

FORMAS, PADRÕES, VISUALIZAÇÃO E ILUSÃO DE ÓTICA NO ENSINO DA GEOMETRIA

FORMS, PATTERNS, VISUALIZATION AND OPTICAL ILLUSION IN TEACHING GEOMETRY

ANA MARIA MARTENEN ROLAND KALEFF*

RESUMO

Apresenta-se um relato envolvendo orientações advindas dos principais documentos governamentais sobre educação inclusiva, alfabetização matemática e formação de professores de Matemática (Plano Nacional da Educação, 2011-2020, Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa e Parâmetros Curriculares Nacionais). A habilidade da visualização é analisada à luz destas orientações objetivando alertar para a possibilidade de o atual ou futuro professor do segundo ciclo do Ensino Fundamental poderem não estar preparados para lidar com alunos alfabetizados segundo tais orientações. Além disso, apresentam-se fatores filosóficos e históricos do ensino de Geometria que influenciam a aquisição desta habilidade. São apresentadas duas práticas didáticas voltadas ao desenvolvimento da visualização e à aprendizagem de conceitos geométricos, envolvendo recursos concretos e virtuais criados no Laboratório de Ensino de Geometria (LEG/UFF). Uma delas trata da simetria axial plana e a outra da representação de desenhos de sólidos geométricos em perspectiva.

Palavras-chave: Formas. Padrões. Visualização. Ilusão de ótica. Ensino de geometria.

ABSTRACT

A report is presented regarding the guidelines of the chief government documents regarding inclusive education, mathematics literacy and the preparation of mathematics teachers (Plano Nacional da Educação, 2011-2020, Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa e Parâmetros Curriculares Nacionais). The visualization ability is analyzed with regard to such guidelines aiming at the possibility that acting or prospective secondary teachers might not be prepared to deal with students educated according to mentioned guidelines. Moreover, philosophical and historical factors related to geometry teaching are addressed which affect the acquisition of the of the visualization ability. Two teaching practices are presented targeted at the development of the visualization ability and the acquisition of geometric concepts centered on concrete and virtual resources developed at the Laboratório de Ensino de Geometria (LEG/UFF). One such resource deals with plane axial symmetry and the other with the plane representation of the perspectives of geometric solids.

Keywords: Forms. Patterns. Visualization. Optical illusion. Geometry teaching.

* Doutor. Universidade Federal Fluminense. anakaleff@vm.uff.br.

INTRODUÇÃO

Durante mais de quinze anos, os Parâmetros Curriculares Nacionais constituíram os principais documentos orientadores da formação do professor e das ações didáticas voltadas para a prática na escola básica, ou seja, para o Ensino Fundamental – PCN e Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 1997; 2000). Esses parâmetros, elaborados por um grupo de educadores no âmbito dos órgãos governamentais, tornaram-se a principal referência para o trabalho didático nas escolas públicas e particulares.

Os documentos apresentavam características de grande abrangência, pois além de sintetizarem as diretrizes didáticas para o trabalho nas disciplinas tradicionais Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, Geografia e História, também norteavam outras mais inovadoras, nas áreas das Artes, Educação Física e Língua Estrangeira. As diretrizes de cada disciplina específica ainda eram permeadas por orientações advindas dos chamados “Temas Transversais”, os quais englobavam conteúdos que poderiam ser abordados em todas as outras disciplinas.

Desta forma, os documentos foram os primeiros a enfatizar a necessidade de, na sala de aula, o professor relacionar temas específicos do âmbito de cada disciplina a outros pertencentes às mais diversas áreas, considerando como prioritária a educação para a cidadania. Como consequência, os parâmetros subentenderam que os aspectos disciplinares específicos deveriam perpassar toda a formação do educando, embasando também os aspectos éticos e sócio culturais que lhe permitiriam entender melhor a si mesmo e ao mundo à sua volta, em sua diversidade e complexidade.

Bem recentemente, novos documentos, de espectro mais atual, foram apresentados para o ensino fundamental e para a alfabetização matemática, por meio do programa Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC. Os Cadernos do PNAIC, em número de oito, apresentam os eixos que estruturam o currículo da matemática escolar para crianças de seis a oito anos, bem como uma variedade de recursos metodológicos, incluindo maneiras “de aproveitar contextos e situações problemas, em abordagens que contribuem para que os alunos aprendam relações, fatos, conceitos e procedimentos matemáticos que sejam úteis tanto para resolver problemas reais, como para desenvolver o raciocínio lógico” (BRASIL, 2014a, p. 05).

No que concerne especificamente ao ensino de geometria, para o PNAIC, são considerados dois grandes objetivos a serem alcançados, quanto ao tema “Espaço e Forma 1”, no ciclo de alfabetização:

[...] levar os alunos a construir noções de localização e movimentação no espaço físico para a orientação espacial em diferentes situações do cotidiano e de reconhecer figuras geométricas tridimensionais e bidimensionais. De forma geral, o objetivo deste caderno é auxiliar você, professor, no trabalho com o desenvolvimento do pensamento geométrico da criança, constituído por um conjunto de componentes que envolvem processos cognitivos, como a percepção, a capacidade para trabalhar com imagens mentais, abstrações, generalizações, discriminações e classificações de figuras geométricas, entre outros (BRASIL, 2014b, p. 5).

Por outro lado, as orientações dos documentos brasileiros estão em concordância com o que vem se impondo nos meios educacionais, pois desde o final da década de 1990, especificamente, no que concerne à formação de professores de matemática (tanto na graduação, quanto na formação continuada), vem sendo apontada a importância de se considerar a habilidade da visualização

no ensino da geometria elementar: “um fato é considerado essencial e necessário, tanto à pesquisa matemática, quanto para o ensino: o de um conhecimento profundo e crítico da geometria elementar, incluindo o reconhecimento da importância do papel da habilidade da visualização” (MAMMANA; VILLANI, 1998, p.326).

