VIDYA, v. 35, n. 2, p. 55-74, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015. **ISSN** 2176-4603

GEOMETRIA EM COLETIVO - CONTRIBUTOS PARA A SUA COMPREENSÃO

GEOMETRY COLLECTIVE - CONTRIBUTORS FOR ITS COMPREHENSION

CRISTINA LOUREIRO*

RESUMO

O artigo teve como um dos objetivos apresentar e discutir uma compreensão dos momentos coletivos de discussão de tarefas de natureza exploratória de geometria. Os fundamentos da pesquisa situam-se na estruturação do raciocínio geométrico com base em contributos diversos, com especial incidência na perspectiva estruturalista, na qual toda a geometria é, em essência, uma maneira de estruturar o espaço e de estudar as consequências dessa estruturação. A investigação base deste estudo assumiu a forma de uma experiência de ensino em que o trabalho de campo foi constituído por dois episódios fundamentais. Conclui-se que os momentos de discussão coletiva foram fundamentais para identificar pontos críticos e decidir a ligação entre as tarefas e a sua natural sequenciação. Esses episódios dos percursos experimentados mostraram ser possível aproximar os três níveis do conhecimento matemático, tendo como ponto de partida o conhecimento matemático dos alunos. Nesta aproximação constituem focos fundamentais de atenção as tarefas implementadas e a sua sequenciação, os momentos coletivos e o papel do professor nesses momentos.

Palavras-chave: Séries iniciais. Geometria coletiva. Aprendizagem geométrica.

ABSTRACT

The article has one of the objectives present and discuss an understanding of collective moments of discussion of exploratory tasks in geometry. The basics of the research are located in the structuring of geometric reasoning based on various contributions, with particular emphasis on structuralist perspective, in which all geometry is, in essence, a way of structuring the space and to study the consequences of that structure. The basis of this study taken the form of an educational experience who's the work of field it was constituted of two fundamental episodes. It is concluded that the moments of collective discussion were essential to identify critical points and decide the connection between tasks and their subsequent sequencing. These episodes of experienced routes shown to be possible to approximate the three levels of mathematical knowledge taking as its starting point the mathematical knowledge of students. In this approach the fundamental focuses of attention are the implemented tasks and their sequencing, the collective moments and the role of the teacher in these moments.

Keywords: *Initial series. Collective Geometry. Geometric Learning.*

* Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa - e-mail: cristina@eselx.ipl.pt

INTRODUÇÃO

As ideias desenvolvidas neste texto decorrem de uma investigação que se debruçou sobre o estudo de Percursos Didáticos em Geometria, com base na realização de uma experiência de ensino nos 2º e 3º anos de escolaridade em Portugal. Um dos objetivos do estudo era identificar e compreender os contributos da fase de discussão coletiva de grande grupo na aplicação de sequências de tarefas matemáticas tendo em vista a construção de percursos didáticos. Para este artigo foi eleito como propósito apresentar e discutir uma compreensão dos momentos coletivos de discussão de tarefas de natureza exploratória de geometria.

No que respeita aos momentos, procuramos compreender de que modo o ensino poderá ser uma atividade na qual o professor orienta os esforços construtivos dos alunos, iniciando-os assim em formas partilhadas de conhecimento matemático, no sentido defendido por Cobb, Yackel e Wood (1992), o qual confere ao professor um papel de avaliador, mas também de explorador e de guia. Estes autores afirmam que, ao desempenhar este papel, o professor reformula e implicitamente legitima aspetos das contribuições matemáticas dos alunos, num processo que pode ser chamado de apropriação. Como alternativa à suposição de que aprender matemática é uma questão de adquirir representações rigorosas exteriores, estes autores sugerem que os alunos construam ativamente as suas formas de saber matemático à medida que são iniciados pelo professor nas práticas matemáticas partilhadas da sociedade. Nesta perspetiva, as oportunidades de aprendizagem surgem aos alunos individualmente à medida que participam nas interações sociais da sala de aula. Deste modo, quando nos concentramos mais na comunidade da sala de aula do que em cada aluno individualmente, as discussões de grande grupo são uma parte importante e significativa da institucionalização das formas matemáticas de conhecimento compatíveis com as da sociedade em geral. Esta perspetiva de ensino destaca três dimensões de referência relativamente à matemática: (1) as formas de conhecimento matemático individuais de cada aluno; (2) as práticas matemáticas partilhadas da comunidade de sala de aula; (3) as práticas matemáticas partilhadas da sociedade em geral. Segundo Cobb *et. al.* (1992):

> o papel do professor envolve fazer inferências sobre o que ele e os alunos podem partilhar para os fins que têm em mãos. O professor avalia a fecundidade potencial dos alunos, individual e coletiva, para a sua aprendizagem futura. Os pressupostos do professor, potencialmente susceptíveis de serem revistos, tanto sobre os entendimentos consensuais como sobre as concepções individuais dos alunos, constituem a base sobre a qual o professor seleciona as atividades de ensino e inicia e guia as discussões." (p. 11)

Seguindo também esta linha de abordagem, Chapman (2009) aponta-nos que o papel do professor deve ser enquadrado pela intenção de ouvir para aprender com os alunos e para conhecê-los matematicamente. Isto significa que o professor deve estar ciente e aceitar formas alternativas de pensar ou aproximar as ideias para ser capaz de reconhecer a lógica dos alunos. Deve acreditar que pode aprender alguma coisa com os alunos, procurando entender o seu conhecimento sobre um conceito, as suas estratégias, as suas experiências anteriores com o conceito e perspectivas pré-formadas, bem como a sua compreensão.

A investigação realizada teve assim uma motivação forte para compreender as três dimensões matemáticas identificadas por Cobb, Yackel e Wood, bem como a relação entre elas, através da vivência de uma experiência de ensino, prolongada no tempo, em que o investigador assumiu também o papel de professor.

O COLETIVO NA INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A complexidade social da sala de aula tem por base uma comunidade constituída por um grupo de indivíduos entre os quais se inclui o professor. É uma comunidade estável na sua constituição externa, um determinado grupo de alunos a que chamamos turma, mas que evolui de forma dinâmica no que respeita à sua constituição interna se pensarmos em cada um dos seus elementos, nas relações entre eles e também com o professor, aspetos que evoluem ao longo do ano letivo e, às vezes, ao longo de vários anos. No caso do 1.º Ciclo do Ensino Básico, em que os alunos têm entre 6 e 10 anos, a estabilidade é mais duradoura e a influência do professor mais profunda pois este é professor generalista e intervêm em várias aprendizagens dos alunos para além das aprendizagens matemáticas. Embora consciente desta complexidade, este estudo situa-se apenas na atividade matemática em alguns momentos s particulares de ensino, perfeitamente definidos e delimitados, e nas aprendizagens matemáticas realizadas. Fundamentamos esta análise na linha dos trabalhos iniciados por Yackel e Cobb (1996) que nos remetem para uma compreensão das dimensões sociais da aprendizagem da matemática baseadas em normas sócio matemáticas.

