e Q são pontos médios dos lados do quadrilátero ABCD. Mas com exceção de um grupo, nenhum identifica, de imediato, as variáveis independentes da 'caixa-preta' 1, este um registro dinâmico importante para 'abri-la' - no caso, a manipulação da figura dinâmica mostra que A e C são pontos livres, B é parcialmente livre e que o movimento do ponto D depende do movimento de A,B e C. Algumas das primeiras manifestações são: "... deve ter um círculo, porque movendo B, a distância de B à D não muda"; "... tem segmento que manda na construção (referindo-se à BD) ...

[8] Nos momentos de produção de demonstração houve deliberada intervenção do professor para esclarecimentos dos princípios de organização de um modelo axiomático – as noções primitivas, os axiomas, as definições , os teoremas e demonstrações.

o outro é sempre perpendicular (referindo-se à AC)...”; “o vértice D está preso à B (referindo-se a distância entre B e C que não muda)... não sabemos como fazer isto”.

Quanto ao grupo exceção: movimentando os vértices dos quadriláteros azuis, identifica as diagonais como elementos importantes; faz a extensão de desenho na ‘caixa-preta’ 1, manipula novamente a *figura dinâmica* e faz a conjetura ‘se as diagonais do quadrilátero ABCD são perpendiculares e congruentes então o quadrilátero MNPQ é quadrado’. O grupo avança no procedimento de construção e ´abre’, com sucesso, a ‘caixa-preta’ 1. Para a construção das demais réplicas não há maior dificuldade, pois o procedimento de construção da primeira réplica indica o caminho a ser seguido, a saber: a congruência das diagonais garante que o quadrilátero MNPQ é retângulo e a perpendicularidade das diagonais garante que o quadrilátero MNPQ é losango. O procedimento de construção das réplicas está esboçado na Figura 10.

Figura 10 - Construção das réplicas das caixas-pretas

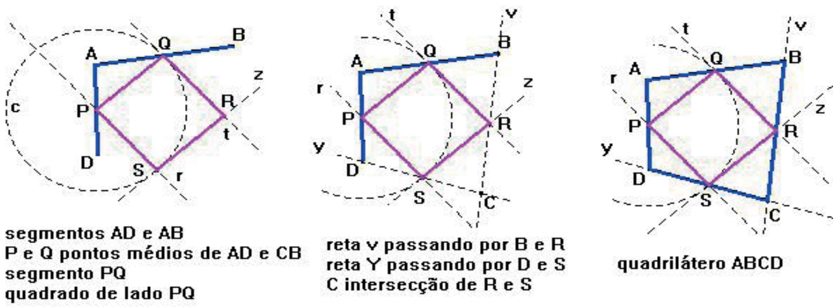


Fonte: Produção dos alunos

Em quatro grupos, há um gradativo controle do quadrilátero ABCD: sob ação de movimento, no primeiro momento eles controlam a perpendicularidade das diagonais de ABCD; ao movimentarem os vértices de ABCD, obtêm MNPQ retângulo e fazem novos ajustes na construção, visando garantir a congruência das diagonais.

Três dos grupos recorreram à diferente estratégia de construção: iniciando por dois lados consecutivos do quadrilátero azul, constroem o quadrado MNPQ e então completam o quadrilátero externo, conforme ilustra a Figura 11. A réplica da ‘caixa-preta’ apresenta o mesmo dinamismo e estabilidade, mas, no seu processo de construção, não emergiu a particularidade do quadrilátero ABCD. O procedimento adotado pelos três grupos alerta para cuidados que devem ser tomados no enunciado de atividade do tipo ‘caixa-preta’, quando se tem como objetivo a emergência de propriedades geométricas – no caso é identificação de propriedade do quadrilátero ABCD que garante o quadrilátero MNPQ ser um quadrado. No enunciado da atividade deveria ter-se incluído “a construção do quadrilátero MNPQ deve ser o último passo da construção”- tal exigência provocaria a investigação da particularidade do quadrilátero ABCD.

Figura 11 – Construção alternativa da primeira caixa-preta



Fonte: Produção de alunos.

Quanto ao desenvolvimento de habilidades para produzir demonstrações: as *extensões de desenho* já estão feitas no próprio processo de 'abrir' a 'caixa-preta´; a exigência maior é na reconstrução da subconfiguração teorema da base média, em situação de desenho não prototípica.