Caracterizar a habilidade da visualização em relação a outras disciplinas (como pretendem os PCN) e relacioná-la com o desenvolvimento do pensamento geométrico da criança (como preconiza o PNAIC), no entanto, não é uma tarefa simples, pois envolve um conjunto de operações mentais, que foram bem sintetizadas por Abraham Arcavi, como se segue.

Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas, em nossas mentes, sobre papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de representar e comunicar informações, de pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e de divulgar entendimentos (ARCAVI, 2003, p. 217).

Na prática, percebe-se que essa caracterização da habilidade da visualização, embora ampla, não é de fácil entendimento tanto para o licenciando como para o professor em exercício. Assim, no que se segue, serão tratados alguns fatores, que levaram a muitas dificuldades à aquisição dessa habilidade, relacionados a fatos filosóficos e históricos da Matemática e de seu ensino, os quais ainda se apresentam no âmbito da formação de professores. Por outro lado, frente às orientações governamentais aqui relatadas, é necessário que se conjecture se, nas licenciaturas, o futuro professor do segundo ciclo do Ensino Fundamental está sendo preparado para receber os alunos alfabetizados dentro dessas orientações. Nessa direção, a seguir, também são apresentadas duas práticas didáticas envolvendo recursos concretos e virtuais, na forma de experimentos educacionais, desenvolvidas no Laboratório de Ensino de Geometria (LEG) da Universidade Federal Fluminense (UFF), em Niterói-RJ.

OS RECURSOS DIDÁTICOS DO LEG E A EDUCAÇÃO INCLUSIVA DO ALUNO COM DEFICIÊNCIA VISUAL

Cabe adiantar que, no LEG, tem sido criado um amplo acervo de recursos didáticos manipulativos (concretos e virtuais), que relacionam atividades desenvolvidas com softwares livres da geometria dinâmica a aparelhos e jogos confeccionados com materiais de sucata ou de baixo custo, comumente encontrados no comércio. Essa é uma prática constante da filosofia do LEG, a qual privilegia tais materiais por levar em conta a condição social do professor brasileiro e por considerar que a grande maioria dos alunos das escolas públicas pertence a classes sociais de baixa renda. As atividades e os recursos manipulativos correspondentes podem ser vistos no site do laboratório (www.uff.br/leg) e no do “Projeto Conteúdos Digitais para o Ensino de Matemática e Estatística” (<http://www.uff.br/cdme/>).

Por outro lado, essa filosofia do LEG, também tem em vista a educação inclusiva do aluno com deficiência visual, que geralmente pertence a classes sociais menos privilegiadas. Cabe lembrar, que essa perspectiva, também está de acordo com as orientações governamentais, pois desde o final do século passado, já existem documentos oficiais que, prevêem a matrícula do aluno com alguma deficiência em escolas regulares e, portanto é necessário que, na formação de professores, os licenciandos sejam preparados para trabalhar com tal inclusão. Na direção da Educação Inclusiva, a

Meta 4 do atual Plano Nacional de Educação-PNE (2011-2020), prioriza a matrícula do aluno com deficiência ou super dotado nas classes regulares da escola (BRASIL, 2014d).

Buscando levar ao licenciando práticas mais adequadas à inclusão, no que se segue, também serão apresentadas maneiras de se adaptar os recursos didáticos aqui elencados para o ensino do aluno cego ou com baixa visão. Tais adaptações têm sido realizadas no âmbito do projeto “Vendo com as mãos”, que, desde 2009, vem sendo desenvolvido no LEG, com o apoio da Pró-Reitora da Extensão da UFF.

A CIÊNCIA MATEMÁTICA: UM CONJUNTO DE SABERES DINÂMICOS

Inicialmente, é importante observar que os documentos anteriormente citados consideram a Matemática como um conjunto de conhecimentos dinâmicos, construídos historicamente pela reflexão e pela experiência humana, na interação constante entre o meio ambiente, o contexto social e o cultural. Ou seja, os Parâmetros já consideravam a ciência Matemática como um conjunto de conhecimentos que se renovam e são ampliados pelos matemáticos profissionais a cada dia, e cujas aplicações, no cotidiano, nas Ciências e na Tecnologia são de grande importância. Dessa forma, os PCN admitem a Matemática como um conjunto de saberes sempre em constante evolução, contrapondo-os àqueles considerados como acabados e enclausurados em si mesmos. Sendo, portanto, por meio dessa dinâmica evolutiva que se encontra a interação da matemática escolar com os outros saberes científicos, sociais e do cotidiano. É nessa mesma direção que o PNAIC repensa e reconsidera a interdisciplinaridade, como uma consequência natural dessa interação entre os saberes matemáticos e aqueles advindos dos demais campos de conhecimento, pois na apresentação desses documentos, tem-se que

[...] a Alfabetização Matemática na perspectiva do letramento impõe o constante diálogo com outras áreas do conhecimento e, principalmente, com as práticas sociais, sejam elas do mundo da criança, como os jogos e brincadeiras, sejam elas do mundo adulto e de perspectivas diferenciadas, como aquelas das diversas comunidades que formam o campo brasileiro (BRASIL, 2014c, p. 15).

Essas considerações são muito importantes, pois auxiliam o professor a elaborar uma prática escolar mais adequada aos dias de hoje, em qualquer nível de ensino. Ao admitir e aceitar o dinamismo científico intrínseco à Matemática, o professor estará mais apto a incorporá-lo à sua sala de aula e a outros conhecimentos, ainda que, para tanto, precise continuar a sua formação profissional.

O ENSINO DA GEOMETRIA NA ESCOLA

Como professores, sabemos das dificuldades que se apresentam no ensino e à aprendizagem da matemática escolar, principalmente em relação à geometria. Isso se deve a vários fatores, pois embora exista uma intensa relação entre as formas geométricas e o nosso meio ambiente, há bem pouco tempo, nas aulas de geometria, quase não se dava atenção ao estudo das formas. Quando estas eram estudadas, mesmo nas séries do Ensino Fundamental, a ênfase era colocada nas relações métricas e no cálculo de medidas de comprimento de lados ou de medidas de áreas e volumes, geralmente baseados em fórmulas sem significado para o aluno.