Esta linha orientadora tem sido fértil na produção de investigação. Limitamo-nos a apontar uma síntese restrita da investigação que fundamenta a pesquisa realizada (Quadro 1) para nos ajudar a ter uma ideia de um quadro teórico útil à compreensão da complexidade dos momentos s. Esta síntese foi organizada com base em três eixos: o professor, os alunos e a matemática. Incide principalmente em investigações que se debruçaram sobre a realização de momentos s na implementação de tarefas de natureza exploratória. Para este trabalho, recorremos também a um modelo compreensivo da implementação da tarefa baseado num quadro de referência constituído por três fases: (1) introdução da tarefa; (2) realização da tarefa; (3) discussão da tarefa, (Jackson, Garrison, Wilson & Shahan, 2013; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000). A fase de discussão coletiva é designada por *fase 3.*

Quadro 1 - Síntese de bibliografia que foca os momentos

Eixo	Ideias orientadoras	Referências
Professor	Práticas de orquestração dos momentos s	Smith & Stein (2011)
	Responsabilidade pelo raciocínio	Wood & Turner-Vorbek (1999)
	Formulação de questões	Boaler e Brodie (2004); Smith & Stein (2011)
	Validação do conhecimento construído	Smith & Stein (2011); Wood & Turner-Vorbek (1999)
	Selecção das ideias dos alunos e dilemas vividos pelo professor	Carter & Richards (1999); Jaworski (1999); Sherin, (2002)
Alunos	Responsabilidade por participar	Wood & Turner-Vorbek (1999)
	Responsabilidade pelo raciocínio (Reflexivo, para questionar, para justificar e desafiar)	Wood & Turner-Vorbek (1999)
	Validação do conhecimento construído	Wood & Turner-Vorbek (1999)

Matemática	Cultura matemática da sala de aula e gestão dos diversos tipos de conhecimento matemático	Goos, Galbraith & Renshaw (1999)
	Matemática socialmente partilhada	Cobb, Yackel & Wood (1992) Yackel e Cobb (1996)
	Práticas específicas ligadas à aprendizagem da geometria	Kobiela & Lehrer (2015)

Fonte: autora da investigação

Destacam-se os trabalhos de Wood e Turner-Vorbek (1999) que julgamos fundamentais para compreender e justificar a *fase 3* da implementação das tarefas. Estas autoras consideram que as práticas interativas e discursivas existentes na sala de aula estão ligadas ao desenvolvimento das capacidades de raciocínio matemático das crianças. O referencial de análise que criaram para compreender a relação entre o ensino e a aprendizagem numa interação professor e alunos em contexto de sala de aula em momentos s estabelece três categorias: raciocínio reflexivo; raciocínio para questionar; raciocínio para justificar e desafiar Neste trabalho, a natureza do ensino é vista como uma mudança de uma posição em que o professor dava a informação aos alunos para uma nova ordem em que o professor faz perguntas para que os alunos se tornem agentes que constroem e fornecem o conhecimento matemático.

A *fase 3,* o momento da partilha, está desligado à implementação global da tarefa. Para compreender esta fase recorremos ao referencial proposto por Smith e Stein. Estas investigadoras (SMITH & STEIN, 2011) apresentam e desenvolvem cinco práticas para usar as respostas dos alunos e avançar no conhecimento matemático da turma, como um todo: (1) Antecipação; (2) Monitorização; (3) Seleção; (4) Sequenciação; (5) Conexão. Estas práticas estão interligadas entre si e esta ordem de apresentação é importante.

A antecipação pressupõe a previsão das respostas dos alunos proporcionadas por tarefas matemáticas desafiadoras. Envolve mais do que apenas decidir se o nível de dificuldade da tarefa é ou não adequado aos alunos. Exige que o professor preveja as estratégias que os alunos vão usar e estabeleça uma teia entre elas, considerando tanto as estratégias corretas como as incorretas. Isso exige que o professor explore o problema ou questão de todas as maneiras possíveis. Para isso é importante o trabalho colaborativo com outros colegas, bem como o conhecimento de utilizações anteriores da mesma situação ou sugestões que são disponibilizadas em materiais educativos de apoio. O conhecimento sobre resultados da investigação também pode dar contributos significativos, através de exemplos de estratégias identificadas e analisadas.

A monitorização envolve o acompanhamento do trabalho dos alunos na fase de resolução (*fase 2*). O conhecimento que o professor tem destes trabalhos permite-lhe fazer um plano flexível para a discussão que pretende dinamizar. Uma sugestão eficaz é a organização prévia de uma lista de estratégias previstas, antecipando as resoluções dos alunos. Esta lista, que é completada durante a fase de resolução, permite ao professor apreender e registar as ideias fundamentais, associando-lhes quem são os alunos responsáveis por elas, e ajuda a discussão. A fase de monitorização envolve mais do que observar e ouvir os alunos. Cabe também ao professor fazer perguntas que ajudem a desocultar o raciocínio dos alunos e os levem a considerar aspetos significativos da tarefa e aos quais poderão não ter dado atenção. A partir destas o professor tem a possibilidade de aceder ao que os alunos estão a compreender sobre o problema ou situação, bem como quais as ideias matemáticas que estão envolvidas.

A seleção criteriosa de alunos para apresentar trabalhos em momentos coletivos decorre da prática de monitorização e é um contributo imperioso para a discussão. Ao selecionar, o professor procura o controle da situação orientado pelos objetivos matemáticos da tarefa em causa. Tendo monitorizado as estratégias usadas pelos alunos, o professor pode selecionar aqueles que serão convocados a apresentar o seu trabalho à turma, tendo assim um maior controle da situação. O professor pode informar previamente os alunos de que vão ser chamados a apresentar o seu trabalho ou então recorrer estrategicamente ao apelo a voluntários. Uma ideia importante é que o professor mantenha sempre o controle da discussão matemática e a oriente de acordo com os objetivos que estabeleceu. Por esta razão a prática seguinte é tão importante.

A sequenciação das apresentações dos alunos deve ser planeada. Ao fazer as escolhas dos trabalhos a apresentar, o professor tem em conta o seu potencial de discussão. Smith e Stein (2011) consideram que deste modo o professor pode maximizar as hipóteses de atingir os objetivos que pretende com a discussão. Uma das preocupações evidenciadas é a de que a discussão seja acessível ao máximo de alunos e que estes estejam envolvidos. O equilíbrio na apresentação de estratégias mais e menos frequentes, bem como a orientação do concreto para o abstrato são ideias importantes que o professor precisa combinar. Tanto a validação das estratégias usadas, como o esclarecimento de mal entendidos pode decorrer da própria discussão. A última palavra será sempre do professor e ele pode usá-la para relacionar e comparar as estratégias apresentadas. As vantagens da existência de um plano de apresentações estão bem espelhadas nestas ideias que Smith e Stein apresentam. Ao realizar esse plano, o professor como que antecipa a discussão e pode assim iluminar o melhor possível as ideias matemáticas chave da discussão. Deste modo o professor estará melhor preparado para lidar com respostas inesperadas que podem ser incluídas na sequência à medida que toma decisões finais sobre o que vai ser apresentado ou mesmo depois já durante a apresentação. Embora estas autoras afirmem que é necessário realizar mais investigação sobre métodos de sequenciação, enfatizam e avançam com a ideia de que sequências particulares, já conhecidas, podem ser usadas para definir objetivos para uma aula.

