

ANÁLISES PRELIMINARES E A ANÁLISE *A PRIORI* PARA A NOÇÃO DE INTEGRAIS DEPENDENTES DE PARÂMETROS

PRELIMINARY ANALYSIS AND *APRIORI* ANALYSIS RELATED TO DEPENDENT ON PARAMETERS INTEGRAL'S NOTION

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES*

RESUMO

O presente trabalho apresenta, descreve e sugere elementos cotejados ao decurso de uma ação investigativa, sobretudo em suas duas etapas iniciais (análises preliminares e análise a priori), que assume os pressupostos e a sistematização prevista por uma Engenharia Didática - ED. Dessa forma, tendo em vista os momentos clássicos, largamente relatados pela vertente francesa de pesquisa em Didática da Matemática, opta pelos momentos de análises preliminares e análise a priori, com a descrição de situações-problemas envolvendo o conteúdo de Integrais Dependentes de Parâmetros - IDP's. O citado conteúdo pode ser identificado num contexto da Transição Interna do Cálculo - TINC (ALVES, 2011) e permite sua discussão em um âmbito de ordem metodológica (DANNA-PICARD, 2004), bem como a possibilidade de uma transmissão didática afetada pelo uso do software GeoGebra. Dessa forma, o escrito indica elementos teóricos, cujo significado pode ser controlado, previsto e reproduzido/replicado numa eventual situação empírica a ser desenvolvida no locus acadêmico.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Integrais Dependentes de Parâmetros. Ensino. Tecnologia.

ABSTRACT

This work presents, describes and suggests some elements considered in the investigative action, especially in its first two steps (preliminary and a priori analysis) which takes the assumptions and systematization provided for Didactical Engineering - ED. Thus, in view of the classic moments, widely reported by the french tradition research, related to the Didactics of Mathematics, it chooses the preliminary and a priori analysis, describing some problem-situations involving the content of Dependent Integrals in Parameters - DIP. Said content can be identified in the context of the Internal Transition of the Calculus - ITC (ALVES, 2011) and allows their discussion in a methodological framework (DANA-PICARD, 2004) and the possibilities of a didactical transmission affected by the use of GeoGebra software. Thus, the present writing indicates some elements whose meaning can be controlled, predicted and reproduced/replicated on a potential empirical situation that can be developed in the academic locus.

Keywords: Didactical Engineering. Dependent Integrals in Parameters. Teaching. Technology.

* Doutor com ênfase no ensino de Matemática. Coordenador do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - IFCE/PGECEM. E-mail: fregis@ifce.edu.br

INTRODUÇÃO

Reconhecidamente, no que concerne ao ensino de conceitos científicos matemáticos deparamos, no *locus* acadêmico, determinados assuntos que proporcionam entraves recorrentes e dificuldades ou concepções inadequadas que podem persistir ao longo do período de estudos universitários. Com atenção particular, desenvolvemos aqui uma discussão relativa aos conceitos intimamente relacionados com a noção ou o processo de integração segundo Riemann, que possui posição invariante, com presença garantida nos currículos de formação de professores de Matemática no Brasil, quer seja num curso de bacharelado, quer seja num curso de Licenciatura em Matemática.

Por outro lado, cabe evidenciar os estudos acadêmicos que indicam barreiras, tanto ao ensino como à aprendizagem, relacionadas com o contato dos estudantes universitários, num certo período de tempo ou ainda num contexto de transição institucional como, por exemplo, do contexto escolar, para o ambiente acadêmico e um extenso repertório de exigências matemáticas, muitas vezes de natureza inédita, direcionadas aos estudantes (TALL, 1985; 1997). Não obstante, no presente escrito, assumimos uma preocupação relativa ao processo de Transição Interna do Cálculo - TINC (ALVES, 2011), no que concerne ao processo matemático de integração.

Ademais, tendo em vista a constatação, registro e a busca de entendimento acerca de um fenômeno originado no âmbito do ensino de integrais, adotamos uma perspectiva sistemática de concepção, descrição, preparação de um aparato teórico-conceitual para o ensino, para um planejamento científico e incursão investigativa, conhecida num âmbito nacional e internacional, chamada Engenharia Didática - ED (ARTIGUE, 1984; BROUSSEAU, 1998; DOUADY, 1993; ROBERT, 1986).

Não obstante, tendo em vista uma distinguida natureza matemático-epistemológica de nosso objeto, optamos pela descrição teórica e sistemática das duas etapas iniciais (análises preliminares e análise *a priori*), previstas numa incursão investigativa que elege a ED, como dispositivo que proporciona o acréscimo de conhecimentos científicos sobre um determinado problema ou fenômeno que buscamos compreender e explicar. Nesse sentido, recordamos que Almouloud & Coutinho (2008, p. 64) declaram que “formular um problema consiste em dizer, de maneira explícita, clara, compreensível e operacional, qual a dificuldade com a qual nos defrontamos e que pretendemos resolver, limitando o seu campo e apresentando suas características”.