Entre as razões históricas que levaram a esta situação na escola, podemos citar que, durante as décadas de 1960 a 1980, nos tempos do chamado Movimento da Matemática Moderna, a geometria escolar foi relegada a um segundo plano, até mesmo na escola básica, tendo sido privilegiado o uso das linguagens matemáticas simbólicas (algébrica, da teoria dos conjuntos e da lógica) em detrimento do uso de figuras e desenhos.

Em meados da década de 1990, a partir dos documentos do PCN destinados ao Ensino Fundamental, os professores foram levados a começar a refletir sobre como reverter esta situação de banimento das figuras e dos conceitos geométricos, pois as orientações dos Parâmetros apontavam como a escola deveria entender o papel da Matemática e como o aluno poderia ser estimulado a valorizá-la como um instrumental para “ler” e compreender o mundo à sua volta por meio da Geometria. Para tanto, o professor deveria incentivar o aluno a ver a geometria escolar como pertencente a uma área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação, a linguagem e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Nessa direção apontada pelos PCN, nos primeiros anos escolares, caberia ao professor levar o aluno a desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas. Os Parâmetros vinham valorizando o papel do professor para a construção desse conhecimento ao colocarem explicitamente que: “a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fieis dos objetos da ciência” (BRASIL, 1998, p. 30).

Nessa busca da revisão do papel da Matemática na escola, desde o final do século passado, há um renascer das representações matemáticas na postura escolar, pois estas são consideradas cada vez mais importantes para o entendimento dos conceitos matemáticos e da realidade virtual advinda dos meios computacionais. Como já bem sinalizado nos PCN: “No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos“. Nesse processo, o professor deveria dar especial atenção à comunicação na nossa língua materna, a qual tem grande importância, e deveria ser estimulada também durante o processo escolar matemático, levando o aluno a: “[...] ‘falar’ e a ‘escrever’ sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados” (BRASIL, 1998, p. 19).

Nessa mesma direção, bem recentemente, no PNAIC, encontram-se orientações diretas e muito objetivas para que o professor desenvolva práticas pedagógicas em direção a uma alfabetização geométrica, com o intuito de garantir que a criança possa:

Representar informalmente a posição de pessoas e objetos e dimensionar espaços por meio de desenhos, croquis, plantas baixas, mapas e maquetes, desenvolvendo noções de tamanho, de lateralidade, de localização, de direcionamento, de sentido e de vistas. [...] observar, experimentar e representar posições de objetos em diferentes perspectivas, considerando diferentes pontos de vista e por meio de diferentes linguagens (BRASIL, 2014b, p. 05).

Sob essa orientação, pode-se utilizar uma grande variedade de representações gráficas nas salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com as quais se motiva o aluno a observar com

mais atenção desenhos, diagramas, gráficos e tabelas, e também a vivenciar situações com outros campos do saber, que permitam desenvolver a habilidade da visualização, interligar a matemática escolar às Artes, às Ciências e às novas tecnologias relacionadas a imagens e figuras.

FORMAS, PADRÕES GEOMÉTRICOS E SIMETRIA

A nova perspectiva que orienta a alfabetização geométrica permite que situações, há muito estabelecidas para a geometria escolar, venham, aos poucos, se modificando. Além de incentivar a inclusão curricular dos conteúdos geométricos, os documentos oferecem orientações específicas sobre a importância de se apresentar aos alunos formas geométricas e suas relações em situações com outros conhecimentos e de resolução de problemas cotidianos. Portanto, nos últimos tempos, tem sido quase um consenso geral que o estudo precoce da geometria auxilia a criança a organizar o pensamento para a resolução de problemas, através da visualização e da análise das propriedades características dos modelos geométricos que representam os objetos do mundo à nossa volta.

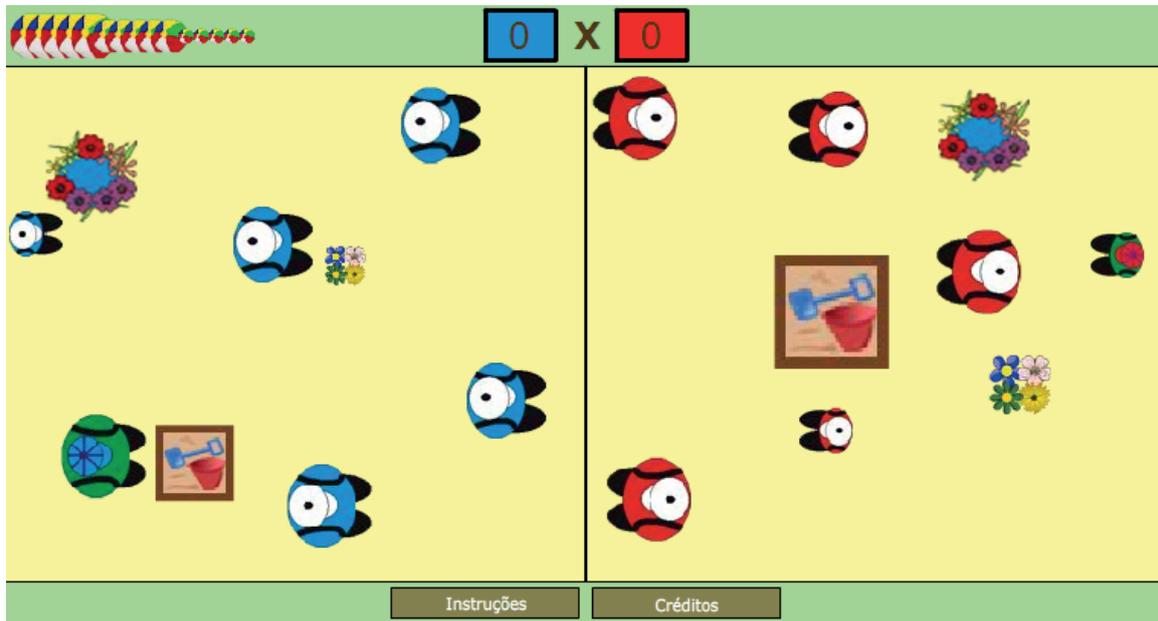
Como bem coloca o PNAIC, em Brasil (2014b), as formas e padrões geométricos podem servir como os padrões mais elementares para muitos tipos de fenômenos da vida cotidiana. Como exemplos desses padrões de regularidade, podem ser considerados:

