VIDYA, v. 35, n. 2, p. 179-195, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015. **ISSN** 2176-4603

ANÁLISE DA APRENDIZAGEM DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS POR ALUNOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANALYSIS OF THE SIMILARITY OF TRIANGLE LEARNING STUDENTS IN MATHEMATICS GRADUATION

EMILIO CELSO DE OLIVEIRA*
ANA CHIUMMO**

RESUMO

Neste artigo, temos como objetivo fazer a análise de respostas de questões de prova aplicada a alunos do curso de Matemática da Universidade Paulista, relativamente ao conceito de semelhança de triângulos, procurando a compreensão do envolvimento dos alunos com a aprendizagem desse conteúdo matemático. A partir da revisão da bibliografia, construímos um referencial teórico e um procedimento de análise das questões de prova, com o objetivo de identificar as principais dificuldades, erros, obstáculos ou concepções equivocadas expressos pelos alunos. O estudo mostrou que, por trás do termo "dificuldade", podem ser desvelados erros, obstáculos e concepções equivocadas em um processo de ensino e aprendizagem. O resultado desta análise evidenciou o envolvimento dos alunos com o estudo de semelhança de triângulos, tendo sido identificados alunos que interagiram corretamente com o conceito na situação estudada. Por outro lado, observamos que um conjunto significativo de alunos apresentou diferentes dificuldades, expressas por erros conceituais e procedimentais, ou por concepções equivocadas desse conteúdo, o que evidencia obstáculos que precisam ser superados. Entendemos que a análise realizada pode contribuir para a aprendizagem desse conteúdo da Geometria Plana, com presença significativa no currículo de Matemática e de fundamental importância para a formação de futuros professores.

Palavras-chave: Educação Matemática. Erros e concepções equivocadas. Dificuldades. Obstáculos. Semelhança de triângulos.

ABSTRACT

This paper deal to analise the of answers to test questions applied to students of mathematics course at Universidade Paulista, in relation to the concept of similarity of triangles, seeking the understanding of student engagement with learning that mathematical content. From the literature review, we built a theoretical framework and a review process of the test questions in order to identify the main difficulties, mistakes, obstacles and misconceptions expressed by students. The study showed that behind the term difficulty may be unveiled errors, obstacles and misconceptions in the process of teaching and learning. The result of this analysis showed the involvement of students to the study of similar triangles, and students were identified that interacted properly with the concept in the study situation. On the other hand, it was worrying to note that the significant number of students had different difficulties expressed by conceptual and procedural errors or misconceptions of this content, which shows obstacles that must be overcome. We believe that the analysis can contribute to the learning of the content of plane geometry, with a significant presence in the curriculum of Mathematics and of fundamental importance to the training of future teachers.

Keywords: *Mathematics Education. Error and misconception. Difficulties. Obstacles.*

* Doutor em Educação Matemática. Docente da Universidade Paulista. E-mail: emilio.celso@gmail.com.
** Doutora em Educação: Currículo. Coordenadora Local da Licenciatura em Matemática da Universidade Paulista – UNIP. E-mail: anachiummo@uol.com.br

INTRODUÇÃO

Apresentamos o percurso perseguido ao organizar as ideias e intuições para a redação deste artigo.

Ao propor este texto, uma problemática inicial consistiu em identificar o que seria analisado nas respostas à questão proposta em prova, para compreensão da interação do aluno com esse conhecimento geométrico: seriam seus erros, dificuldades, obstáculos ou concepções equivocadas sobre o conceito de semelhança.

Ter clareza do que buscávamos nas respostas foi a primeira preocupação. Assim, procuramos na literatura uma discussão sobre erro, dificuldade, obstáculos e concepções equivocadas que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem, tendo como ponto de partida para a reflexão o sugestivo trabalho de Curi e Ramos (2013), pesquisadoras brasileiras que apresentaram um mapeamento realizado em artigos selecionados com a finalidade de identificar o que "querem os investigadores que pesquisam dificuldades, erros e obstáculos nos periódicos em Educação Matemática e quais os referenciais teóricos mais citados por eles" (CURI e RAMOS, 2013, p. 29).

Essa discussão foi essencial para a definição da questão central deste estudo: qual compreensão se pode ter do envolvimento dos alunos com a aprendizagem de semelhança de triângulos?

Para buscar respostas a essa questão, buscamos procedimentos metodológicos de análise das respostas dos alunos às questões de provas. Optamos por fazer uma análise de conteúdo, segundo o referencial de análise de Makhubele (2014), pesquisador sul-africano.

O procedimento de análise de dados tem como objetivo identificar qual foi o envolvimento do aluno com o conceito de semelhança de triângulos, de forma a desvelar o significado da resolução apresentada pelos alunos. A análise foi também baseada na Teoria das Situações, de G. Brousseau (1986), que tem por objetivo a modelização do ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Ao final, apresentamos os resultados da análise e reflexão feita sobre as respostas de alunos, de forma a contribuir para a aprendizagem do conceito de semelhança de triângulos.

ERRO, DIFICULDADE E OBSTÁCULO NA LITERATURA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nessa seção, trazemos uma reflexão sobre como os conceitos de erro, dificuldade e obstáculos, os quais comparecem na literatura de Educação e Educação Matemática. Nosso objetivo é trazer à luz esses conceitos, para compreensão da perspectiva teórica, cujo foco são os efeitos dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Curi e Ramos (2013), educadoras matemáticas brasileiras, fazem uma ponderação sobre dificuldade, erro e obstáculo:

> O primeiro termo "dificuldade" tem como significado "o que impede, embaraça; estorvo, obstáculo". O segundo termo "erro" significa "juízo ou julgamento em desacordo com a realidade observada; engano". O último termo obstáculo que significa "algo que impede ou atrapalha o movimento, a progressão de alguém ou alguma coisa". Considerando os significados, podemos perceber que os termos dificuldade e obstáculo são palavras sinônimas, pois na acepção de ambas encontramos o termo "impedimento", o que nos leva a concluir que são palavras capazes de criar barreiras na busca e na transmissão do conhecimento. O erro também contribui

> para isso, sendo o “engano” um dos seus significados. Miranda (2007) cita que erro “é um desvio em relação ao padrão ou ideal preestabelecido” (p. 11, apud CURI e RAMOS, 2013, p. 30-31).

Retomar a acepção desses três termos reforça a ideia de que há uma imbricação mútua entre eles. De antemão, consideramos que falar em dificuldade é senso comum para expressar que os alunos não atingiram as expectativas de aprendizagem, após um processo de ensino e aprendizagem em que ocorre o envolvimento e a interação do aluno com determinado conteúdo matemático.