Ademais, diante da nossa opção por uma ED, assinalamos ainda as concepções subjacentes ao referido *design* de metodologia de pesquisa, tomando como referência a escolha de um tema que se insere no ambiente acadêmico. E, desse modo, assumiremos posição semelhante ao de Robert (1983), diante de sua desconsideração dos resultados de análises dos manuais acadêmicos vinculados ao processo de integração e, com brevidade, a indicação de seus elementos de ordem histórico-epistemológica e algumas implicações no contexto acadêmico.

Antes de prosseguirmos, porém, cabe uma demarcação dos objetos matemáticos de nosso interesse. Neste sentido, sabemos que o processo de integração segundo Riemann (HAIRER & WANNER, 2008; MEDVEDEV, 1991; STAHL, 1999), possibilita o trato com uma classe mais abrangente de funções, nomeadamente, àquelas que não são contínuas ou limitadas em determinados intervalos (ALVES, 2014d). Assim, com origem na figura 1, levando em consideração o processo de generalização da noção de integral que, do ponto de vista acadêmico, conduz ao estudo compulsório dos estudantes por um período que pode perdurar por mais de dois anos (ALVES, 2011), restringir-nos-emos ao caso das integrais dependentes de parâmetros que, de modo *standard*, denotamos o referido objeto por $\int_a^\infty f(x,t)dx$, com $x \in IR$.

Na figura 1, consideramos modificações identificáveis no seu sistema particular de representações, o que se insere também na análise epistemológica do objeto matemático em jogo, como assim prescreve Douady (1984, p. 6), e evolui até o caso das Integrais Múltiplas - IM. O esquema sugerido na figura 1, envolve o processo de Transição Interna do Cálculo (ALVES, 2011), no caso da noção de integral segundo Riemann, posto que, existem outros métodos formais de obtenção e descrição de uma integral (BOURBAKI, 1969; GRENIER & LEGRAND, 1986).

No próximo segmento, abordaremos elementos que nos auxiliarão a compreensão do seu ensino atual, enfatizando os escritos acadêmicos particularmente interessados no ensino e na aprendizagem de Integrais Generalizadas - IG e as Integrais Dependentes de Parâmetros - IDP.

Figura 1 - Descrição do processo de Transição Interna no Cálculo - TINC relativo ao processo matemático de integração segundo Riemann (elaboração do autor)

$$\int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx \Rightarrow \int_a^\infty f(x, t) dx \Rightarrow \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

INTEGRAIS
DEFINIDAS

INTEGRAIS
IMPRÓPRIAS

INTEGRAIS
DEPENDENTES
DE PARÂMETROS

INTEGRAIS
MÚLTIPLAS

TRANSIÇÃO INTERNA NO CASO DO PROCESSO DE INTEGRAÇÃO

SOBRE O ENSINO DE INTEGRAL E A TECNOLOGIA

O relato das dificuldades registradas pelos estudantes na aprendizagem da noção de integral, segundo Riemann, encontra-se discutido em trabalhos acadêmicos desde a década de 80 (ORTON, 1983; TALL, 1985). Num momento atual, deparamos os avanços e potencialidades proporcionadas pela tecnologia, no sentido de descrever um cenário de possibilidades de ensino e de aprendizagem, inclusive, práticas institucionais alteradas e afetadas pelo seu uso (ARTIGUE, 2012, 2013). Com efeito, Artigue (2013, p. 7) acentua que “a paisagem educativa em Matemática mas, ainda, de modo geral, é profundamente modificada pelo impacto curricular possível da tecnologia”.

Num contexto de interesse mais específico, registramos investigações que apontam alguns elementos relacionados com as atividades de investigação dos estudantes, inclusive com referência ao ensino de integrais, com amparo tecnológico (DANA-PICARD, 2004a; 2004b; 2005a; 2005b; 2006; 2010). Por exemplo, Dana-Picard (2005a) discute possibilidades e entraves atinentes ao ensino de integrais dependentes de parâmetros. Dana-Picard fornece uma série de considerações didático-metodológicas relacionadas com o ensino das mesmas, aliando-se às potencialidades do uso de um CAS.

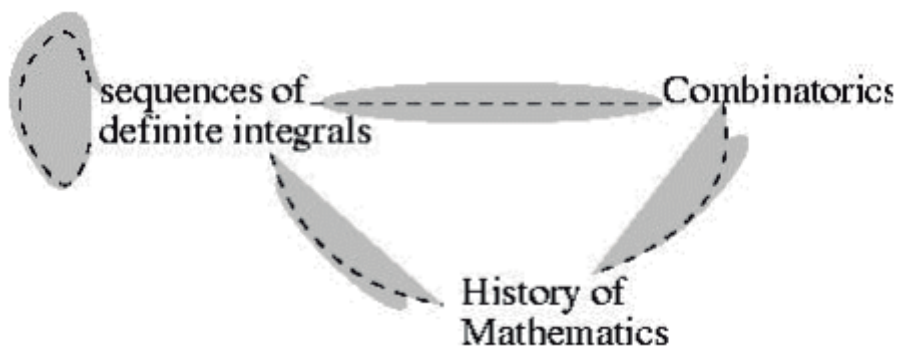
De modo particular, ele comenta que “exemplos de integrais dependentes de parâmetros podem ser encontrados aonde o seu cálculo pelo uso de relações de indução e a obtenção de formas fechadas vão além da habilidades de um estudante mediano”. Logo abaixo, na figura 2, divisamos um esquema mnemônico encarregado de esclarecer o sentido/significado de um termo cunhado por Dana-Picard, chamado de “vizinhança cognitiva” (cognitive neighborhood). Dana-Picard (2004a, p. 7) considera