Finalmente, o papel do professor é ligar as diferentes respostas, ligando-as também com as ideias matemáticas importantes. O professor pode ajudar os alunos a tirar inferências das diferentes abordagens, a analisar as consequências das estratégias usadas, nomeadamente no que respeita à sua precisão e eficácia, bem como a analisar os padrões matemáticos que delas decorrem. Smith e Stein (2011) afirmam que:

> mais do que obter discussões matemáticas formadas por apresentações separadas ou diferentes maneiras de resolver um problema, interessa que as apresentações dos alunos se articulem umas nas outras para construir e desenvolver ideias matemáticas poderosas" (p. 11).

Estas autoras consideram que "esta é a mais desafiante das cinco práticas porque convida o professor a elaborar perguntas que tornarão a matemática visível e compreensível" (p. 49). As perguntas desempenham um papel fundamental no estabelecimento de conexões e permitem clarificar e aprofundar o que os alunos sabem. Elas focam-se nos significados e relações matemáticas e estabelecem ligações entre as ideias matemáticas e as representações.

Os vários autores que têm estudado práticas sociais na sala de aula afirmam que um dos grandes desafios associados a uma prática centrada no trabalho dos alunos é a exigência de equilíbrio entre o valor matemático dos trabalhos de cada aluno ou de grupos de alunos e a garantia de que este trabalho é reconhecido e aceite do ponto de vista matemático. Esta exigência está expressa na atenção simultânea que o professor precisa dar aos contributos individuais dos alunos e ao movimento coletivo que tem de imprimir a toda turma para avançar, garantindo que o conjunto de ideias e processos em jogo são largamente aceites como tendo valor e importância matemática e como necessários para aprendizagens matemáticas escolares futuras. É um equilíbrio com que o professor tem de ter uma preocupação permanente, pois qualquer afastamento num sentido ou noutro pode por em perigo o acompanhamento pelo grupo ou as possibilidades de avanço futuro. Se o valor do conhecimento matemático fica ao nível dos contributos parcelares de cada aluno ou grupos de alunos, pode não haver avanço das ideias matemáticas. Se o professor avança demasiado no conhecimento matemático construído com as conexões que estabelece, muitas vezes entusiasmado por algum aluno com melhores capacidades, pode pôr em perigo o acompanhamento por todo o grupo.

Outro aspeto a ter em conta neste modelo é o seu contributo para a compreensão do papel de validação do conhecimento, construído e partilhado com os alunos. A utilização coletiva de estratégias ou soluções erradas com grande potencial de discussão coletiva cria outro desafio ao professor. Neste caso, o desafio entre ser ele a identificar e denunciar o erro ou conseguir que sejam os alunos a fazê-lo recorrendo aos seus raciocínios.

Importa ainda destacar que estes autores reconhecem que a utilização deste modelo pode ajudar o professor a avaliar a eficácia do seu ensino e a melhorá-la. Estes autores afirmam que à medida que os professores ganham confiança na sua aplicação a uma tarefa específica, a discussão coletiva baseada na tarefa vai-se tornando matematicamente mais sofisticada. Reconhecem, ainda, que ao longo do tempo, e associando este tipo práticas a um trabalho colaborativo entre professores, o desempenho dos professores neste tipo de orquestração dos momentos coletivos pode desenvolver-se bastante (STEIN *et al*, 2008).

Esta orientação da *fase 3* de implementação da tarefa evidencia a importância das outras duas fases. A *fase 2*, da qual decorre todo o processo de seleção e de sequenciação das soluções ou resoluções a apresentar, e a *fase 1* que está intimamente ligada com a antecipação. É natural por isso que numa primeira experiência de implementação de uma tarefa esta orquestração tenha falhas e que seja a experiência do professor e o conhecimento que vai adquirindo que o ajuda a manter os equilíbrios desejáveis nesta orquestração.

APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

De uma forma geral, existe a concordância de que as crianças possuem vasto conhecimento informal de geometria (LEHRER & CHAZAN, 1998) e que este pode ser usado como base para a aprendizagem da geometria e do raciocínio espacial, constituindo assim uma plataforma de partida para a matemática formal (GRAVEMEIJER, 1998).

Os fundamentos da pesquisa realizada situam-se na estruturação do raciocínio geométrico com base em contributos diversos, com especial incidência na perspetiva estruturalista de Battista, Clements, Arnoff, Battista e Borrow (1998). Estes investigadores afirmam que toda a geometria é, em essência, uma maneira de estruturar o espaço e de estudar as consequências dessa estruturação. Eles reconhecem que estudar os processos através dos quais os alunos estruturam o espaço oferece-nos uma nova e poderosa perspetiva para investigar a construção da geometria e das ideias espaciais pelas crianças.

Estruturar espacialmente um objeto determina a sua natureza, ou forma, pela identificação das suas componentes espaciais, pela combinação das componentes em composições espaciais, e pelo estabelecimento de inter-relações entre as componentes e os compostos. Por exemplo, um geoplano é um instrumento de estruturação espacial através de uma malha quadriculada de linhas perpendiculares, uma estrutura ortogonal isométrica. Ao utilizá-lo para representar retângulos estamos a estruturar espacialmente o retângulo. Se os lados do retângulo coincidem com as linhas da malha quadriculada a estruturação é direta. Se o retângulo está numa posição inclinada, a sua estruturação espacial exige outro tipo de recurso. Por exemplo, o destaque de ângulos retos, como componentes do retângulo, pode ser uma maneira de estruturar esta figura e identificá-la em qualquer posição.

Ao analisar um conjunto de retângulos diferentes, e ao identificar como invariante a existência de quatro ângulos retos, estamos perante uma estruturação geométrica desta figura. De certa forma, libertamo-nos dos protótipos isolados de retângulo que temos em presença para construir um modelo de retângulo. Este esquema conceptual permitir-nos-á reconhecer se um dado quadrilátero é ou não um retângulo. Neste esquema conceptual é desejável que o quadrado seja reconhecido como um retângulo, um retângulo especial como dá jeito e é recomendável que as crianças o considerem.

Battista (2008, p. 138-139), desenvolve a ideia de que a aprendizagem da geometria pode ser encarada como envolvendo três tipos de estruturação:

> (a) *Estruturação espacial*, que constrói a organização espacial ou forma de um objeto ou de um conjunto de objetos. Ela determina a percepção/concepção da natureza de um objeto ou forma, através da identificação de componentes do objeto espacial, combinando componentes em compósitos, e estabelecendo relações entre componentes e compósitos.
> (b) *Estruturação geométrica*, que descreve a estruturação espacial em termos de conceitos de geometria formal. Isto é, na estruturação geométrica de uma situação espacial, o sujeito usa os conceitos de geometria como ângulos, declive, paralelismo, comprimento, retângulo, sistemas de coordenadas, e transformações geométricas para conceptualizar e operar sobre uma dada situação. Para que a estruturação geométrica faça sentido para alguém, ela terá que evocar uma estruturação espacial adequada.
> (c) *Estruturação lógico formal*, que organiza os conceitos geométricos (isto é, as estruturas geométricas) num sistema e que especifica as relações que podem ser descritas e estabelecidas através de raciocínio lógico. Para chegar à estrutura lógica, o indivíduo deve organizar logicamente conjuntos de propriedades.