As 'caixas-pretas' apresentam-se como uma possibilidade para formulação de atividades que, realmente, tiram proveito do potencial dos registros dinâmicos. Tal tipo de atividade só pode ser realizada com um software de geometria dinâmica. E mais, o recorte de experiência apresentado indica que o processo de 'abrir' a 'caixa-preta' provoca o desenvolvimento do pensamento geométrico de natureza dedutiva. Mas muito pouco tem sido a investigação sobre o potencial das atividades do tipo 'caixa-preta', na aprendizagem da geometria[9].

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso propósito neste artigo, levando em consideração a complexidade cognitiva que se tem no processo de aprendizagem da geometria (as dificuldades dos alunos nos dizem sobre isto), foi mostrar possibilidades de atividades que tiram proveito dos registros dinâmicos de representação semiótica que se tem no GeoGebra.

Frequentemente as potencialidades dos softwares de matemática dinâmica são sub-utilizadas, mercê de propostas que simplesmente refletem a transposição das aulas tradicionais ao novo ambiente: os alunos recebem instruções do professor - "faça isto, depois aquilo..." - e procedem, passo à passo, na realização de uma construção geométrica; depois usam os recursos de medição para validar, empiricamente, a propriedade que emerge na construção e assim termina a atividade. Neste artigo , na discussão teórica, procurou-se mostrar o quão importante são os registros de representação no processo de aprendizagem da geometria. Com um recorte de experiência, que fez uso do software GeoGebra, ilustrou como a utilização das *figuras dinâmicas* pode ser uma fonte de explorações e de atitudes que concorrem para o desenvolvimento do pensamento geométrico de natureza dedutiva.

[9] Uma das primeiras referências sobre esta questão é um documento de trabalho de Bernard Capponi (IMAG- Université Joseph Fourier) intitulado 'Boite-noires', de 2001. O documento esboça critérios para elaboração de tipologia de "caixas pretas": maior ou menor evidência de indícios perceptivos — invariantes de direção, de forma, de posição, de comprimento e de ângulo; relação entre percepção e reconstrução de réplica; intenções de aprendizagem.

Mas é preciso reconhecer que estamos, pouco a pouco, incorporando novos hábitos de pensamento, determinados pela nossa crescente interação com sistemas de representação em suporte digital. Um recurso digital como um software trás, com certeza, complexidade para o processo de ensino da matemática, pois ele não se limita a expandir nossas possibilidades de pensamento. Ele transforma, de forma concomitante, as formas de pensar e as formas de veicular o conhecimento - veja-se o potencial das *figuras dinâmicas* na geometria.

Neste momento, o que já temos certeza é que um software geometria dinâmica pode provocar o espírito de investigação matemática. Sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, provoca experimento de pensamento, diferentes daqueles que acontecem com o suporte do lápis e papel. Diríamos que são tais experimentos que o vão constituindo como uma *ferramentaparapensamento*.

REFERÊNCIAS

DUVAL, R. Geometrical pictures - representation and specific processing. Em Sutherland, R. e Mason, J. (editores). **Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education**, Nato ASI Serie F, v. 138, p. 142-157, 1995.

DUVAL, R. A cognitive analysis of problemas of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 61, p. 103-131, 2006.

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 24, n. 2, 1993.

GRAVINA, M. A .**Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético dedutivo**. Tese (Doutorado no PGIE/UFRGS). Disponível em http://www.biblioteca.ufrgs.br/bibliotecadigital/, 2001.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria, **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Belo Horizonte, 1996.

LABORDE, C. & CAPPONI, B. Cabri-géomètre constituant d'un Milieu pour l'Apprentissage de la notion de figure, em Balacheff, N. e Vivet, M. (editores), **Didactique et Intelligence Artificielle**. Grenoble, France : La pensée Sauvage, 1994.

MARIOTTI , M.A. Justifying and Proving in the Cabri Environment. **Technology, Knowledge and Learning**, v. 6, n. 3, p. 257-281, 2001

MORENO-ARMELLA&HEGEDUS, S.J. Co-action with digital technologies. **ZDM Mathematics Education,** v. 41, p. 505–519, 2009.

RADFORD, L. On semiotics and education. *Éducation* **et Didactique**, v. 7, n. 1, p. 185-204, 2013.

RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 85, p. 405-422, 2014.

SHAFFER, D.W. & CLINTON, K.A. Toolforthoughts: Reexamining Thinking in the Digital Age. **Mind, Culture and Activity**, v. 13, n. 4 , p. 283–300 , 2006.

ZYKOVA, V. I. Operating with concepts when solving geometry problems. Em Kilpatrick. J & Wirzup, I., **Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics**, v. 1, p. 149-188, 1969.

Recebido em : 28 set. 2015
Concluido em: 30 out. 2015