uma vizinhança cognitiva de um determinado tópico matemático como incluída num certo tipo de espaço, que o mesmo chama de conhecimento matemático. Os tópicos

dentro de um vizinhança cognitiva estão relacionados por conexões, que podem ser representados por diagramas. Na verdade, se representamos os vértices por noções matemáticas, devemos representar as conexões entre os vértices, todavia, não representamos um gráfico no sentido ordinário. Pelo fato de sua não unicidade, as conexões são indicadas por uma espécie de nuvem.

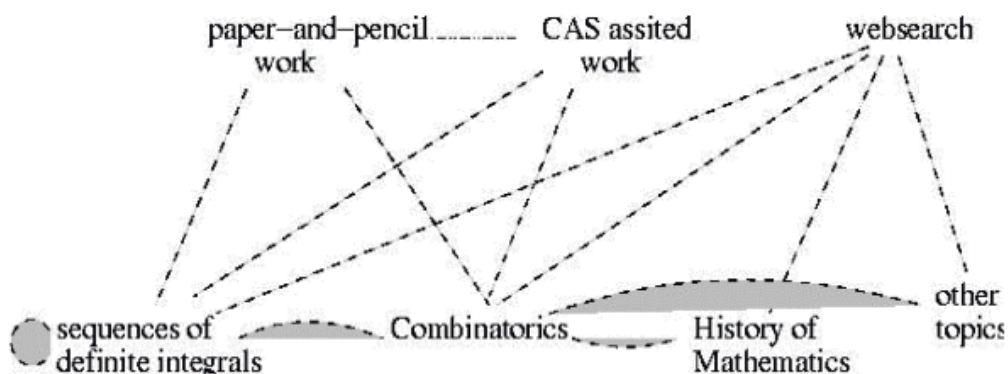
Na figura 2, identificamos as noções de Sequências de Integrais Definidas, Noções de Combinatória e História da Matemática. Observamos, seguindo os traços pontilhados, a presença de certas “nuvens” acinzentadas. O autor explica que nos processos cognitivos, existem conceitos e instrumentos, empregados de modo idiossincrásico pelos estudantes, de modo inesperado e que extrapolam os conhecimentos previstos em simples tarefas propostas pelo professor.

Figura 2 - Dana-Picard (2004a) descreve uma vizinhança cognitiva que envolve os saberes mobilizáveis por estudantes no decurso de tarefas específicas e ação em situação



Dana-Picard acentua a influência do pensamento de Trouche (2004), na medida em que considera um ambiente informático para a aprendizagem humana (ver fig. 3). O autor identifica instrumentos e relações entre os vértices anteriores. Como exemplo, ao indicar as informações que podem ser extraídas diretamente da *internet* (*websearch*), ao executar uma tarefa, o estudante pode inter-relacionar uma profusão de informações sobre diferentes integrais dependentes de parâmetros.

Figura 3 - Dana-Picard (2004a, p. 8) descreve ainda a noção de vizinhança cognitiva estendida (extended cognitive neighborhood)



Por outro lado, no que concerne ao ensino particular de integrais, Dana-Picard (2004b, p. 3) aponta as seguintes variáveis: o significado concreto de propriedades combinatórias de uma dada sequência de integrais; aspectos históricos relacionados com as expressões analíticas envolvidas; situações com significado real para os estudantes. A profusão de informações mobilizáveis pelo estudante proporciona considerar ainda a noção de vizinhança cognitiva estendida, como divisamos agora na figura 3.

Ora, para exemplificar, ao considerarmos a sequência no parâmetro 'n', indicada por $I_n = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x) dx$ e, por integração por partes, podemos obter $I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot I_{n-2}$. Por razões que omitiremos nesta parte preliminar, poderemos determinar que $I_{2p} = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2}$ e, com arrimo na Teoria dos Números de Fibonacci (ALVES, 2015; KOSHY, 2011), devemos encontrar ainda $f_p = \frac{(2p)!}{2^{2p+1} (p!)^2}$

que representa um elemento da sequência emblemática de Fibonacci (ALVES, 2015; HUNTLEY, 1970).

Ora, em poucas linhas, mobilizamos conceitos científicos reconhecidamente complexos, tendo como origem a tentativa da resolução de uma integral dependente de parâmetro, nesse caso, um parâmetro natural 'n'. Antes de encerrarmos a presente seção, acentuaremos dois exemplos abordados em sua tese, por Gonzalez-Martin (2004). Neste sentido, Gonzalez-Martin (2005, p. 77) comenta o exemplo de um aluno de produziu um desenho, que expressa a ideia de função, representada por uma curva, sem patologias, num intervalo fechado $[a, b]$. Ao lado esquerdo, os autores comentam a descrição de retângulos no intervalo considerado no sentido de produzir um significado para o processo de integração no contexto das IG's (ver figura 4, ao lado esquerdo).