Este terceiro tipo de estruturação corresponde a níveis mais avançados de escolaridade. No entanto, é importante referir que o desenvolvimento de uma boa estruturação lógico formal depende de uma boa estruturação geométrica, assim como, o desenvolvimento de uma boa estruturação geométrica depende da qualidade da estruturação espacial. A relação entre estes tipos de estruturação não deve ser encarada como uma hierarquia fechada, de sentido único. Estas organizações são muito úteis para o entendimento de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e para o planeamento de cadeias de tarefas e consequente obtenção de percursos didáticos.

A INVESTIGAÇÃO REALIZADA

A investigação base deste estudo assumiu a forma de uma experiência de ensino em que o trabalho de campo foi constituído por dois períodos fundamentais. O primeiro período, em que as tarefas foram experimentadas isoladamente em mais do que uma sala de aula, assumido a investigadora o papel de observadora participante, e o segundo que circunscreveu a experiência a uma única sala de aula e foi marcado por um duplo papel desempenhado pela investigadora ao assumir a liderança da *fase 3* da implementação das tarefas. Neste segundo período, que ocorreu em dois anos letivos seguidos, foram gravadas em vídeo as aulas onde as tarefas foram implementadas. Posteriormente, foram identificados como unidade de análise vários episódios relevantes da fase de discussão coletiva das tarefas. O objetivo era compreender a ligação entre as tarefas organizadas em percursos didáticos. A experiência decorreu numa escola de nível sócio econômico médio baixo e os alunos da turma do 3º ano de escolaridade tinham entre 8 e 9 anos de idade.

As tarefas experimentadas são de natureza aberta e proporcionam discussões coletivas que têm por base as produções dos alunos. São tarefas de muito fácil adesão, pois a sua compreensão é muito simples e envolve-os rapidamente na atividade, em que podem raciocinar e agir de modo pessoal e significativo. As tarefas eram resolvidas individualmente, tendo cada aluno uma folha de registo própria. Apresenta-se um exemplo de um dos quatro percursos didáticos experimentados (Quadro 2).

Quadro 2 - Tarefas integrantes de um percurso didático

	Objetivo da tarefa
1	Construir quadrados num geoplano de 5 por 5.
2	Construir retângulos num geoplano de 5 por 5.
3	Construir quadriláteros com pelo menos um ângulo reto num geoplano de 5 por 5.
4	Identificar, em quadriláteros construídos, ângulos agudos e obtusos.
5	Descobrir ângulos retos, agudos, obtusos e super obtusos em polígonos dados em papel branco.
6	Construir, em papel branco, triângulos com: (1) um ângulo reto, (2) um ângulo obtuso, (3) nenhum ângulo reto e nenhum ângulo obtuso.

Nota - Super obtuso é um ângulo maior que 2 retos.
Na nomenclatura norte americana é designado por ângulo reflexo.

A partir dos registos individuais de cada aluno eram escolhidas figuras para organizar uma exposição que servia de suporte visual à discussão coletiva (Figura 1).

Figura 1 - Exposição de quadrados e retângulos relativos às tarefas 1 e

Fonte: arquivo pessoal da investigadora

A sequenciação das tarefas de cada percurso não foi definida previamente tendo sido construída à medida que a experiência decorreu. Os momentos de discussão coletiva foram fundamentais para identificar pontos críticos e decidir a ligação entre as tarefas e a sua consequente sequenciação.

DOIS EPISÓDIOS DE UM MOMENTO COLETIVO

Os dois episódios que apresento são retirados do mesmo momento coletivo, o qual diz respeito à discussão das tarefas 1 e 2 de um dos percursos estudados (Quadro 2). Para a discussão coletiva estavam expostos trabalhos com todas as soluções possíveis de quadrados e retângulos (Figura 1). Cada aluno tinha no seu lugar as suas duas folhas com o respetivo trabalho das tarefas 1 e 2. Alguns alunos tinham descoberto as 16 figuras possíveis, outros tinham apenas algumas delas. Na exposição foram inicialmente colocadas algumas figuras repetidas.

Episódio A - *O retângulo que não é retângulo*

A discussão foi dinamizada pela investigadora e pela professora titular da turma, embora o papel dominante seja o da investigadora. Esta colaboração foi possível graças à cumplicidade que foi sendo estabelecida entre as duas ao longo do tempo de colaboração. Os alunos aceitam a investigadora também como sua professora. A investigadora inicia a discussão com uma breve introdução.

> Investigadora - *As pessoas podem ter opiniões diferentes. Nós podemos pensar uma coisa e vocês pensarem outra. Vocês têm que dizer o que pensam. Vão estar com muita atenção. Para não estarem a repetir coisas que já disseram. Do lado direito, que figuras estão?*
> Alunos em coro - *Quadrados.*
> Investigadora - *Mais alguém tem algum quadrado que não esteja ali?*

Alunos em coro - *Não.*
Investigadora - *E agora, do lado esquerdo, que figuras estão?*
Alunos em coro - *Retângulos*.
Investigadora - *Há algum de vocês que tenha alguma figura para colocar aqui que não esteja ainda exposta?*

Duas alunas levantam o dedo no ar, a Inês e a Beatriz. As alunas vêm ao quadro para expor as figuras já devidamente ampliadas para a exposição. Quando elas mostram as suas figuras há uma reação imediata de alguns colegas.

Dois alunos em coro - É um paralelogramo.
Investigadora - *Calma, calma. A Inês vai dizer porque é que ela acha que é um retângulo. E quem não concordar vai dizer porque é que não concorda. Mas primeiro vamos ouvir a Inês.*

Numa discussão coletiva desta natureza é importante a ter em consideração a dificuldade de crianças desta idade, estarem com atenção e serem capazes de esperar sem dizer logo o que pensam e sem repetir o que outros já disseram, aspeto muito comum nestas idades. Além disso, é importante ter em conta o tempo que cada aluno leva a pensar, bem como a dificuldade de expressar o seu raciocínio. A possibilidade de dar voz a vários alunos e não serem sempre os mesmos, os mais rápidos a intervir, é uma preocupação muito importante a destacar (prática de sequenciação segundo Stein & Smith, 2011). Em alguns casos percebe-se que o aluno está convencido das suas razões, no entanto não consegue expressar verbalmente e tem que se socorrer das figuras e de gestos para conseguir explicar o que pensou. Neste caso a aluna que veio expor o seu retângulo está insegura e fica a pensar. A professora procura ajudá-la.