- a forma vertical de uma reta a um plano, comparada com a do homem em pé na superfície plana do chão;
- as formas paralelas a uma linha em um plano, comparadas com as das ondas do mar a quebrarem em linha reta, seguindo a beira de uma praia;
- as características mais representativas do círculo, comparadas com a das ondas obtidas por uma pedra jogada em um espelho d'água;
- a forma do cilindro ou do cone, comparada com a do tronco de uma árvore etc.

Exemplos de padrões e aplicações geométricas bem simples, em figuras simétricas na natureza, na Botânica (nas folhas de plantas) e nas Ciências (nas imagens refletidas em um espelho plano), podem ser encontrados na literatura. Por exemplo, como apresentado há muitos anos por Kaleff (1994; 2004) e mais recentemente, na forma virtual de um experimento educacional denominado “Simetria axial plana”, publicado no Portal do Professor (em Kaleff et al, 2010).

No experimento educacional citado, é apresentado um jogo virtual chamado de “Queimada com Obstáculos” e destinado a dois jogadores bem jovens (crianças com cerca de 8 anos) do Ensino Fundamental, visando a introdução dos conceitos de simetria axial e áreas de figuras planas. Esse mesmo jogo pode ser novamente aplicado no Ensino Médio para o desenvolvimento das noções elementares de uma função matemática. Nas Figuras 1 e 2, está apresentada uma tela com exemplo dos campos dos jogadores preparados para o jogo virtual e as suas instruções.

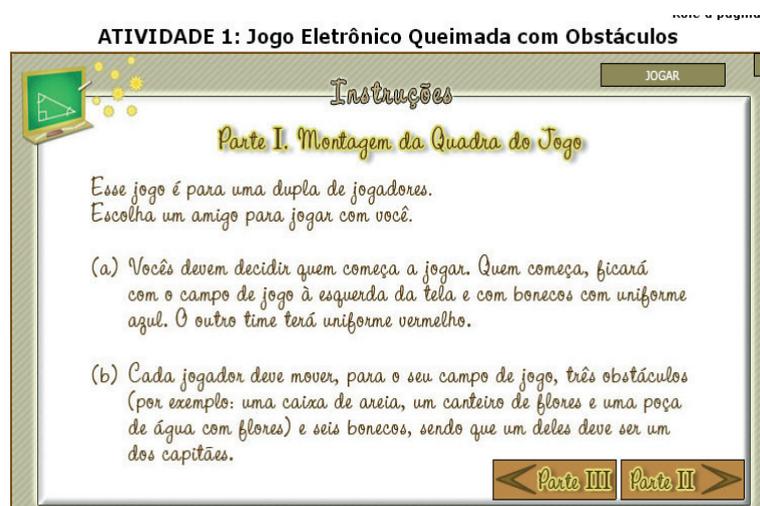
Figura 1 - Tela com exemplo dos campos preparados para o Jogo “Queimada com Obstáculos”



Fonte: <http://www.uff.br/cdme>

O tema motivador de todo o experimento educacional é fundamentado na palavra “involução” e suas relações interdisciplinares com a língua portuguesa, com a Biologia e a Física, as quais vão sendo estabelecidas por meio da construção da noção de simetria axial plana, principalmente durante tarefas que inter-relacionam o que o aluno vê a partir dos recursos computacionais com o que observa concretamente em uma folha de papel. Cumpre lembrar que a palavra involução, segundo o Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa, quer dizer “movimento regressivo”, cujo antônimo é “evolução” (<http://dicionariodoaurelio.com>).

Figura 2 - Instruções do Jogo Queimada com Obstáculos.





Fonte: <http://www.uff.br/cdme>

Durante a realização do jogo, o estabelecimento de estratégias de ação pelo aluno-jogador é fundamental para o desenvolvimento da sua habilidade de visualização geométrica, o que ocorre por meio da avaliação das distâncias entre os objetos desenhados e da sua representação em diferentes ambientes planos (dois campos, um de cada jogador) do jogo. Por outro lado, o êxito nas ações auxilia a formação da autoconfiança, do espírito de independência e da autonomia do aluno.

O jogo e as correspondentes atividades permitem que as propriedades da função involução, quase nunca tratada nos livros didáticos (do Ensino Médio e nem mesmo nos da universidade), sejam construídas de maneira intuitiva pelo aluno ainda no Ensino Fundamental, com o auxílio do jogo virtual, de dobraduras de papel, espelhos, decalques etc.

Considerando que uma involução é uma função matemática que parece realizar um movimento regressivo, na medida em que a sua inversa é ela mesma, desfazendo a própria ação realizada, as experiências permitem ao estudante estabelecer conjecturas e, até mesmo, perceber relações que envolvem aplicações do conceito matemático de função invertível. O aluno jovem é levado a perceber que cada ponto do seu campo do jogo deve corresponder outro, no campo do adversário, e que do local (ponto) atingido retorna-se ao ponto do campo inicial, por uma jogada do adversário. Por sua vez, o adolescente no Ensino Médio, é levado a modelar matematicamente essa situação por meio da linguagem da teoria dos conjuntos e da notação de função matemática.

No jogo eletrônico, são tratados os conceitos de pontos simétricos, eixo de simetria e o de simetria axial plana. Um jogo complementar, ou de avaliação, com o emprego de dobradura de papel, permite comparar as linhas obtidas com as dobras com o que é feito no computador.