Um pouco mais adiante, trazemos o segundo exemplo de Gonzalez-Martin (2005, p. 82), quando o mesmo acentua o embate filosófico entre o matemático John Wallis e o filósofo Thomas Hobbes em torno de determinadas questões filosóficas. Dentre elas, se destaca o caso da "trombeta do anjo Gabriel". Tal trombeta se constrói a partir da hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$. Gonzalez-Martin (2005, p. 82) explica que "é fácil compreender que a área superficial da trombeta é infinita; todavia, seu volume interior é finito."

Analicamente, a situação anterior é explicada quando consideramos, por exemplo, seu volume, podemos empregar o seguinte $V_{\text{trombeta}} = \pi \int_1^{\infty} (f(x))^2 dx = \pi \left(\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_1^r \left(\frac{1}{x^2}\right) dx \right) = \pi \cdot \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \pi$, o que corresponde ao valor aproximado de 3.14. Por outro lado, quando buscamos avaliar o comportamento da área da mesma superfície, escrevemos: $A_{\text{trombeta}} = 2\pi \int_1^{\infty} \left| \frac{1}{x} \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2} \right| dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3} dx$.

Agora, consideraremos uma outra função $g(x) = \sqrt{x^4}/x^3 = x^2/x^3 = 1/x$. Portanto, avaliando $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} = 1$ e com isso, depreendemos que as funções $f(x)$ e $g(x)$ possuem

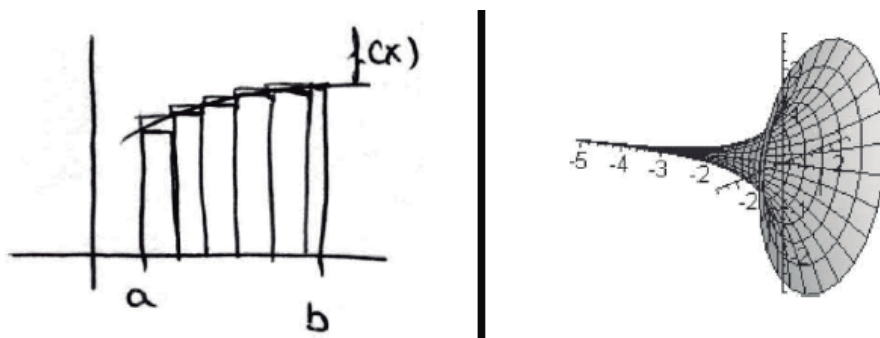
comportamento equivalentes (ALVES, 2014d). Todavia, sabemos que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 0 = +\infty$.

Ora, este fato pode conduzir a uma situação aparentemente contraditória, qual seja, desde que seu volume foi aproximadamente de 3.14. Poderíamos depreender que uma quantidade finita de latões de tinta seriam necessários para pintar toda a trombeta, todavia, quando comparamos as integrais

$A_{trombeta} = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3} dx$ e $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$, concluiremos que a primeira deve divergir, embora, muito

lentamente (ALVES, 2014d, p. 23). Isto é, acabamos de verificar que nunca conseguiríamos pintar a área superficial total da trombeta do anjo Gabriel, posto que a mesma tende ao infinito! (ver figura 4, ao lado direito).

Figura 4 - Gonzalez-Martin (2005) confronta os dados de cunho analítico com as conjecturas produzidas pelos estudantes no estudo de situações envolvendo a noção de Integrais Generalizadas - IG



Assim, a partir das considerações de Gonzalez-Martín (2005), identificamos que alguns elementos de ordem histórico-epistemológica carecem de atenção, uma vez que, de acordo com a figura 1, a classe de IDP's constitui uma generalização da classe das IG's e, assim, os entraves e concepções inadequadas dos aprendentes no ensino da IG's, registrados empiricamente, podem vir a se manifestar também no contexto do ensino da IDP's, bem como se prolongar até o contexto de IM's (ALVES, 2011).

Dessa forma, na próxima seção, assumirmos um obstáculo para o ensino e para a aprendizagem, envolvendo a sistemática de uma abordagem metodológica para um conteúdo desta natureza (BROUSSEAU, 1986a). Optamos por descrever apenas os traços essenciais de uma ED, desconsiderando a experimentação, a análise *a posteriori* e, por fim, a validação do dispositivo experimental. Tal fato acentua a necessidade de alguma familiaridade do leitor com o *design* de investigação escolhido.

SOBRE A ENGENHARIA DIDÁTICA

Margolinas (2004, p. 4) desenvolve comentários esclarecedores sobre a definição de um campo de investigação e no que diz respeito ao surgimento de um novo paradigma que evoluiu com a contribuição de vários trabalhos investigativos, observando ainda que “este paradigma surgiu da

Matemática e, assim, nos interessam apenas os resultados envolvendo o contexto da Matemática, e não garantimos nenhuma passagem à outras disciplinas” (MARGOLINAS, 2004, p. 4).