O que vemos na literatura é que, ao abordar o termo erro, inevitavelmente, comparecem outros dois, dificuldade e obstáculo, sendo que esse último apresenta uma elaboração mais consistente na literatura de Educação e Educação Matemática. Encontramos, no trabalho teórico de Makhulebe (2014), uma nova noção, qual seja a concepção equivocada de conceitos matemáticos.

Vamos ampliar a significação desses termos.

Comecemos pela noção de erro. Teixeira (1997) aborda a questão do erro, com o objetivo de “analisar, com base no referencial da Psicologia Cognitiva, o papel do erro no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos”. Revisando a literatura da Psicologia Cognitiva, esse autor aponta a compreensão do erro segundo diferentes concepções:

- a abordagem behaviorista;
- a abordagem piagetiana;
- a abordagem de G. Brousseau;
- a abordagem dos campos conceituais de G. Vergnaud.

A abordagem behaviorista ou comportamental, em linhas gerais, considera que “o erro ocorre devido à ausência de condicionamento adequado ou de reforçamento, para que um estímulo discriminativo produza uma resposta específica” (TEIXEIRA, 1997, p. 49).

Nessa abordagem, o erro é visto de maneira negativa e sem qualquer interesse, o que implica em minimizá-lo em um processo de ensino e aprendizagem. Isso significa que, pelo ponto de vista dessa abordagem, o erro do aluno não pode trazer compreensões ao professor sobre o conhecimento mobilizado pelo aluno ao explicitar o conhecimento elaborado ou consolidado na aprendizagem.

Já de acordo com a abordagem piagetiana, o erro é entendido como resultado de um conflito cognitivo, em decorrência de um esforço adaptativo dos indivíduos a novas situações.

Teixeira (1997) explica:

> conflito cognitivo para Piaget é o termo usado para explicar o processo através do qual ocorrem mudanças cognitivas, ou seja, passagem de um estado de equilíbrio a outro, (teoria da equilibração), através de um período de transição em que há formas contraditórias de interpretar e resolver um mesmo problema. O conflito se supera quando, por um processo de regulação interna, há uma reorganização e coordenação das ações em jogo (p. 49).

Nessa abordagem, o erro assume um papel construtivo e auxiliar na aprendizagem de conceitos matemáticos. O conceito de erro distancia-se do de dificuldade, já que “o erro, nessa perspectiva, não é apenas o indício de uma dificuldade, mas sobretudo indicador de uma lógica infantil ou “teoria em ação”, que orienta as estratégias de ação com vistas à obtenção do êxito (Ibidem, p. 49).

Cury (2013) pontua que:

> as investigações apoiadas nos erros não têm o propósito de avaliar o aluno, mas de contribuir para compreender como ele se apropria de um determinado conhecimento e quais as dificuldades que ainda precisa superar até ser capaz de trabalhar com o conteúdo em questão. Desde as pesquisas em Psicologia Experimental, de Thorndike e colaboradores, até as propostas de usar o erro como construtor da aprendizagem, conforme pressupostos construtivistas, as soluções de questões matemáticas têm sido investigadas, tanto quantitativa quanto qualitativamente, para analisar as dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos matemáticos. (p. 1)

Outra concepção construtiva em relação ao erro é a abordagem de G. Brousseau. Para entendê-la, a noção de obstáculo cunhada por G. Bachelard é fulcral.

> O obstáculo, nesta perspectiva, tem um caráter inevitável, faz parte do conhecimento como tal, revela a sedimentação de um conhecimento e se constitui em resistência à mudança. Bachelard, denomina esse obstáculo de epistemológico e descreve alguns desses obstáculos encontrados ao longo da história da produção do conhecimento das ciências físicas, tais como: o senso comum, a opinião, o realismo das observações, a tendência a explicar o fenômeno por uma causa única, etc ... (TEIXEIRA, 1997, p. 50)

Para Brousseau (1983), educador matemático francês, esse obstáculo caracteriza-se por um conhecimento, uma concepção – e não por uma dificuldade ou uma falta de conhecimento – que num certo contexto produz respostas adaptadas e, fora dele, respostas falsas. Esse pesquisador destaca que:

> [...] organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente. Tratar-se-á não de comunicar as informações que se quer ensinar, mas de encontrar uma situação na qual elas são as únicas a serem satisfatórias ou ótimas entre aquelas às quais se opõem para obter um resultado no qual o aluno investiu. (BROUSSEAU, 1983, p. 179).

A noção de obstáculo pode ser utilizada para ensinar tanto a gênese histórica de um conhecimento, como o ensino ou a evolução espontânea do aluno.

- Os obstáculos podem ter motivações diferentes:
- obstáculos epistemológicos;
- obstáculos de origem didática;
- obstáculos ontogênicos.

Os obstáculos epistemológicos, segundo Brousseau (1986), são obstáculos que tiveram um papel importante no desenvolvimento histórico do conhecimento, cuja rejeição precisou ser integrada explicitamente ao saber transmitido, sendo, portanto, inerentes ao saber e identificáveis através das dificuldades encontradas pelos matemáticos para superá-los no decorrer da história.

Novamente, destacamos o distanciamento em relação à noção de dificuldade dessa elaboração teórica:

> Os obstáculos não podem ser confundidos, portanto, com meras dificuldades. Brousseau aponta algumas condições que permitem identificar os obstáculos epistemológicos:
> - é conhecimento e não ausência de conhecimento;
> - o conhecimento-obstáculo tem um domínio de validade, ou seja, é eficaz para certos contextos mas para outros conduz a erros;
> - resistente ao estabelecimento de novo conceito ou ampliação do mesmo; - resiste às contradições com os quais é confrontado (TEIXEIRA, 1997, p. 50)

Os obstáculos de origem didática parecem depender apenas de uma escolha, ou de um projeto de um sistema educativo, que resulta de uma transposição didática que dificilmente o professor pode renegociar no quadro restrito da sala de aula. Nascem da escolha das estratégias do ensino, permitindo formar, no momento da aprendizagem, conhecimentos errôneos ou incompletos, que se revelarão mais tarde como obstáculo ao desenvolvimento da conceituação, sendo, por isso, inevitáveis, inerentes à necessidade da transposição didática. Este é um dos motivos pelo qual o educador precisa tomar muito cuidado na escolha de sua metodologia e estratégia de aula, pois os alunos mobilizam um conhecimento prévio de Matemática, porque afinal são cidadãos que moram em centros urbanos, tomam ônibus, vão ao supermercado, frequentam feiras livres, enfim, manuseiam dinheiro em todos os momentos, portanto, adicionar e subtrair não são operações totalmente desconhecidas.