Professora - *Porque é que desenhaste esta figura a pensar que era um retângulo?*
Inês - *Eu pensei (que) talvez podia ser um retângulo* [e aponta para dois lados paralelos].
Professora - É muito parecido com qual?
Inês - [A aluna aponta para outro retângulo já exposto]. *Fiz assim.* [aponta para os lados da figura que fez].
Investigadora - *Quem não concorda que é um retângulo?*

Neste momento há três alunos que levantam o dedo. É preciso escolher um deles para explicar o seu argumento de rejeição da figura construída pela colega.

Investigadora - *Diz lá Zé, porque achas que não é um retângulo?*
Zé - *Porque isso não é um retângulo. Porque é repetido.*
Investigadora - *Não é repetido. Porque é que achas que não é um retângulo?*
Zé - ...
Investigadora - *Tu achas que não é, mas ainda não consegues explicar. Não faz mal.*

A investigadora chama outro aluno, o Hugo. Este aluno é mais fraco e um aluno muito pouco interventivo por sua iniciativa própria.

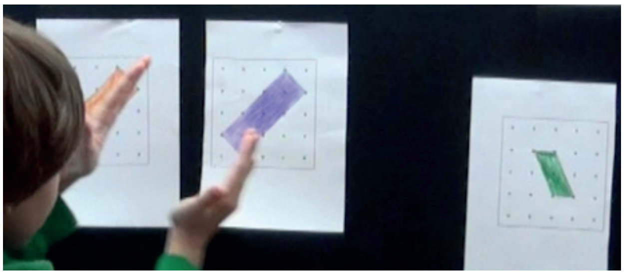
Hugo - *Não é porque tem assim 2 bicos para o lado.*
Professora - *Anda cá ao quadro.*

O Hugo vai ao quadro e contorna com os dedos o paralelogramo. Aponta dois lados opostos e diz que está inclinado por comparação com os retângulos em que não está inclinado.

> Investigadora - *Quem é que é capaz de dizer o que o Hugo está a explicar por outras palavras?*
> Duarte - *Não é retângulo porque está torto.*
> Professora - *Vem cá explicar.*
> Duarte - *Em vez de ser assim* [gesto] *está assim* [gesto].

No primeiro gesto, com as mãos faz dois segmentos paralelos ao alto | | e depois faz dois segmentos paralelos inclinados / /. Durante esta exposição vai comparar com outra figura exposta, um retângulo inclinado (Figura 2).

Figura 2 - Comparação entre as figuras expostas

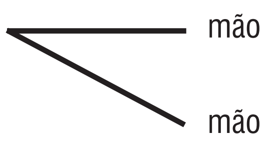


Fonte: arquivo pessoal da investigadora

Este aluno mostra claramente com os gestos que faz está a comparar a relação entre os lados e não a ter em conta a posição que o retângulo, como um todo, tem no desenho. Ambas as figuras estão inclinadas. Ao colocar as duas mãos sobre os lados, de cada uma delas, o aluno está a evidenciar partes de cada figura.

Este episódio torna claro o que pode ser identificado ao recorrer aos elementos de uma figura, mostrando um entendimento de sua estruturação espacial. Esta opção é claramente diferente de olhar para o todo e não identificar nem relacionar as suas partes. Para este aluno a estruturação espacial parece estar já muito desenvolvida. O aluno, com as mãos, representa o ângulo não reto que o leva a concluir que a figura não é um retângulo (Figura 3).

Figura 3 - Posição das mãos do aluno sobre o paralelogramo



Fonte: autora

O aluno tenta explicar, mas sem falar vai fazendo gestos com as mãos. Com estes gestos mostra várias vezes o paralelismo dos lados. Para forçar o aluno a confirmar o seu raciocínio, a investigadora questiona o argumento dele.

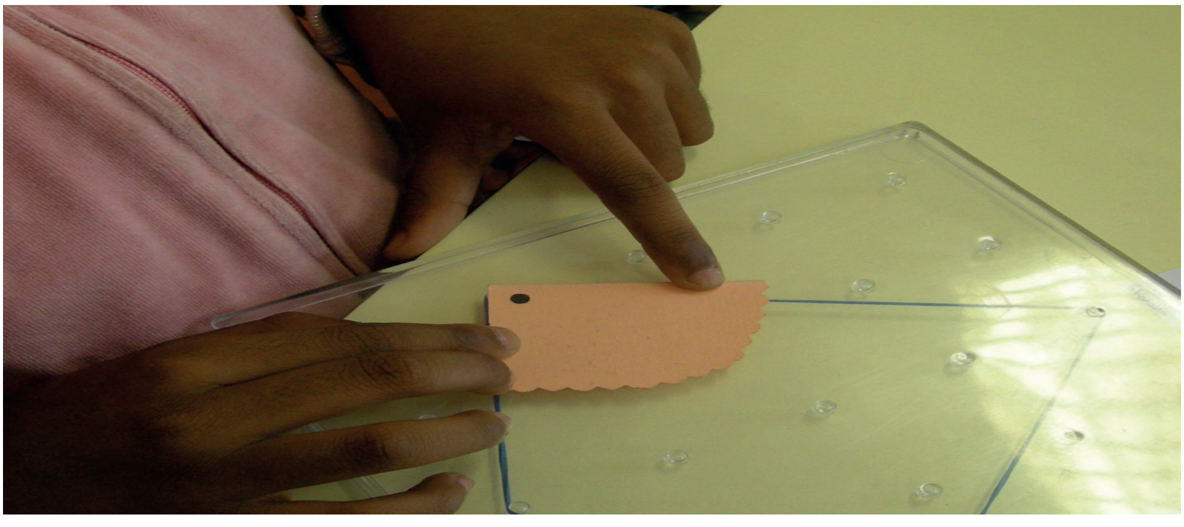
> Investigadora - *Mas este também está assim* [apontando para um retângulo inclinado e representando os lados paralelos com as mãos].

Há outros alunos que manifestam vontade de falar e argumentar, mas o Duarte mantém-se sempre junto ao quadro tentando explicar o eu raciocínio.

> Duarte - *Mas este está assim [apontando com os dedos os 2 lados que fazem um ângulo reto.] Esta coisa aqui [Vai apontando] dá reto.*
> Investigadora - *Há alguém que queira ajudar o Duarte a explicar aquela coisa ali?*
> Duarte - *Vértice. Ângulo.*

Esta discussão tornou evidente a necessidade de enriquecer a linguagem dos alunos e de lhes proporcionar um instrumento de destaque e comparação de ângulos, o "detetor de ângulos retos" como passou a ser designado. Na preparação das tarefas (prática de antecipação segundo Stein & Smith, 2011) tínhamos previsto a necessidade de confirmar, rapidamente e com eficácia, se um ângulo de um quadrilátero é ou não reto. O detetor de ângulos retos é introduzido assim de forma significativa como instrumento indispensável para a identificação de ângulos retos principalmente em posições "não direitas" ou quando não há estrutura ortonormada auxiliar. Este instrumento surge como uma solução eficaz para concretizar a ideia de ângulo reto que os alunos tinham e que verbalizavam com a ajuda de gestos.