De início, Margolinas (2004, p. 5) acentua certo tom de crítica ao mencionar que:

Todo mundo ou quase todo mundo parece saber e possuir algo a dizer sobre o ensino: os psicólogos, pois se trata de aprendizagem, os sociólogos, pois a escola é uma instituição social, os matemáticos, visto que, trata-se de aprender matemática. E os parentes, pois trata-se da educação de suas crianças.

O que se observa é que um discurso, embora fundamentado em seus campos epistêmicos precisos de formação original, não estão mais sob controle, quando tratamos em aplicá-los aos processos de transmissão/mediação de um saber científico, como no caso do saber matemático.

Num sentido contrário, no bojo das reflexões indicado por Margolinas (1995), se inserem os pressupostos da ED, posto que se enquadram como decorrência de evolução da pesquisa em Didática da Matemática (BROUSSEAU, 1986), cujos fundamentos e pressupostos convergiram, tendo como escopo explicar fenômenos específicos, (ensino/aprendizagem) relacionados de modo intrínseco com o saber matemático.

Ora, a identificação de um problema constitui o primeiro passo para a adoção de uma Engenharia. Douady (1993, p. 3) assinala que “todo o trabalho de construção, análise e previsão, repousa sobre um questionamento didático”. E, diante dessa perspectiva, buscamos a descrição de roteiros de ensino (sequências de ensino) diferenciados, afim de obstar o aparecimento e manifestação de determinados entraves ao entendimento dos estudantes. Nesse sentido, vale a pena registrar as considerações de Bolon (1996, p. 75), quando explica que:

A organização da sequência repousa sobre a hipótese de que a criança constrói novos conhecimentos a partir dos conhecimentos anteriores, na necessidade e em condições de reestruturá-los. O papel do professor se insere em favorizar a articulação entre os antigos saberes e os novos, proporcionando um novo procedimento de resolução, procedimento que resultará num novo conhecimento.

Mas, em consonância com as considerações de Dana-Picard e o quadro atual do ensino de integrais dependentes de parâmetros relatado por trabalhos científicos especializados que comentamos na seção passada, podemos depreender algo sobre a existência de um problema no âmbito do ensino acadêmico merecedor, de modo indubitável, de atenção por parte dos estudiosos.

Antes de prosseguirmos, cabe assinalar que não temos a pretensão aqui em responder (confirmar ou refutar) (ALMOULOU & COUTINHO, 2008, p. 64), de modo empírico, qualquer questão de ordem investigativa, entretanto, formulamos o seguinte questionamento: como descrever situações de ensino, com o conteúdo de integrais dependentes de parâmetros, de modo a proporcionar aos estudantes, um cenário de aprendizagem que não desconsidere os elementos de uma vizinhança cognitiva?

Diferentemente do trato metodológico escolhido por Dana-Picard (com o uso do CAS Maple), utilizaremos o *software GeoGebra* no sentido de estruturar nossas situações didáticas e, em decorrência do modelo matemático em questão, descreveremos apenas (de modo restritivo) as duas primeiras etapas de uma ED (ALVES, 2014a; 2014b; 2014c). Antes, porém, declaramos nossa ação intencional pela opção de “uma teoria de controle das relações entre significados e situações” (ARTIGUE, 1996, p. 244-245). Vale distinguir, ao decurso de um processo investigativo, o controle

de ações e significados produzidos em situações didáticas (ARTIGUE, 1984, p. 6; BROUSSEAU, 1986, p. 243), do controle de situações em etapas específicas e particulares de uma ED (variáveis macro-didáticas). No primeiro caso, temos condições de produzir uma predição de elementos de ordem qualitativa que podem ser tornar reproduzíveis numa ocasião empírica única e particular de aplicação do aparato conceitual que buscamos estruturar/descrever em sala de aula (variáveis micro-didáticas, relacionadas com a organização de sessão).

Antes, porém, de deflagrarmos a próxima etapa, recordamos que a primeira fase da ED, nomeada de análises preliminares, possui como um dos objetivos a “identificação dos problemas de ensino e de aprendizagem do objeto de estudo e delinear de modo fundamentado as questões, as hipóteses, os fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa” (ALMOULOU, 2007, p. 172).

ANÁLISES PRELIMINARES

Como mencionado na seção anterior, fundamentamos nossa metodologia de pesquisa nos pressupostos da ED, que possui um campo científico bem definido na Didática da Matemática e, assim, prescinde o uso de outros quadros conceituais de metodológicos (MARGOLINAS, 1995). Assim, nas análises preliminares ou prévias, teremos como objetivo a identificação/demarcação dos problemas de ensino e aprendizagem de determinado objeto de estudo. Na seção anterior, indicamos alguns elementos preocupantes no ensino de IDP's e do ensino de IG's. Os dados indicados anteriormente nos permitem um entendimento do ensino atual e seus efeitos e se enquadram na primeira categoria de informações cotejadas em nosso processo investigativo.