Apresenta-se ainda uma atividade, a qual busca chamar a atenção do aluno para a existência de algumas simetrias na Botânica, mostrando a pertinência do uso de um espelho no desenvolvimento de imagens simétricas e buscando também iniciar o estudante em um diálogo envolvendo conceitos da Física e Ciências. Na Figura 3, tem-se um exemplo de como se usar o espelho para ver e representar em desenho a linhas simétricas das nervuras de uma folha da planta conhecida como lírio da paz, também chamado de espatifilo, cujo nome científico é *Spathiphyllum wallisi*.

Figura 3 - Uma folha de lírio da paz e a representação de suas nervuras simétricas.



Fonte: <http://www.uff.br/cdme/simetria/index.html>

Finalmente, após trabalhar com a importante característica de dupla inversão da função simetria axial, ou seja, de que a inversão associa um ponto a si mesmo, depois de ser levado ao outro simétrico, o aluno é levado, por meio de desafios e pequenas demonstrações, a encontrar a função involução plana.

Resumidamente, os objetivos a serem atingidos com esse experimento educacional para o Ensino Fundamental são:

- investigar e reconhecer formas simétricas em torno de um eixo em uma superfície plana;
- concluir e sintetizar argumentações, tomando como base os conhecimentos criados a partir de jogos;
- desenvolver informalmente o conceito de simetria axial plana;
- utilizar argumentos geométricos para resolução de situações-problema;
- observar relações de interdisciplinaridade da Geometria com a Física e Biologia.

Dando continuidade ao que foi visto anteriormente, o aluno do Ensino Médio e até aquele em cursos de formação de professores pode:

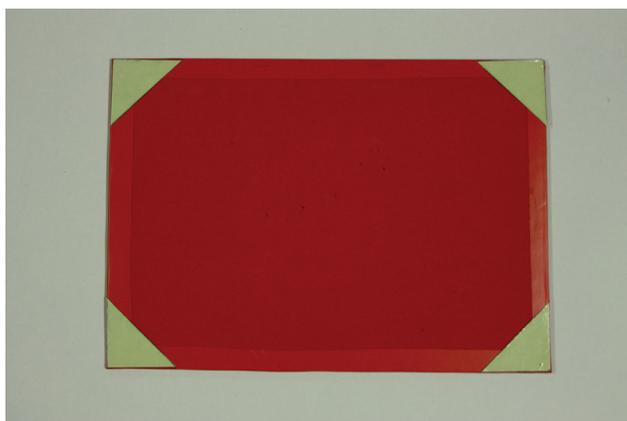
- desenvolver formalmente o conceito de da transformação simetria axial plana em torno de uma reta como uma função matemática;
- reconhecer propriedades de uma transformação simétrica em torno de uma reta, tais como sobrejetividade, injetividade e a existência de uma função invertível como uma função especial, chamada involução;

- demonstrar as principais propriedades da transformação simetria axial plana.

Por sua vez, é importante se salientar que o jogo Queimada com Obstáculos, realizado na folha de papel, pode ser vivenciado pelo aluno cego, se for empregado papel de gramatura 120g do tipo utilizado na escrita braile, ou ainda papel vegetal de mesma gramatura. Os campos do jogo, com os desenhos dos obstáculos e segmentos de reta, podem ser realizados em alto-relevo pelo próprio aluno-jogador com uma ferramenta artesanal do tipo “boleador”, ou com o uso de uma caneta esferográfica de ponta não muito fina. Ao utilizar o verso da folha, o jogador pode tatear e perceber os traços dos desenhos em alto-relevo.

Para realizar os traçados, o aluno com deficiência visual deve colocar a folha do papel especial sobre uma “prancha de apoio de desenho”, como a apresentada na Figura 4. Essa prancha é construída com uma folha de papelão cartonado do tipo Paraná (tamanho Ofício), recoberta por uma placa de plástico emborrachado fino do tipo EVA (espessura 0.3cm de Espuma Vinílica Acetinada) e possuindo quatro cantoneiras desse material, com as quais o aluno pode fixar o papel (tamanho A4).

Figura 4 - Prancha de apoio de desenho.



Fonte: Acervo do LEG.

A seguir, são apresentadas mais algumas considerações sobre a habilidade da visualização e também um recurso didático confeccionado com material de baixo custo que permite uma ligação entre a geometria escolar e desenhos em perspectiva com as Artes.

VISUALIZAÇÃO, DESENHOS DE ILUSÃO DE ÓTICA E EM PERSPECTIVA

É importante ser observado que, embora a maioria das representações dos objetos geométricos seja perceptível visualmente, é imprescindível não se confundir a habilidade da visualização, isto é, a habilidade de se perceber o objeto geométrico em sua totalidade, com a percepção sensorial das

diferentes representações possíveis desse objeto. Ou seja, não confundir *ver com os olhos da mente* (visualizar) com *ver o objeto* (a imagem real, visual ou tátil do objeto físico) por meio do aparato sensorial, principalmente daquele advindo das imagens visuais ou táteis geradas por um desenho (gráfico ou em auto-relevo), sinais, fotos, traçados gráficos computadorizados etc.