Figura 4 - Identificação de um ângulo com o detetor de ângulos reto



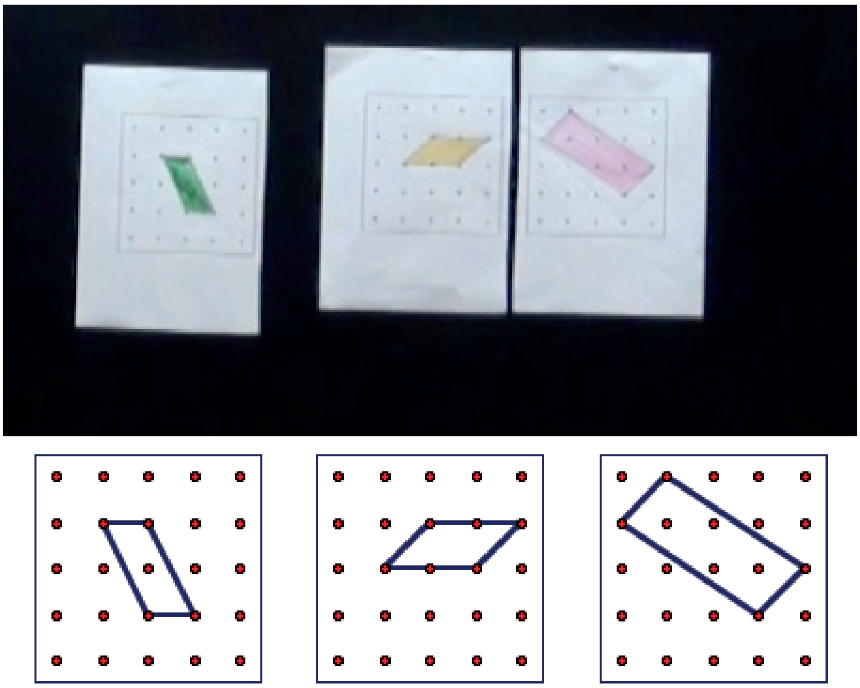
Fonte: arquivo pessoal da investigadora

Este objeto, a que chamamos “detetor de ângulos retos”, não é mais do que um canto de uma folha A4 cortado de maneira a ser facilmente manipulado e já tinha sido bastante usado em anteriores experiências destas tarefas com outros alunos. Com estes alunos este objeto nunca tinha sido usado.

Episódio B - *Os paralelogramos quase retângulos*

Depois de introduzido o “detetor de ângulos retos” a discussão continuou porque havia ainda quadriláteros que tinham sido construídos pelos alunos como retângulos e que não tinham sido validados por todos (Figura 5). É então exposta no quadro outra figura, um paralelogramo ainda mais aproximado a um retângulo.

Figura 5 - Figuras construídas pelos alunos como sendo retângulos



Fonte: arquivo pessoal da investigadora

Zé - *Essa já está.*
Investigadora - *E aquele agora ali?*
Zé - *Ah, não, não está!*
Investigadora - É ou não é?
Alguns alunos em coro - É um retângulo.
Investigadora - É um retângulo?
Alunos em coro - É.
Investigadora - E como é que têm a certeza de que é?

Entretanto o aluno que está junto ao quadro, o Zé, vai dizendo baixinho que não é. Há alunos com o braço no ar. A investigadora leva os alunos a observarem um retângulo que está numa posição análoga à da figura que está em discussão.

> Investigadora - *Como é que têm a certeza de que ele não está um bocadinho inclinado? Como é que podem ter a certeza de que este, que é parecido com este que está aqui ao lado, que parece que está inclinado, é mesmo um retângulo? Quem é que consegue dizer de uma maneira para todos ficarem convencidos de que é?*
> Professora - *Diz lá Inês.*
> Inês - *Porque, se este, se nós pusermos assim, em pé. [E com as mãos e os dedos faz gestos]*

Esta aluna acompanha esta frase fazendo gestos com as mãos e os dedos. A professora intervem para sugerir à aluna que coloque o retângulo "de pé". A aluna move a figura para ficar numa posição prototípica dos retângulos, Este paralelogramo é um excelente contra-exemplo, visualmente a olho nu parece mesmo um retângulo. É preciso olhar com atenção e analisar com cuidado para ter a certeza de que não é retângulo. A rede ponteada ajuda a justificar porque razão não é retângulo, no entanto esse raciocínio geométrico não é simples nem acessível a estes alunos.

> Inês - *Se colocasse assim era [e aponta para os lados]. Como está ao contrário.*
> Professora - *Parece que não, mas é?*
> Inês - *Está um bocadinho torto.*

A aluna continua a olhar e inclina a cabeça para tentar ver o quadrilátero na posição que lhe parece mais favorável. A professora volta a colocar a figura na posição em que se encontrava originalmente e pergunta aos alunos como é que eles acham que conseguem descobrir se era ou não. A Inês continua com dúvidas e volta a rodar a cabeça quando o quadrilátero é reposto na posição original. A aluna mantem-se no quadro e há outro aluno que vem mostrar como pensou.

> Duarte - *Isto aqui não é um retângulo [E aponta para o quadrilátero que está ao lado], está com estes lados assim [e aponta]. Este aqui também está, mas não está com os lados assim [e aponta].*

O Duarte não consegue explicar, só faz gestos. Perante este facto a investigadora sugere que recorra ao detetor de ângulos. Este aluno coloca o detetor sobre a figura, mas não diz nada. Observa-se bem que não é possível justapor os dois lados do objeto com os lados do quadrilátero e é uma aluna que faz um comentário alto.

> Leonor - *Está ali uma pontinha de fora.*

O aluno é então levado pela professora a verificar no retângulo ao lado se nesta figura todos os ângulos são retos. A professora ajuda o aluno. Vai chamando a atenção para a exigência de bater certo em todos os ângulos. O aluno vai rodando com o detetor e confirma que nessa figura todos os ângulos são retos.

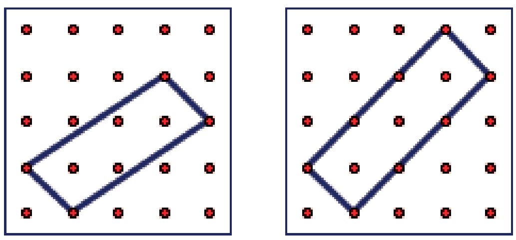
Duarte - *Já está.*
Professora - *Esse retângulo que viste agora tem 4 quê?*
Duarte - Ângulo.
Professora - *E todos igu...*
Alunos em coro - *Iguais.*
Professora - *Neste caso como se chamam? Todos os* ângulos ...
Alunos em coro - *Retos.*
Professora - Ângulos retos. E o Duarte *começou a olhar para aquela figura e o que é que ele observou*?
Zé - *Que não é um retângulo*.

O Duarte continua no quadro e decide ir verificar os ângulos de outra figura. Um a um, confirma que os ângulos dessa figura não são retos.