Um fator importante que deve ser observado com muita atenção é que cada aluno de graduação é um adulto que traz para a universidade sua identidade cultural, com histórias de vida diferenciadas. Sendo assim, é preciso encontrar uma metodologia adequada para dar sentido ao processo de ensino e aprendizagem, de forma a superar os obstáculos surgidos no processo de aprendizagem. Além disso, como futuro professor, é necessário ir percebendo como os obstáculos didáticos influenciam o aprendizado dos conceitos e conteúdos matemáticos, em um processo de meta-aprendizagem pessoal dos conceitos matemáticos.

Temos ainda os obstáculos ontogênicos, “provenientes das limitações do sujeito num dado momento do seu desenvolvimento mental” (TEIXEIRA, 1997, p. 50).

Diante da noção de obstáculo, o erro adquire um novo significado:

> Frente a estas colocações, Brousseau afirma que o erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso... mas o efeito de um conhecimento anterior que num contexto era adaptado, mas que em outro se revela falso ou simplesmente inadaptado. Podemos citar, como exemplo, a redução aos naturais das operações no conjunto Z e R, ou, ainda, a dificuldade de entender nos inteiros, a operação de adição como associação e não como acréscimo. Acrescenta ainda que os erros, em um mesmo sujeito, comparecem ligados entre si por uma fonte comum: um conhecimento antigo que foi eficiente em certas situações. Por isso mesmo são resistentes e vão ressurgir várias vezes, mesmo depois do sujeito ter rejeitado o modelo errado. (Ibidem, p. 50).

Outra concepção sobre erros diz respeito à abordagem da teoria dos campos conceituais de G. Vergnaud. Para esse autor os conceitos matemáticos são compostos por um tripé de três conjuntos:

> - conjunto de situações de referência ou do real que dão sentido ao conceito. O significado dos conceitos advém da variedade de situações comuns de problemas ao qual o

conceito se aplica. As situações indicam o sentido da aprendizagem, ou seja, implicam um para quê e quando. A ação em situação é a fonte da formação dos conceitos.
- conjunto de invariantes operatórios que são constitutivos do conceito. Para cada classe de situações, há operações de pensamento que se baseiam no reconhecimento de invariantes relativos à extração de uma propriedade, a regras de ação, a inferências, predições, ou mesmo aplicação de um verdadeiro teorema, mesmo não necessariamente explícito.
- conjunto de Significantes ou de representações simbólicas que podem ser de várias ordens: linguagem natural, gestos, desenhos, esquemas, tabelas, álgebra, referentes não só à representação dos problemas como às soluções. (TEIXEIRA, 1997, p. 50)

Embora a noção de obstáculo não compareça, essa abordagem:

identifica obstáculos como resultado das contradições entre a ação a ser executada (por exemplo, uma operação aritmética ou algébrica) e aquela apontada pelo funcionamento do esquema. Esse fato pode ser detectado não só através do que o aluno diz, como também do que ele faz, o que revela de fato que, a base do conhecimento está nos esquemas de ação e não nas declarações do sujeito.
O esquema de ação para Vergnaud, é definido como organização invariante da conduta para uma classe de situações dadas. (TEIXEIRA, 1997, p. 50)

Makhulebe (2014) traz uma nova noção para abordar os efeitos colaterais da aprendizagem em matemática: concepção equivocada[1].

Estudando a literatura, o pesquisador identifica diferentes acepções para concepção equivocada de conceitos matemáticos:

- (Leinhardt, Zaslavsky & Stein) aspectos incorretos do conhecimento do aluno que são repetidos e explicitados;
- (Dikgomo) dificuldades conceituais que os alunos experimentam que podem impedir o conhecimento dos conceitos matemáticos. Concepções equivocadas são portanto impedimentos na aprendizagem significativa dos conhecimentos matemáticos;
- (Thabane) podem ser uma pedra no caminho ao entendimento de conceitos matemáticos;
- (Nesher) linha de pensamento que causa uma série de erros todos eles resultantes de uma subjacente premissa incorreta em vez de um erro esporádico sem conexão e não sistemático;
- (Michael) dificuldade de entendimento ou raciocínio que impede o domínio de certo conteúdo;
- (Van Lehn) aplicação equivocada de uma regra, uma excessiva ou insuficiente generalização ou uma concepção alternativa de uma situação. (MAKHUBELE, 2014, p. 42-43).

Em uma perspectiva construtivista, a concepção equivocada surge “quando um conjunto relativamente estável e funcional de crenças de um indivíduo entra em conflito com uma posição alternativa mantida por toda comunidade de estudiosos, especialistas e professores”. (MAKHUBELE, 2014, p. 43).

[1] Em nossa tradução do verbete *misconception*, empregada pelo autor, procuramos manter a palavra concepção do português, para ficar mais próximo do verbete em inglês.

Por fim, destacamos Makhubele (2014), que apresenta a teoria do reparo:

> quando os solucionadores se deparam um novo problema, eles tentam aplicar um conhecimento anterior à nova situação. Se eles falham ao resolver o problema, eles podem introduzir um reparo no procedimento. Quando o procedimento mudado está correto, uma solução criativa é obtida. Entretanto, quando o procedimento alterado está incorreto, uma concepção equivocada se manifesta. Então, de acordo com a teoria do reparo, uma concepção equivocada não é uma simples generalização excessiva que ocorre sempre que o solucionador aplica um conceito quando está em outro domínio em que é incorreto; mas uma concepção equivocada resulta de um pequeno reparo a dado procedimento. (p. 43)

A Didática Francesa nos oferece algumas pistas para minimizar as fontes de erro e concepções equivocadas de conceitos estudados em um processo de ensino e aprendizagem.

O professor precisa ter clareza das diferentes variáveis didáticas que vão transformar a situação de aprendizagem. Suas escolhas terão consequências sobre a percepção do saber que os alunos vão desenvolver e sobre as concepções que eles forjarão. O *saber ensinado* é o que decorre dessas escolhas.

Este é um dos itens da *transposição didática* que o professor deve seguir para que aconteça o processo ensino-aprendizagem.

Chevallard e Joshua (1991) chamam de transposição didática o conjunto das adaptações e transformações que o *saber sábio* sofre para ser ensinado.