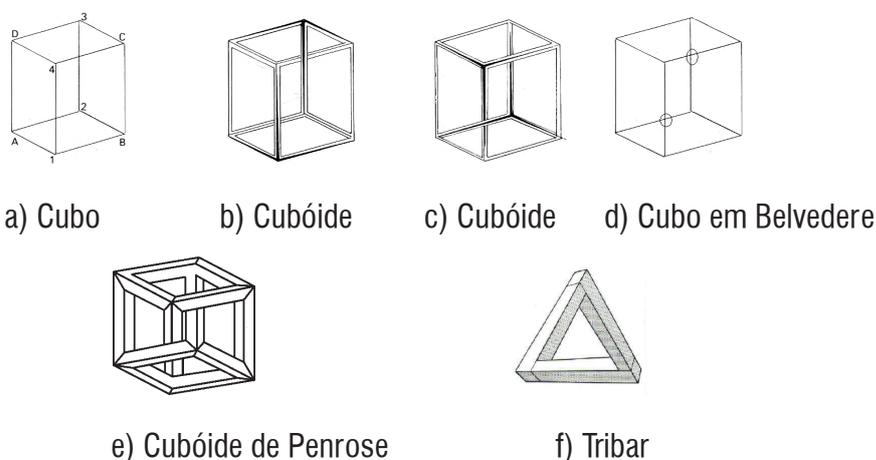
Na sala de aula, é importante que, como professores, estejamos atentos para o fato de que, no caso do aluno necessitar visualizar um objeto geométrico, um modelo concreto dele pode servir de representação visual ou tátil para gerar uma imagem mental desse objeto (é importante ser lembrado que, apesar de bem desenvolvidas, nem sempre as imagens virtuais computadorizadas permitem esse processo). Esta primeira imagem real dá partida a um processo de raciocínio visual/tátil no qual, dependendo das características do objeto, o aluno recorre à habilidade da visualização para executar diversas operações mentais, as quais geram outras imagens mentais ou representações do objeto. Essas podem ser expressas por meio de um desenho ou de outro modelo físico do objeto. É por essa razão que a utilização de uma grande variedade de modelos manipulativos concretos táteis representantes de uma mesma ideia geométrica, pode auxiliar o aluno a reconhecer que algumas propriedades do objeto geométrico transcendem suas propriedades materiais, tais como tamanho, cor e textura e, portanto, pertencem ao mundo ideal da Geometria.

Por sua vez, tem sido observado que muitos livros didáticos para o ensino básico apresentam figuras conhecidas como “ilusão de ótica”, até mesmo no volume dedicado à geometria do PNAIC (segundo, Brasil, 2014a). No entanto, essa estratégia educacional não é um procedimento recente, pois cabe lembrar que, os desenhos de ilusão de ótica passaram a ser divulgados no Brasil a partir da década de 1980, principalmente por meio de gravuras do ilustrador holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972). As obras deste artista são hoje amplamente conhecidas, pois ilustram livros escritos por matemáticos, físicos, químicos e filósofos, como também já aparecem em trabalhos de educadores e em livros didáticos para os anos iniciais do ensino fundamental, encantando professores e alunos (em <http://brisrav.com/optill/oreal.htm> encontram-se vários exemplos interessantes desses desenhos).

Nos meios relacionados à matemática escolar, chamam a atenção, principalmente aquelas obras criadas por Escher cujos traçados têm como base desenhos de figuras matemáticas ou foram concebidos aparentemente segundo as regras do desenho geométrico em perspectiva. Na Figura 5, estão alguns desses desenhos, chamados *cubóide e tribar*. Obras envolvendo elementos de uma perspectiva impossível podem ser encontradas nos desenhos desse artista e nelas aparecem as figuras mais interessantes do ponto de vista da ilusão de ótica geométrica.

Nos meios educacionais, têm sido muito divulgadas as gravuras de duas intrigantes litografias: Belvedere (1958) e Queda de Água (1961), sendo que esta pode ser vista no volume dedicado à geometria do PNAIC (BRASIL, 2014a, p.30). A primeira é baseada nos desenhos do *cubóide* e a outra, no *tribar*. Segundo o próprio artista, esses desenhos representam “o impossível como realidade”. Ou seja, representam figuras com formas de objetos tridimensionais impossíveis de serem construídos na realidade do mundo material, mas cujos traçados têm por base desenhos bidimensionais, como as apresentadas na Figura 5 (segundo Escher, 1989, p. 77-79).

Figura 5 - Ilusões de ótica consideradas por Escher.



Fonte: Construção do autor.

Por outro lado, como já citado anteriormente, no caderno de orientações sobre geometria do PNAIC, um dos principais objetivos do seu ensino na alfabetização é levar o aluno a “[...] observar, experimentar e representar posições de objetos em diferentes perspectivas, considerando diferentes pontos de vista e por meio de diferentes linguagens” (BRASIL, 2014b, p. 05). No entanto, segundo Kaleff (2003, 2008), há muitos anos, uma das preocupações dos estudos realizados no LEG/UFF é a busca por estratégias didáticas para levar o licenciando a refletir sobre como proceder para ensinar a criança a interligar essas figuras intrigantes de ilusão de ótica a desenhos em perspectiva. Cabe lembrar que, desde 1987, o curso de Licenciatura em Matemática da UFF banuiu as disciplinas de Geometria Descritiva de sua grade curricular.

Frente a todas essas constatações e antes de se considerar mais uma ferramenta interessante para o ensino dos desenhos em perspectiva, no Quadro 1, apresentam-se como, na prática do LEG, três perguntas que permitem o licenciando refletir sobre esse tipo de representação geométrica.

Quadro 1 – Questionamento ao licenciando

QUESTIONAMENTO AO LICENCIANDO

- Observe a Figura 6. O que você vê?
- Você acha que desenhos com figuras de ilusão de ótica, como o da Figura 5, podem motivar o aluno para temas da geometria escolar? Por quê?
- Você saberia dizer como tais figuras podem ajudar a levar o aluno a “ler desenhos” e ao entendimento de representações de objetos em perspectiva e do significado de um conceito geométrico?

- Como esses desenhos podem relacionar diversos aspectos da habilidade da visualização geométrica com outros das Artes, em uma tecedura de entrelaçamentos entre saberes como aquela preconizada pelos documentos PCN e PNAIC?