Com efeito, segundo a ED, as etapas de análises preliminares e análise *a priori* envolvem a coleta de dados que independem de um quadro de referência empírica particular e antecedem o momento de uma eventual experimentação. Isso posto, os dados considerados nas duas etapas iniciais constituem nossa primeira categoria de informações que, como já mencionado, independem da experimentação em sala de aula.

Assim, dois elementos ou categorias de informações devem ser evidenciadas nessa etapa, de acordo com Almouloud (2007, p. 172), a saber: (i) estudo da organização matemática; (ii) análise didática do objeto matemático escolhido. Se inserem ainda no item (i), informações relacionadas com o estágio de gênese ou nascedouro dos conceitos científicos de interesse, não obstante, identificamos uma escassez de informações históricas atinentes ao tópico de IDP's, com exceção de exemplos no âmbito da História da Matemática, discutidos por Hairer & Wanner (2008, p. 261) e Alves (2013a; 2013b).

No bojo das possíveis análises didáticas do objeto matemático escolhido, não desenvolveremos análise de diferentes instituições aonde o objeto é ensinado e a correspondente evolução do trato metodológico do conceito científico de nosso interesse. Além disso, não desenvolveremos uma análise das propostas curriculares no que concerne ao conteúdo de IDP's. Por outro lado, em Alves & Lopes (2013), evidenciamos a descrição de um ensino acadêmico que torna hegemônico as práticas algoritmizadas que acentuam antes o caráter operacional do processo de integração, em detrimento de uma compreensão conceitual, quando desconsideramos a exploração da tecnologia atual.

Em outro estudo, Alves (2014d) discute, no âmbito do ensino acadêmico, as possibilidades de visualização e entendimento do processo de integração, por intermédio de representações 2D e 3D. O contexto de ensino referenciado pelo autor nominado por TINC, leva em consideração uma abordagem para o ensino das IDP's com recursos aos softwares GeoGebra e do CAS Maple, em uma perspectiva de complementaridade.

Encerramos os elementos considerados nas análises preliminares e, doravante, identificaremos os elementos mais representativos que deverão consubstanciar a fase seguinte de investigação.

ANÁLISE A PRIORI E DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES

Na fase atual, manifestamos um profundo interesse pela “determinação e seleção dos elementos que permitem os comportamentos dos estudantes e seu significado” (ARTIGUE, 1995, p. 45). Assim, de modo sistemático, e seguindo a tradição dos estudos dessa vertente, descreveremos uma parte descritiva e outra parte preditiva, posto que, se mostra condicionada pelas características das situações ou da situação-didática ora considerada. Declaramos posição concorde com os autores Grenier & Legrand (1986, p. 9), no que concerne aos nossos interesses que condicionam e devem promover o debate científico entre os estudantes que podem ser apresentados às duas situações didáticas envolvendo a noção de IDP.

Nesse sentido, atenção especial pode ser dedicada ao conjunto de conjecturas e ilações confrontadas em grupo de alunos participantes. Diante dessa perspectiva, assumimos a exploração do software como fator de modificação de mediação didática para o professor (ARTIGUE, 2012; 2013), bem como o fortalecimento do componente de visualização, como fator impulsionador para a mobilização de conhecimentos tácitos e provisórios para o grupo de estudantes (ALVES, 2014c).

Outrossim, deve permanecer claro aos agentes envolvidos, tanto professor *expert* e alunos, que o conjunto de proposições exatas e inexatas, formuladas ao decurso da investigação, concorrem e provocam aprendizagem (GRENIER & LEGRAND, 1986, p. 10). E, também, as noções matemáticas que desejamos explorar são significadas por intermédio de representações numéricas, geométricas e algébricas (ROBERT, 1986, p. 14).

Antes, porém, de apresentarmos as duas situações-problema, consideraremos a seguinte família de integrais impróprias, no parâmetro ‘n’, definidas por $I_n = \int_0^1 x \cdot (\ln(x))^n dx$ (DANA-PICARD, 2005a, p. 2). O autor acentua a seguinte condição $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^p \cdot (\ln(x))^q) = 0$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e que permite inferir a convergência da integral anterior, na medida em que escolhemos um intervalo adequado no processo de integração.

Dana-Picard (2005a, p. 2 - 3), com arrimo no processo de integração por partes, exhibe a igualdade: $I_n = \int_0^1 x \cdot (\ln(x))^n dx = -\frac{n}{2} \cdot I_{n-1} = \left(-\frac{n}{2}\right) \left(-\frac{n-1}{2}\right) \cdot I_{n-2} = \dots = (-1)^n \frac{n!}{2^n} \cdot I_0$, em que $I_0 = \int_0^1 x \cdot (\ln(x)) dx = 1/2$.

E, dessa forma, obtemos a fórmula fechada $I_n = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$, com $n \geq 0$.