Por *saber sábio,* entende-se o conjunto dos conhecimentos socialmente disponíveis, que foram objeto de publicações científicas ou de comunicações reconhecidas como válidas pela sociedade.

Da escolha do saber a ser ensinado à sua adaptação ao sistema didático, existe todo um processo gerador de modificações, de criações de objetos de ensino.

Os objetos matemáticos, quando trabalhados em situações de aprendizagem, são abordados segundo registros de representação semiótica, conceito estudado por Duval. Um registro de representação semiótica fica bem definido quando são necessários a "formação de uma representação identificável, tratamento e conversão dessa representação". (DAMM, 2002, p. 144)

A *representação identificável*

> pode ser estabelecida através de um enunciado compreensível numa determinada língua natural, na composição de um texto, no desenho de uma figura geométrica, na escrita de fórmulas, de um gráfico... podemos comparar a formação de uma representação à realização de uma tarefa de descrição. (DAMM, 2002, p. 144)

Por tratamento de uma representação entende-se "a transformação dessa representação no próprio registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro" (DAMM, 2002, p. 145).

Já a conversão de uma representação consiste na "transformação desta em uma representação em um outro registro conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão. O tratamento se estabele 'dentro' do registro, já que a conversão se dá entre registros diferentes" (DAMM, 2002, p. 146).

No estudo de objetos geométricos, os registros de representação jogam um papel importante na aprendizagem, em vista de que os conceitos estudados podem ser descritos em diferentes registros de representação semiótica identificáveis: língua materna, aritmético, algébrico, geométrico.

Nesse processo de transformação do saber sábio para situações de aprendizagem de geometria, surgem as dificuldades, erros, obstáculos e concepções equivocadas, ao se coordenar esses registros de representação semiótica, o que exige do professor um esforço para minimizá-los durante o processo de ensino e aprendizagem.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Makhubele (2014) sugere dois conjuntos de categorizações para a análise de respostas de alunos a questões propostas pelo professor, para verificar a aprendizagem de um conceito geométrico.

O primeiro conjunto consiste em categorizar as respostas com as nomenclaturas de C1 a C5, relativas ao envolvimento cognitivo dos alunos com a situação dada e o conhecimento mobilizado pelo aluno, de maneira que "esta categoria foca então as afirmações escritas pelos alunos e suas razões" (MAKHUBELE, 2014, p. 133).

Quadro 1- Categorias de erros dos alunos

Categoria	Explicação
C1	Afirmação correta, justificativa correta/raciocínio válido (resposta correta)
C2	Afirmação incorreta, resposta incorreta. Raciocínio inválido. (Resposta errada)
C3	Afirmação incorreta, raciocínio incorreto.
C4	Afirmação incorreta, raciocínio correto.
C5	Nenhuma tentativa feita.

Um segundo conjunto de categorias das respostas foi empregado, "em termos do tipo de erro cometido pelo aluno, especificamente lapsos, erros conceituais, erros procedimentais e erros de ordem das operações" (Ibidem, p. 133).

Quadro 2- Categorias de erros

Categoria	Tipo de Erro	Explicação
Err1	Sem erro	O aluno não cometeu erro. Evidência de habilidade de prova.
Err2	Lapso	Engano, erro menor cometido porque o aluno estava preocupado. Causado por falta de concentração. Respostas erradas que os alunos podem sozinhos corrigir prontamente. Devido à falta de cuidado, provavelmente será repetido. Pode ser entendido automaticamente após rever o trabalho de outro
Err3	Erro conceitual	Falta de conhecimento do conceito. Cometido pela não familiaridade com a terminologia. Cometido por um domínio insuficiente de fatos básicos, conceitos e habilidades.

Err4	Erro procedimental	Apresenta conhecimento conceitual, mas aplica equivocadamente o conceito. Alunos memorizaram os conceitos e propriedades sem conhecer quando aplicá-los e porque eles os aplicam quando realizam a resolução. Alunos conhecem os conceitos e propriedades das figuras, mas não consegue aplicá-los no problema.
Err5	Erro de ordem da operação	Falta de ordem quando realizam a resolução que envolve dois ou mais passos. Aplicam cegamente os procedimentos sem conhecer de fato como prosseguir a resolução. Problema em termos de raciocínio dedutivo. Cometido por esquemas incompletos.

Esses dois conjuntos de categorias, mostrados nos Quadros 1 e 2, orientam nossa análise de dados, relativos à avaliação de uma questão sobre semelhança de triângulos proposta em prova bimestral, em novembro de 2013, aos alunos do primeiro semestre de graduação em Matemática, porque contemplam os termos discutidos nesse artigo: erro, dificuldades, obstáculos e concepção equivocada.

ANÁLISE DE DADOS

Nesta seção, apresentamos a análise de uma questão sobre semelhança de triângulos proposta em prova bimestral, em novembro de 2013, aos alunos do primeiro semestre de graduação em Matemática.

Lembramos que os casos de semelhança de triângulos atendem respectivamente aos seguintes teoremas:

Caso AA: *Se dois triângulos possuem ordenadamente dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes*.

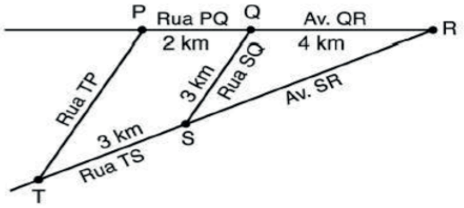
Caso LAL: *Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes*.

Caso LLL: *Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes*.

A questão selecionada para avaliar esses conceitos, relativos à semelhança de triângulo, é apresentada na Quadro 3 a seguir:

Quadro 3- Questão selecionada de prova.

(Parfor - Matemática - Adaptado) O circuito triangular de uma corrida está esquematizado na figura a seguir:



As ruas TP s SQ são paralelas. Partindo de S, cada corredor deve percorrer o circuito passando, sucessivamente, por R, Q, P, T, retornando, finalmente, a S.

a) Os triângulos RPT e RQS são semelhantes. Qual o caso de semelhança? Justifique

b) Qual a medida do trecho SR da corrida?

c) Qual a medida do trecho PT da corrida?

Participaram dessa avaliação 45 alunos, sendo que 7 não responderam à questão, ou seja, não fizeram nenhuma tentativa de resolução (C1).