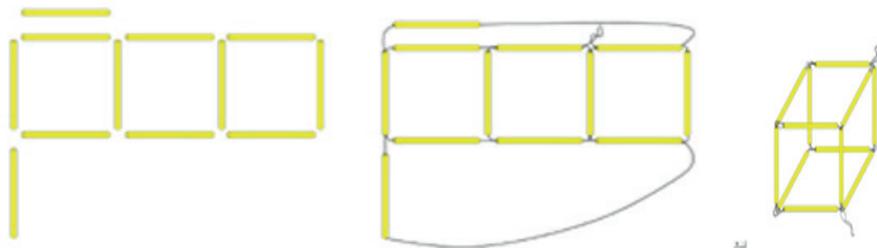
Figura 6 - Tela: uma jovem ou uma velha?



Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/YoungGirl-OldWomanIllusion.html>

No LEG, foi desenvolvida uma ferramenta didática chamada de “esqueleto móvel de um hexaedro com lados de mesma medida”. Um vídeo da construção desse aparelho, na qual são utilizados canudos plásticos e linha, encontra-se no experimento educacional “Poliedros de Platão e seus duais”, criado por Kaleff (2010) e licenciados. Na Figura 7, é apresentada a sequência dos passos da construção do aparelho.

Figura 7 - Passos da construção do esqueleto móvel de um hexaedro de mesma medida



Fonte: Construção do autor em <http://www.uff.br/cdme/>.

A atividade mais interessante a ser realizada com esse aparelho é a de levar o aluno, com cerca de 8 anos, a traçar e interpretar desenhos de hexaedros, como o de um cubo, como os apresentados na Figura 8, em uma situação de “aparente perspectiva”. Pois, segundo Kaleff (2003), o entendimento de tais desenhos é fundamental para a introdução da criança ao cálculo do volume de poliedros pelo empilhamento de pequenos cubos.

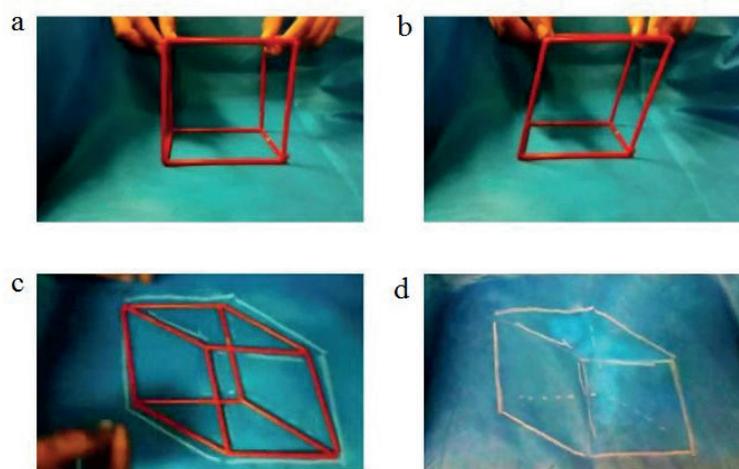
O uso do aparelho possibilita a visualização de um sólido geométrico, a introdução de algumas convenções referentes ao desenho em perspectiva, a percepção da dimensão de “profundidade de um sólido geométrico” em um desenho plano e até a entender o que há de estranho nos desenhos do cubóide, como apresentado por Kaleff (2008).

O aluno do Ensino Fundamental pode perceber, ao posicionar o aparelho sobre uma mesa de maneira que uma das faces fique apoiada sobre o tampo e quatro arestas sejam mantidas fora da mesa e, ao movimentá-lo paralelamente à mesa, chega à posição perpendicular a ela, obtendo a forma do cubo (Figura 8a). Em seguida, se por meio de um movimento de tombamento, o aluno depositar a estrutura sobre a mesa e observá-la, pode perceber que a forma de cubo vai se deformando e se transformando em um objeto aparentemente plano (Figura 8b). Este pode ser facilmente reproduzido em um desenho no papel, por meio do traçado do contorno de todos os canudos do aparelho (Figura 8c). Para tanto, deve-se levar o aluno a indicar, com linhas pontilhadas, os segmentos correspondentes aos canudos que ficam em contato direto com a mesa, mas que não pertencem ao contorno do esqueleto (Figura 8d).

É importante observar que, para o caso de um aluno cego ou com baixa visão, o desenho com o aparelho pode ser realizado sobre uma folha de papel vegetal de gramatura de 120 ou 180g. Esse papel permite fazer as impressões das linhas em alto-relevo e, portanto a sua percepção tátil.

Como pode ser visto na Figura 8d, o desenho obtido no papel é o de uma figura plana. Essa pode ser a do cubo representado em uma “aparente perspectiva isométrica ou paralela”, na qual todas as arestas apresentam a mesma medida. Não custa lembrar que a denominação “aparente perspectiva” decorre do fato de que, todas as arestas do desenho obtido com o aparelho apresentarem a mesma medida e não terem diferenças de tamanho, como deve ocorrer nos desenhos em perspectiva.

Figura 8 - Modelando o cubo e desenhando com o aparelho.

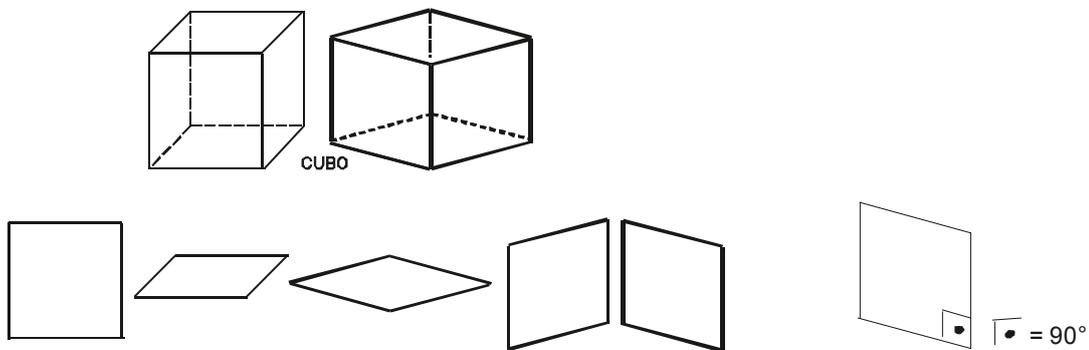


Fonte: Acervo do LEG.