Investigadora - *Diz lá.*
Duarte - [O aluno murmura e não se ouve nada.]
Professora [Falando para todos os alunos] - *Ele está a dizer que aquela figura não é um retângulo porque ...*
Duarte - [Aponta para um ângulo que não é reto.]
Aluna - *Está ali um bocadinho de fora*.
Professora - *Então já não é um ângulo reto, pois não*?
Duarte - *Não.* [Agora totalmente convencido.]

É pedido então a todos os alunos que representem, primeiro no seu geoplano e depois na sua folha de trabalho, mais este quadrilátero que ficará junto do retângulo que têm desenhado (Figura 6). Ao lado vão escrever "não é retângulo porque não tem os 4 ângulos retos".

Figura 6 - Quadriláteros construídos como contra-exemplo e exemplo de retângulo



Depois deste episódio pensamos que estava terminada a discussão sobre a decisão de inclusão ou não, na exposição, das figuras feitas por todos os alunos. Embora tivéssemos planejado avançar no estabelecimento da classe dos retângulos, inclusiva para os quadrados a partir da mesma exposição de quadriláteros, (prática de antecipação segundo Stein & Smith, 2011), não tínhamos pensado como seria a sequenciação e conexão entre as ideias. Porém, a intervenção de uma aluna veio originar um segundo momento de discussão e ajudar-nos a avançar na discussão. Esta aluna levantou-se e veio ter com a investigadora dizendo que tinha um retângulo. Este retângulo era um quadrado. A investigadora toma a decisão de convidar a aluna a mostrar a figura a todos os colegas partilhando assim a sua análise do quadrado como figura composta com 4 ângulos retos.

CONCLUSÕES

Estes dois episódios, “O retângulo que não é retângulo” e “Os paralelogramos quase retângulos” centram-se na observação e análise de quadriláteros que são quase retângulos e que exigem algum tipo de raciocínio geométrico para os validar como contra-exemplos de retângulos. Os episódios apresentados permitiram evidenciar aspetos importantes da estruturação espacial, chamando a atenção para os elementos que compõem uma figura, neste caso os ângulos e os lados. Permitem também identificar a complexidade da distinção de retângulo como figura e de retângulo como classe de figuras (LOUREIRO, 2015a, 2015b, 2015c).

Os dois referenciais de análise de cada episódio (Quadros 3 e 4) oferecem uma visão estruturada dos episódios a partir da ações muito pontuais que designamos por átomos. Esta atomização destaca o tipo de prática de orquestração envolvida (SMITH & STEIN, 2011) e o papel do professor (Quadro 1), o papel dos alunos (Quadro 1) e a natureza do raciocínio matemático envolvido na ação identificada.

Quadro 3 - Referencial de análise do episódio A de uma discussão coletiva

	Átomos da ação do episódio	Professor	Alunos	Raciocínio geométrico
A1	Exposição com todas as figuras e algumas repetidas	Antecipação e Monitorização Validação em coletivo	Responsabilidade por participar Reflexão	Classes de figuras Estruturação geométrica
A2	Apresentação de uma figura incorrecta	Antecipação e Monitorização Responsabilidade pelo raciocínio	Responsabilidade pelo raciocínio Reflexão	Contra exemplo Estruturação geométrica
A3	Solicitação dos contributos dos alunos	Seleção Formulação de questões	Responsabilidade pelo raciocínio Justificação	Elementos de uma figura Estruturação espacial
A4	Manutenção da discussão	Sequenciação Formulação de questões	Responsabilidade pelo raciocínio Justificação	Elementos de uma figura Estruturação espacial
A5	Verbalização com dificuldades	Conexão Formulação de questões	Responsabilidade pelo raciocínio Justificação	Relação entre os elementos de uma figura Estruturação espacial e geométrica
A6	Introdução de um novo instrumento	Conexão Responsabilidade pelo raciocínio	Responsabilidade por participar	Ângulo como elemento de uma figura Estruturação espacial

A análise apresentada para o episódio A permite destacar as dificuldades de verbalizar o raciocínio, revelando que a maior parte das vezes as imagens mentais dos alunos estão corretas e são adequadas à sua argumentação. Esta discussão tornou evidente a necessidade de trabalhar mais aspetos da estruturação espacial dos quadriláteros, necessários para a estruturação geométrica (BATTISTA, 2008). Permitiu evidenciar a necessidade de dar atenção aos elementos que compõem uma figura, neste caso os ângulos e os lados. Os episódios evidenciam também a necessidade de enriquecer a linguagem dos alunos e de lhes proporcionar um instrumento simples de visualização para destaque e comparação de ângulos. No episódio B a utilidade deste instrumento permite visualizar o raciocínio dos alunos

Quadro 4 - Referencial de análise do episódios B de uma discussão coletiva.

	Átomos da ação do episódio	Professor	Alunos	Raciocínio geométrico
B1	Confirmação das figuras	Monitorização Validação em coletivo	Responsabilidade pelo raciocínio Justificação Validação do conhecimento	Contra exemplos Estruturação geométrica
B2	Seleção das figuras críticas	Monitorização Sequenciação Responsabilidade pelo raciocínio	Responsabilidade pelo raciocínio Justificação Validação do conhecimento	Contra exemplos Estruturação geométrica
B3	Comparação de figuras	Seleção Formulação de questões	Responsabilidade pelo raciocínio Reflexão	Identificação dos elementos que compõem uma figura Estruturação espacial
B4	Mudar a posição das figuras	Seleção Formulação de questões	Responsabilidade pelo raciocínio Reflexão	Níveis diferentes de estruturação espacial
B5	Verificação de todos os ângulos	Sequenciação Validação em coletivo	Responsabilidade pelo raciocínio Justificação	Identificação dos elementos que compõem uma figura Estruturação espacial
B6	Identificação de exemplos e de contra-exemplos	Sequenciação Validação em coletivo	Responsabilidade pelo raciocínio Justificação	Conceito de classe Estruturação geométrica
B7	Identificação do quadrado como caso particular do retângulo	Conexão Responsabilidade pelo raciocínio	Responsabilidade pelo raciocínio Reflexão	Conceito de classe Estruturação geométrica

Estes episódios ilustram o papel dos exemplos construídos pelos alunos nas discussões que ocorreram, bem como a importância dos contra-exemplos. Ilustram também vários aspetos da estruturação espacial e geométrica que estão presentes nestas tarefas e a importância de lhes dar destaque e de ir trabalhando a várias níveis sobre as figuras geométricas.

A discussão coletiva de que estes episódios fazem parte marcou a orientação do resto deste percurso (Quadro 2). Embora inicialmente não fosse essa a intenção, este percurso centrou principalmente na estruturação espacial, tendo as tarefas seguintes sido orientadas para a descoberta e comparação de ângulos em quadriláteros. Destaca-se assim a focalização no ângulo reto como referência de estruturação espacial e geométrica, sem necessidade de recorrer ainda a nenhum sistema de medida para identificar ângulos agudos, retos e obtusos em figuras geométricas planas.