Inicialmente, os instrumentos de avaliação foram codificados por A_n, n = 1, 2, ... 38, função da quantidade de alunos que responderam ao item a) da questão da prova. Em seguida, agrupamos esses instrumentos de avaliação segundo os casos de semelhança de triângulos, tendo o seguinte conjunto de provas mostrado no Quadro 4.

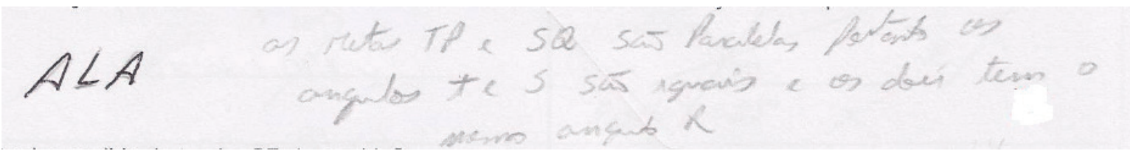
Quadro 4- Agrupamentos dos instrumentos de avaliação dos alunos

Caso de Semelhança	Agrupamentos de alunos	Categorias
ALA	A1	C4, Err3
LAL	A2 a A14	C3, Err2, Err3, Err4
LAA_o	A15	C3, Err3
LLL	A16 a A22	C3, Err3
AA	A23 a A29	C3, Err3
Não identificou o caso de semelhança, mas apresentou corretamente a razão de semelhança.	A30	C4, Err4
Resposta sem relação com os casos de semelhança.	A31 a A38	C2, Err3

Passemos a analisar o item a) da questão proposta, que afirmava de antemão que os triângulos eram semelhantes, ou seja, não transferia ao aluno a responsabilidade de análise da semelhança, mas do caso envolvido na situação apresentada.

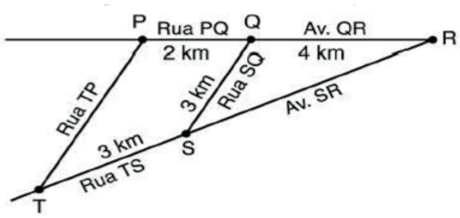
O aluno A1 afirmou incorretamente que o caso de semelhança que resolvia o problema era ALA, mas apresentou uma justificativa correta para a situação apresentada, conforme Figura 1 a seguir.

Figura 1- Resposta de A1.



O agrupamento de alunos que responderam que o caso de semelhança é LAL apresentaram diferentes justificativas, não percebendo que esse caso não era a resposta, porque havia apenas um par de lados homólogos proporcionais, relativos aos segmentos e , conforme a Figura 2.

Figura 2- Representação geométrica da questão 1.

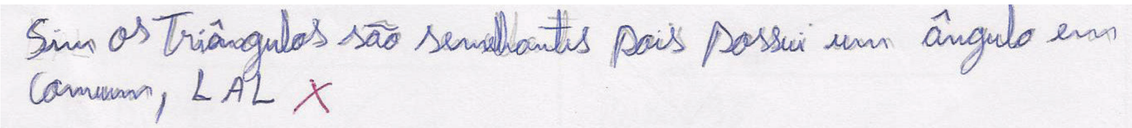


Além de ser um erro conceitual (Err3), entendemos que se trata de um lapso do aluno (Err2), por uma concepção de que os casos de semelhanças são os mesmos daqueles associados à semelhança de triângulos.

Selecionamos algumas respostas para ilustrar essas análises.

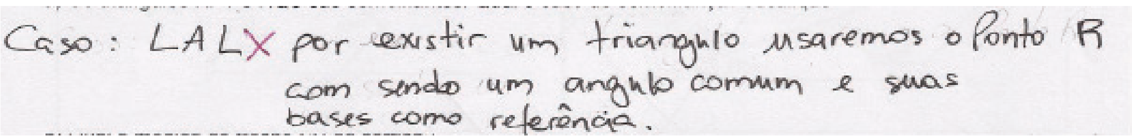
A2 e A4 concluíram que os triângulos são semelhantes por considerar que bastava ter um ângulo em comum, sem levar em conta a proporcionalidade de dois lados homólogos que determinam esse ângulo (veja Figura 3 e 4)

Figura 3- Resposta do aluno A2.


Sim os Triângulos são semelhantis pois possui um ângulo em commum, LAL X

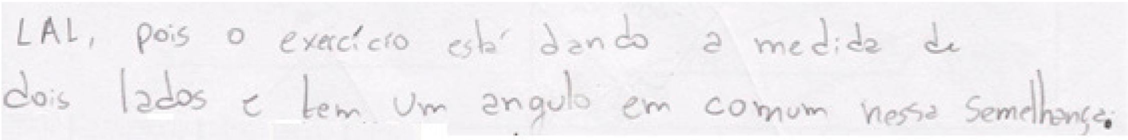
A resposta do aluno A4 é sugestiva, porque o aluno percebeu o ângulo comum e inferiu que os lados que formam esses ângulos seriam proporcionais nos triângulos PRT e QRS, o que evidencia falta de domínio conceitual ou concepção equivocada (Err3) desse caso de semelhança (Veja Figura 4).

Figura 4- Resposta do aluno A4.


Caso: LAL X por existir um triangulo usaremos o ponto R com sendo um angulo commum e suas bases como referência.

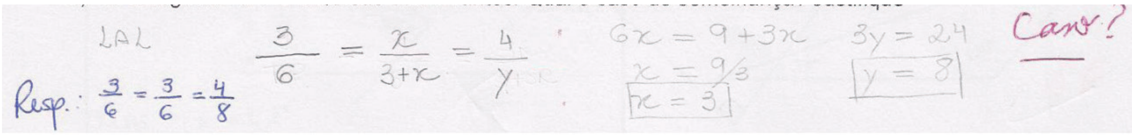
A5 apresenta a mesma argumentação de A4, apontando com mais ênfase a concepção equivocada do caso ALA de semelhança de triângulos (Veja Figura 6), não percebendo que um dos lados (RS) é desconhecido.

Figura 6- Resposta do aluno A5.



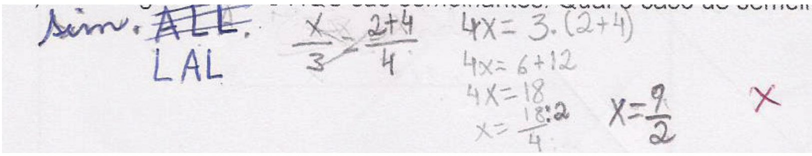
Um erro procedimental (Err4) pode ser observado na resposta de A9, que apresentou como justificativa de semelhança a proporção entre os lados homólogos, procedimento para encontrar os lados desconhecidos dos triângulos (veja Figura 7).