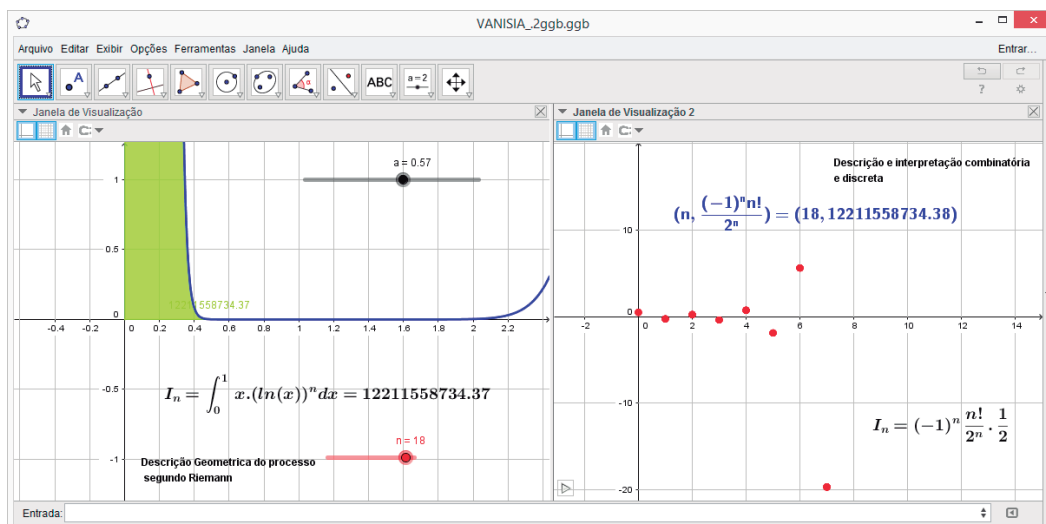
Por outro lado, tendo em vista a descrição geométrica do processo de convergência ou divergência da família de integrais que indicamos $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que poderemos divisar logo abaixo, ao lado esquerdo, na cor amarela. Vale recordar que, em alguns trabalhos (ALVES, 2014a; 2014b; 2014e; 2013a; 2013b; 2013c), deparamos as potencialidades do uso da tecnologia tendo em vista a visualização e, por conseguinte, a busca pelo entendimento geométrico do processo matemático de integração, bem como no caso de outros processos reconhecidamente abstratos.

Isso posto, com alguns comandos básicos do *software GeoGebra*, delimitamos a variação do seletor no parâmetro ‘n’, com a variação $0 \leq n \leq 20$. Com o amparo do valores fornecidos pelo programa, podemos inferir que o valor correspondente da integral, para $n = 18$ $\therefore I_{18} = 12211558734,37$.

Com a exploração do seletor, para $n = 0 : I_0 = 0,16$ e, outros valores grandes podem ser escolhidos com o escopo de identificar, com amparo na visualização, o seu comportamento de convergência ou de divergência (fig. 5 e 6).

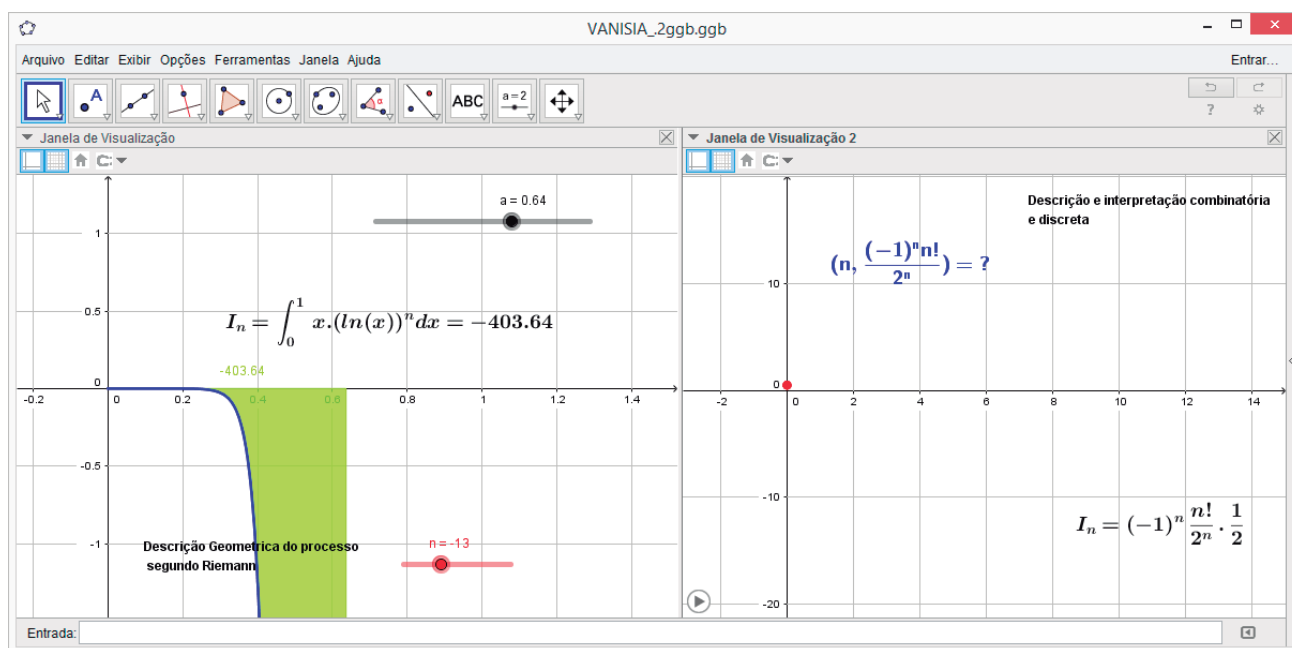
Por outro lado, ao lado direito, na mesma figura, acentuamos o comportamento discreto da integral anterior, posto que, consideramos os pares ordenados do tipo $(n, (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}})$. Ou seja, ao lado direito observamos a animação de um ponto, na cor vermelha que pode indicar os valores correspondentes em termos do valor numérico assumido pela respectiva família no parâmetro 'n'. Danna-Picard (2005, p. 2) considera ainda a expressão $I_n = \int_0^1 x \cdot (\ln(x))^n dx = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}} \therefore 2^{n+1} \cdot I_n \cdot (-1)^{-n} = n!$ e, assim, “teremos uma representação integral para a noção de fatorial”. E, um pouco mais adiante, indica a seguinte condição $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \cdot (\ln(x))^q = 0$, para dois inteiros p e q positivos.