Do ponto de vista do professor, este percurso foi marcado por vários dilemas. Embora todas as tarefas já tivessem sido experimentadas em ciclos anteriores, os momentos coletivos experienciados na última aplicação foram determinantes para a sequenciação seguida. É importante destacar que cada dilema corresponde à existência de mais do que uma trajetória hipotética de aprendizagem.

Neste percurso, após uma primeira parte em que as tarefas integravam aspetos de estruturação espacial e de estruturação geométrica, a opção foi dar mais importância à estruturação espacial nos raciocínios exigidos pela tarefa. Isso é evidente nas tarefas 3, 4, 5 e 6 (Quadro 2), em que os alunos trabalham fundamentalmente com as componentes da figura e em que se procura desenvolver a capacidade de identificar os ângulos num polígono, reconhecendo assim ângulos agudos, retos e obtusos não isolados, mas sim embebidos na estrutura de um polígono. Nas tarefas 3 e 4 a estruturação ainda tinha o apoio da rede ponteada do geoplano, nas tarefas 5 e 6 isso já não acontecia pois os polígonos eram desenhados em papel branco.

Estes dois episódios ilustram como os alunos foram assumindo progressivamente a responsabilidade por descobrirem contra-exemplos e figuras incorretas ou que não respeitavam as condições estabelecidas, bem como por explicitar os seus argumentos de validação. Parece-nos evidente a confiança por participar que os alunos adquiriram e que permitiu que interviessem com segurança mesmo quando tinham ideias incorretas. A orientação deste percurso didático foi umas das formas encontradas com sucesso para conceder aos alunos a validação do conhecimento matemático em tarefas de estruturação espacial e geométrica.

No que respeita à construção do conhecimento matemático retomamos os três níveis de Cobb et al. (1992). Destacamos a heterogeneidade na matemática dos alunos, com diferenças significativas na matemática de cada aluno, e o modo como este ponto de partida permitiu encontrar patamares comuns para a matemática partilhada e socialmente construída. Neste caso, o detetor de ângulos retos e a sua utilização significativa por todos os alunos é uma aproximação à matemática socialmente aceite - o transferidor. Este objeto é também uma eficaz aproximação ao conceito de ângulo reto como um quarto de volta.

Embora não seja discutido neste texto, há ainda um aspeto importante a destacar no que repeita à matemática partilhada. É o conceito de ângulo reflexo, um ângulo maior do que dois retos, que surgiu nas construções dos alunos (tarefa 3) e ao qual foi dada a designação de "super obtuso". Esta designação, embora não seja própria da matemática válida, faz todo o sentido na matemática partilhada e socialmente construída a partir da matemática dos alunos (LOUREIRO, 2015d).

Estes e outros episódios dos percursos experimentados durante a investigação realizada mostraram ser possível aproximar os três níveis do conhecimento matemático tendo como ponto de partida o conhecimento matemático dos alunos. Nesta aproximação constituem focos fundamentais de atenção as tarefas implementadas e a sua sequenciação, os momentos coletivos e o papel do professor nesses momentos.

REFERÊNCIAS

BATISTA, M. T. Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume, & M. K. Heid (Eds.), **Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Cases and Perspectives,** v. 2, p. 131-156. NCTM & IAP. (2008).

BATISTA, M., CLEMENTS, D., ARNOFF, J., BATISTA, K., & BORROW, C. Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. **Journal for Research in Mathematics Education**, *29*(5), p. 503-532. (1998).

BOALER, J., & BRODIE, K.. The Importance, Nature and Impact of Teacher Questions. In D. E. McDougall, & J. A. Ross (Eds.), **Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v.** 2, p. 774-790. Toronto: OISE/UT. 2004.

CARTER, R., & RICHARDS, J.. Dilemmas of Constructivist Mathematicas Teaching: Instances from Classroom Practice. In B. Jaworski, T. Wood, & S. Dawson (Eds.), **Mathematics Teacher Education, Critical international Perspectives**,. London: Falmer Press., p. 69-77. 1999.

CHAPMAN, O.. Leaner-Focused discourse in learning mathematics: a teacher's perspetive. In Swars, S. L., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Eds.). **Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Atlanta, GA: Georgia State University. 2009.

COBB, P., YACKEL, E., & WOOD, T. A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. **Journal for Research in Mathematics Education,** *23*(1), p. 2-33. 1992.

GOOS, M., GALBRAITH, P., & RENSHAW, P. Establishing a Community of Practice. In Leone Burton (Ed.) **Learning mathematics. From hierarchies to networks**. London: Falmer Press. p. 36-61. (1999).

GRAVEMEIJER, K. P.. From a different perspetive: building on students' informal knowledge. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.) **Designing learning environments for developing understanding of geometry and space.** Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates. p. 45-66. 1998.

JACSON, K., GARRISON, A., WILSON, J., GIBBONS, L., & SHAHAN, E. Exploring relationships between setting up complex tasks and opportunities to learn in concluding whole-class discussions in middle-grades mathematics instruction. **Journal for Research in Mathematics Education**, *44*(4), p. 646-682. 2013.

JAWORSKI, B. Tensions in teacher's conceptualizations of mathematics and of teaching. In L. Burton (Ed.) **Learning mathematics. From hierarchies to networks**. London: Falmer Press. p. 153-172. 1999.

KOBIELA, M. & LEHER, R. The codevelopment of mathematics concepts and the practice of defining. **Journal of Mathematics Teacher Education**, *46*(4), p. 423-454. 2015.

LEHRER, R. & CHAZAN, D. Eds. **Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 1998.

LOUREIRO, C. O "retângulo" que não é retângulo. **Educação & Matemática,** n. 131, p. 28-29. 2015a.

______. Exemplos e contra exemplos para construir o conceito de classe. **Educação & Matemática**, v. 132, p. 24-25. 2015b.

______. A classe dos paralelogramos. **Educação & Matemática,** v. 133, p. 16-17. 2015c.

______. Geometria partilhada e socialmente construída. **Educação & Matemática,** v. 134, p. 32-33. 2015d.

SHERIN, M. G. A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. **Journal of Mathematics Teacher Education,** v.5, pp.205-233. 2002.

SMITH, M. S., & STEIN, M. K. **5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions**. Reston, Va: NCTM. 2011.

STEIN, M. K., SMITH, M. S., HENNINGSEN, M. A., & SILVER, E. A. **Implementing standards-based mathematics instruction:** A casebook for professional development*.* New York, NY: teachers Colege Press. 2000.

STEIN, M. K., ENGLE, R., A., SMITH, M. S., & HUGHES, E. K.. Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show ant Tell. **Mathematical Thinking and Learning***, 10*(4), p. 313-340. 2008.

WOOD, T., & TURNER-VORBECK, T. Developing teaching of mathematics: making connections in practice. In L. Burton (Ed.) **Learning mathematics. From hierarchies to networks**. London: Falmer Press. p. 173-186. 1999.

YACKEL, E., & COBB, P.. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, *27*(4), p. 458-477. 1996.

RECEBIDO EM: 30 set.2015
CONCLUÍDO EM: 01 nov. 2015