Figura 7- Resposta do aluno A9.



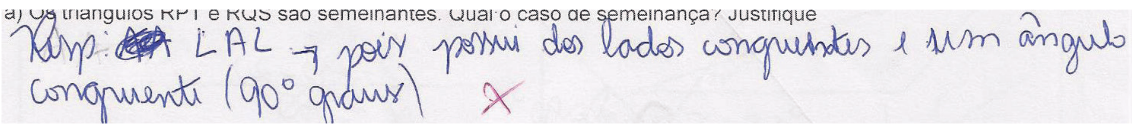
A14 respondeu que o caso envolvido foi ao caso LAL (Figura 8), após anular a indicação de ALL_o, o que seria uma concepção equivocada de associação entre caso de semelhança e de congruência, apresentando procedimentos para o cálculo do lado x, não explicitado, empregando a mesma linha de raciocínio do aluno A9.

Figura 8- Resposta do aluno A14.



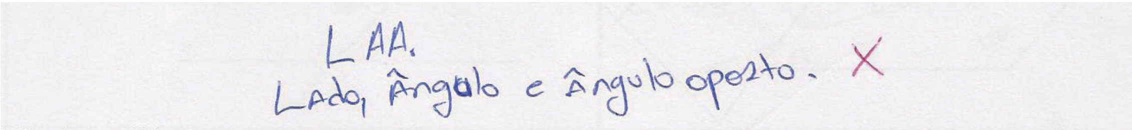
Além de apresentar uma concepção equivocada, A9 apontou que o ângulo comum nos triângulos semelhantes era reto, o que entendemos ser uma concepção equivocada, pro falta de domínio do conceito de ângulo (Veja Figura 8).

Figura 9- Resposta do aluno A9.



Uma única resposta em que foi apontado o caso ALL_o, evidenciando concepção equivocada entre casos de congruência e semelhança, foi apresentada pelo aluno A15 (Figura 9). Isso indica que não houve ainda o domínio desses dois conceitos por parte dos alunos, mostrando uma concepção equivocada dessas ferramentas de análise. A Figura 10 evidencia ainda a dificuldade do aluno em apresentar uma resposta adequada à linguagem natural.

Figura 10- Resposta do aluno A15.



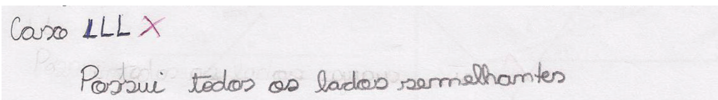
Um outro agrupamento de alunos respondeu que o caso de semelhança envolvido era LLL. Algumas respostas chamam a atenção.

A16 considera que o caso é LLL porque os lados são iguais, concepção equivocada, o que, na verdade, informa que há uma confusão entre casos de congruência e de semelhança (veja Figura 11).

Figura 11- Resposta do aluno A16.

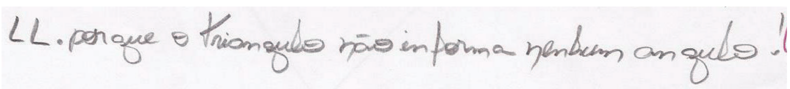
A18 respondeu que se trata de caso LLL, porque os lados são semelhantes. Essa seria uma justificativa plausível caso o aluno utilizasse como argumento a afirmação de que os triângulos são semelhantes. Bem provavelmente tenha sido essa uma possível interpretação da situação, conforme a figura 12.

Figura 12- Resposta do aluno A18.



A20 aponta como resposta o caso LL, apresentando uma resposta com concepção equivocada, por não perceber que a solução passava pela identificação de ângulos congruentes dos triângulos semelhantes, interagindo com o registro de representação geométrico da situação proposta.

Figura 13- Resposta do aluno A20.



Outro agrupamento de alunos apresentou respostas que mostram que não ocorreu a aprendizagem desse conceito, de maneira que responderam de maneiras as mais variadas, sem qualquer nexo lógico com a situação proposta, que enquadramos nas categorias C2 e Err3.

Apresentamos alguns exemplos, os quais vamos comentar em conjunto.

Figura 14- Resposta do aluno A31.

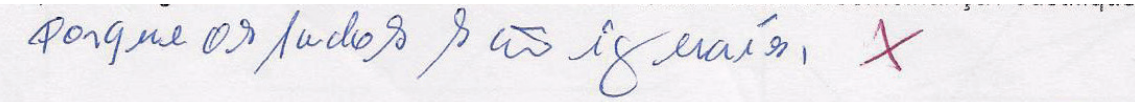

Porque os lados são iguais, X

Figura 15- Resposta do aluno A33.

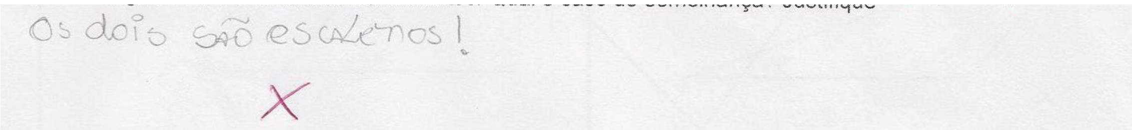
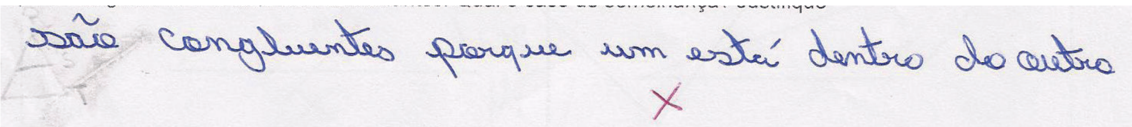

Os dois são escalenos!
X

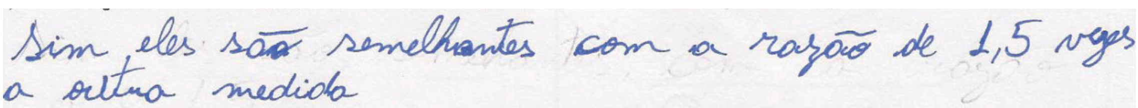
Figura 15- Resposta do aluno A35.


são congluentes porque um está dentro do outro
X

Essas respostas, pela incompletude e distanciamento do estudo realizado, servem para uma reflexão sobre a constatação de que alguns alunos ficaram fora do processo de ensino e aprendizagem do conceito de semelhança. Queremos dizer que há um agrupamento de alunos, 8 em 45, que não interagiram nem foram sequer sensibilizados com as problematizações trazidas sobre os conteúdos estudados, o que desvela uma reflexão que mostra os limites do trabalho do professor em sala de aula e de estudo fora dela, realizado durante o tempo de aprendizagem desses conceitos.