Essa é uma maneira que, pode-se introduzir o aluno muito jovem ou com deficiência visual, nas convenções de desenho referentes às arestas posteriores e “ocultas” do cubo e a entender os desenhos do cubóide (com as arestas superpostas), apresentando tais arestas na forma de linhas tracejadas. Com essa ferramenta simples, leva-se o estudante a realizar procedimentos que permitem o entendimento das convenções de desenho relacionadas à simulação da dimensão da “profundidade”, bem como a perceber que formas quadradas do espaço podem ser representadas por outras formas de quadriláteros, como paralelogramos e losangos.

No LEG, tem sido observado que, as dificuldades relacionadas ao entendimento de desenhos como os apresentados na Figura 9, podem ser contornadas ainda com alunos muito pequenos com o uso do aparelho, sendo que, no caso dos alunos com deficiência visual, esses desenhos são apresentados em alto-relevo.

Figura 9 - Desenhos do cubo e representações de suas faces.



Fonte: Construção do autor

Nas aulas realizadas no LEG, ao final das atividades com o aparelho, o licenciando é apresentado a um questionamento do tipo do apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 – Questionamento ao licenciando

QUESTIONAMENTO AO LICENCIANDO

- Percebeu como esses desenhos do cubo estão relacionados com os do cubóide?
- Percebeu que o aparelho permite ao aluno observar a superposição dos canudos, em planos diferentes, mas que, no desenho obtido, isso não acontece?
- Você observou que isso também não acontecia nos desenhos do cubóide, estando todos os traços no mesmo plano do papel?

- Percebeu como um caso de ilusão de ótica pode ser útil na sala de aula?
- Percebeu que o aluno pode constatar que um quadrado pode aparecer com outra forma no desenho? Além disso, observou que o aluno vai entender com mais facilidade o que significa o símbolo  apresentado na legenda explicitada pelo desenho e que indica a expressão simbólica da existência geométrica de um ângulo reto?

Com a utilização desse aparelho, uma ferramenta didática tão singela, incentiva-se o futuro professor a realizar práticas que não só envolvem uma figura de ilusão de ótica de maneira lúdica, mas que também levam o aluno a desenvolver a habilidade da visualização e a entender o significado das representações, das relações e conceitos matemáticos envolvidos. Essas práticas, portanto, não são somente motivadoras para que a aula transcorra de maneira mais agradável, mas permitem uma aprendizagem significativa dos conceitos e estão de acordo com o preconizado pelas orientações do PNAIC.

FINALIZANDO

Com o apresentado, espera-se que o exemplo das ações realizadas no LEG incentive outros docentes dos cursos da licenciatura em Matemática a se aventurarem no caminho da elaboração de experimentos educacionais de baixo custo e que realmente venham a servir à Escola, aos professores brasileiros e à Educação Inclusiva. Experimentos e práticas que podem ser revisitadas e renovadas com o passar dos anos, sob a luz das mudanças sociais, científicas e tecnológicas.

Considerando que a universidade é um o espaço privilegiado de aprendizagem e ensino é, portanto, no espaço da “escola do professor”, ou seja, é nos cursos de licenciatura, que se deve assegurar a formação pertinente a esse profissional. Para tal, é urgente que se busquem novas formas de ensinar Matemática, as quais, no entanto, não podem estar dissociadas dos processos de aprendizagem, mesmo, ou principalmente, quando se trata da formação do professor. Urge, portanto, ter-se o olhar voltado para a realidade dos obstáculos a serem enfrentados e ao mesmo tempo questionar a formação que tem sido proporcionada ao professor de Matemática.

REFERÊNCIAS

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 52, 2003. p. 215-241.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais: primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental: matemática (1ª a 4ª séries)**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática (5ª a 8ª séries)**. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB. 2000.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Saberes Matemáticos e Outros Campos do Saber.** Brasília: MEC/SEB. 2014a. 80 p.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Geometria.** Brasília: MEC/ SEB. 2014b. 96 p.

_____. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Matemática. Apresentação.** Brasília: MEC/SEB. 2014c. 78 p.

_____. Casa Civil. Lei nº 13.005, de 25 de julho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação e dá outras providências. Brasília, DF: MEC/ SEB. 2014d.

ESCHER, M. C. **Escher on Escher: Exploring the Infinite.** Nova York: Abrams Publishers. 1989. 189p.

KALEFF, A. M. M. R. Uma Aplicação do Conceito de Simetria Axial Plana Visando a um Ensino Interdisciplinar, **Zetetiké.** Faculdade de Educação.UNICAMP. 1994. p. 85 - 91.

_____. Construindo o Conceito de Simetria em Relação a uma Reta: do Jardim de Infância ao 3º grau. **Boletim-Gepem.** Rio de Janeiro. nº 35, 2004. p. 42-56.

_____. **Vendo e Entendendo Poliedros.** 2ª Ed. Niterói: EdUFF. 2003. 208 p.

_____. **Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria.** Rio de Janeiro: UFF/UAB/CEDERJ. 2008. 223p

_____. ET AL **Poliedros de Platão e seus duais.** Banco Internacional de Objetos Educacionais. Projeto Condigital MEC - MCT. Universidade Federal Fluminense, UFF - Matemática; CDME. 2010. Disponível em: <<http://www.uff.br/cdme>>. Acesso em 10 de mar. 2014.

_____. ET AL **Simetria axial plana.** Banco Internacional de Objetos Educacionais. Projeto Condigital MEC - MCT. Universidade Federal Fluminense, UFF - Matemática; CDME. 2010. Disponível em: <<http://www.uff.br/cdme>>. Acesso em 10 de mar. 2014.

MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.) **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century.** Dordrecht: Kluwer. 1998. 353p.

RECEBIDO EM: 10 jun 2015

CONCLUÍDO EM: 30 ago 2015