A30 afirma a semelhança apontando a razão de semelhança entre os triângulos corretamente, embora não apresentasse o caso de semelhança solicitado (veja Figura 16). Consideramos que essa seja uma evidência de domínio cognitivo parcial do conceito, ao expressar a proporcionalidade entre os lados homólogos dos triângulos.

Figura 16- Resposta do aluno A30.

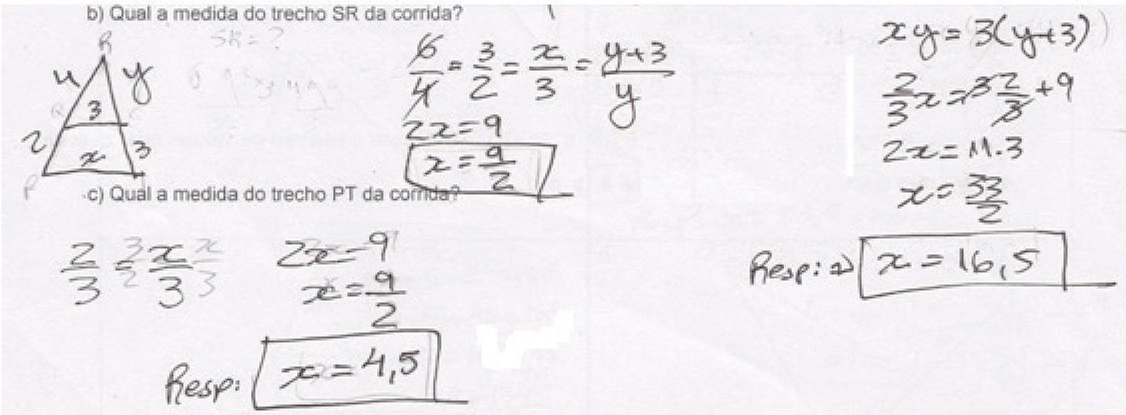

Sim eles são semelhantes com a razão de 1,5 vezes a outra medida

Passemos agora à análise dos itens b) e c) da questão proposta, que foi corretamente respondida por 15 alunos, ou um terço da turma.

Nesses itens, identificamos erros relativos a procedimentos de determinação da proporção correta entre os triângulos (os quais comprometeram o cálculo das medidas pedidas).

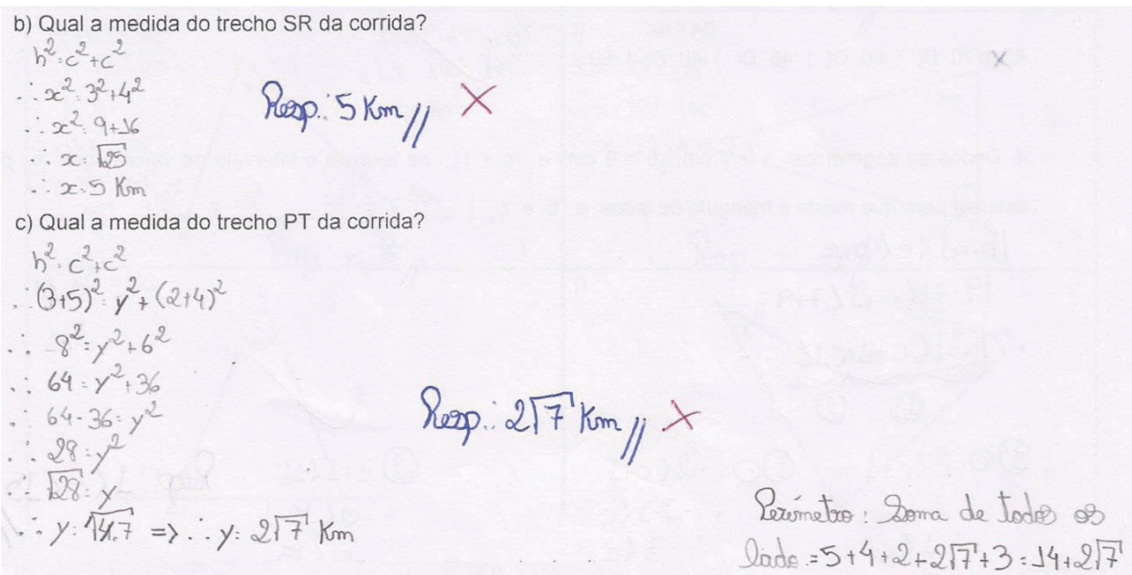
A4, assim como outros 8 alunos, não conseguiu estabelecer as proporções corretas para fazer o cálculo dos segmentos solicitados. A4 fez corretamente o registro de representação geométrico para o item b) e c), mas não fez a conversão para o registro algébrico (veja figura 17), cometendo um erro de aplicação de um procedimento (Err4), comprometendo o resultado obtido.

Figura 17- Resposta do aluno A4.



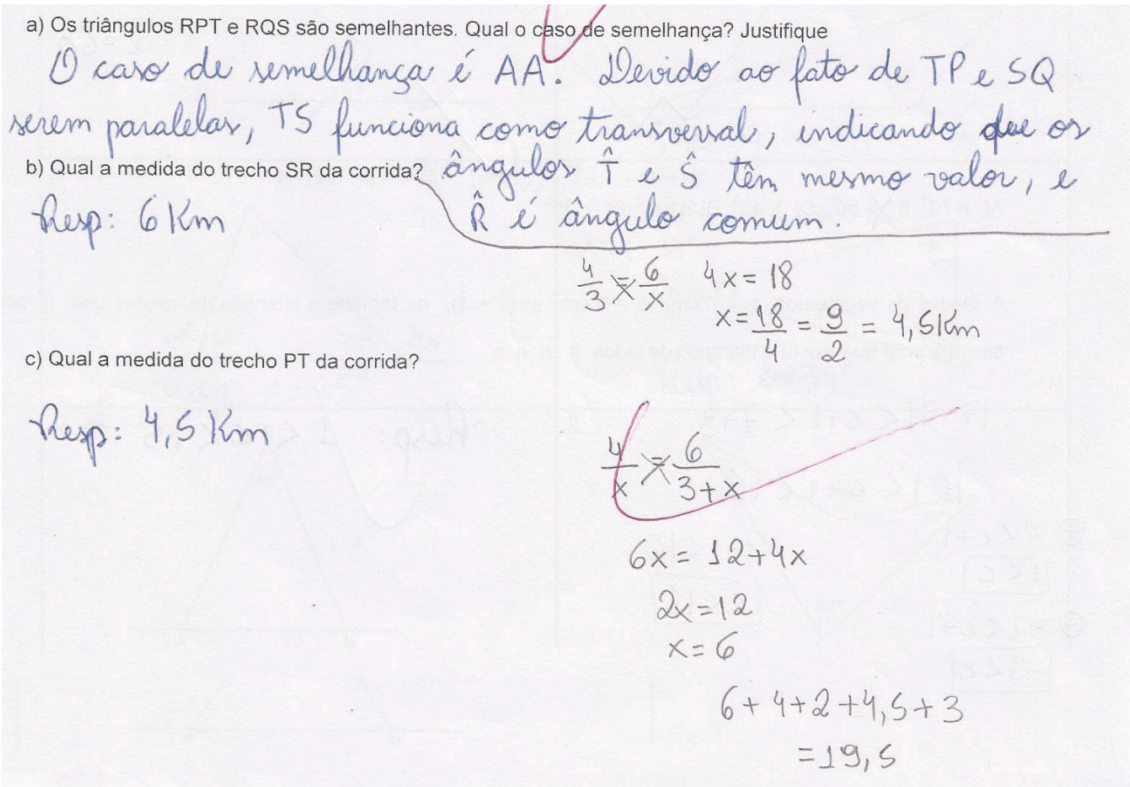
A33 apresentou uma resolução que envolveu um procedimento que utilizava o teorema de Pitágoras, concepção equivocada para a situação proposta (veja Figura 18), porque não fazia parte do conjunto de ferramentas estudadas naquele bimestre.

Figura 18- Resposta do aluno A19.



Para finalizar a análise, dentre os 8 alunos que resolveram corretamente a situação, apresentamos um exemplo de resolução que mostra com clareza que os conceitos envolvidos na questão proposta foram aprendidos pelo aluno, no caso A27.

Figura 17- Resposta do aluno A4.



a) Os triângulos RPT e RQS são semelhantes. Qual o caso de semelhança? Justifique

O caso de semelhança é AA. Devido ao fato de TP e SQ serem paralelas, TS funciona como transversal, indicando que os ângulos $\hat{T}$ e $\hat{S}$ têm mesmo valor, e $\hat{R}$ é ângulo comum.

b) Qual a medida do trecho SR da corrida?

Resp: 6 Km

$\frac{4}{3} = \frac{6}{x}$ $4x = 18$

$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ Km

c) Qual a medida do trecho PT da corrida?

Resp: 4,5 Km

$\frac{4}{x} = \frac{6}{3+x}$

$6x = 12 + 4x$

$2x = 12$

$x = 6$

$6 + 4 + 2 + 4{,}5 + 3$

$= 19{,}5$

Trata-se de um alento ao trabalho do professor, no entanto a análise realizada mostra desafios no sentido de minimizar as dificuldades surgidas, atenção aos erros, obstáculos didáticos e concepções equivocadas que precisam ser superadas em um próximo trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse estudo, questionamos qual compreensão se pode fazer do envolvimento dos alunos com a aprendizagem de semelhança de triângulos.

Percebemos que uma parte dos alunos aprendem corretamente o conceito estudado, por outro lado, para muitos alunos surgem as dificuldades, erros, obstáculos e concepções equivocadas ao se envolver com a aprendizagem do conceito de semelhança de triângulos.

O estudo mostrou que o termo dificuldade desvela erros, obstáculos e concepções equivocadas, que podem ser resultado da condução do processo de ensino e aprendizagem e/ou da falta de subsídios para a resolução de problemas. O resultado da análise de respostas de alunos a uma questão proposta em prova evidenciou o envolvimento dos alunos com o estudo de semelhança de triângulos, sendo que foram identificados alunos que prontamente interagiram corretamente com o conceito na situação estudada, por ter ocorrido aprendizagem. Sabemos também que os registros visuais são de uma importância para a geometria, pois são eles que nos dão o conceito de espaço e forma. Por outro lado, observamos que um conjunto significativo de alunos apresentou diferentes dificuldades, expressas por erros conceituais e procedimentais, ou por concepções equivocadas desse conteúdo, o que evidencia obstáculos que precisam ser superados

Um resultado encontrado em nossa análise é que o estudo desse conteúdo matemático exige do professor esforço para potencializar o processo de ensino e aprendizagem.

Entendemos que a análise realizada não se esgota esse estudo, o que mostra pistas que podem contribuir para a aprendizagem desse conteúdo da Geometria Plana, que ocupa um lugar significativo no currículo escolar e, consequentemente, é de fundamental importância para a formação de futuros professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactiques das mathématiques. **RDM**, Vol 7, nº 2, 1986.

BROUSSEAU, G. Les Obstacles **épistemologiques** et les problemes en mathématiques. **RDM**, Vol 4, nº 2, 1983.

CHEVALARD, Y. e JOHSUA, M.-A. La transposition didactique. **Édition la Pensée Sauvage**, ed 1991.

CURI, E. e RAMOS, M. L. D.. O “estado do conhecimento” dos termos erro, dificuldade e obstáculo nos periódicos de Educação Matemática. In: **VIDYA**, v. 33, n. 2, p. 29-39, jul./dez., 2013 - Santa Maria, 2013.

CURY, H. N. O papel do erro na aprendizagem de matemática. In: **XI ENEM - 2013**. Curitiba, SBEMBRASIL. 2013. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/ ix_enem/Palestra/PA%20-%2013.doc>. Acesso em 06 set 2015.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. ***Educação Matemática: uma introdução**.* 2.ed. São Paulo: EDUC, 2002. p. 135-153.

MAKHUBELE, Y. E. **Misconceptions and resulting errors displayed by Grade 11 Learners in the Learning of Geometry**. Masters Degree in Mathematics Education. University of Joannesburg, 2014. 238 p. Disponível em:<http://hdl.handle.net/ 10210/14112>. Acesso em 21 ago 2015.

TEIXEIRA, L. R. M. A análise de erros: uma perspectiva cognitiva para compreender o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. In: **Nuances** - Vol. III - Setembro de 1997, p. 47-52.

RECEBIDO EM: 20 ago. 2015
CONCLUÍDO EM: 28 set. 2015