Figura 5 - Exploração metodológica da noção de “soma visual” propugnada por Alves (2014a; 2014b) que proporciona visualizar ricas relações conceituais com auxílio do GeoGebra



Aqui, reparemos uma mudança de perspectiva conceitual sugerida por este autor, na medida em que estimula o entendimento dos alunos do símbolo do fatorial, costumeiramente indicado por $n!$, por intermédio do processo de integração envolvido com a família de IDP's. Em outra situação didática, Dana-Picard (2010, p. 63) comenta as relações de determinadas integrais com, por exemplo, os números de Catalan (KOSHY, 2009), definidos por $C_p = \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p}$, com $\forall p \in \mathbb{N}$. (DANA-PICARD & ZEITOUN, 2012a; 2012b).

Figura 6 - Com a alteração dos valores dos seletores do software GeoGebra podemos explorar o comportamento da família de integrais para índices negativos (elaboração do autor).



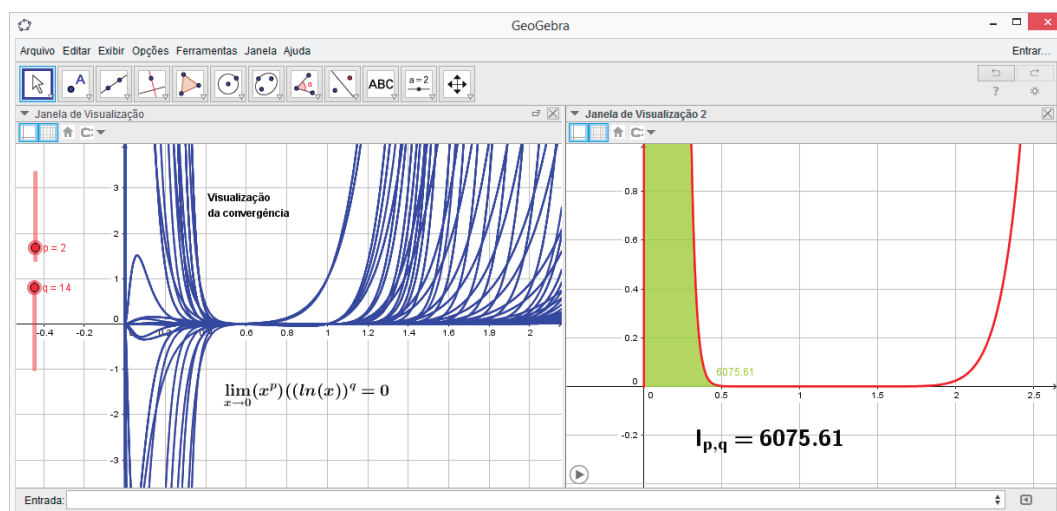
Antes de abordarmos nossa primeira situação, acentuamos a perspectiva de Brousseau (1986), no sentido da descrição de uma situação didática, bem como a modelização de um ambiente específico que envolve um determinado saber matemático e se apresenta condicionado pelo seu valor epistêmico. Os elementos levados em consideração, logo adiante, são constituídos pelos sujeitos (estudantes), pelo professor (*expert*) e interações com o saber científico que dependem do tempo (BROUSSEAU, 1988, p. 313). Outrossim, assumimos posição concorde com Brousseau (1986a, p. 277) quando ressalta que “a transposição didática depende, fundamentalmente, das concepções que os professores carregam consigo sobre o pensamento matemático”.

De modo simplificado, recordamos que: (i) situação de ação em que são consideradas toda a sorte de declarações dos estudantes; (ii) situação de formulação entendida sem ainda o debate científico em torno de uma prova ou demonstração; (iii) situação de validação, envolvendo a testagem do modelo matemático envolvido (BROUSSEAU, 1986, p. 347). E, por fim, a (iv) situação de institucionalização em que os conhecimentos oficiais são indicados pelo *expert* e incorporados ao esquemas mentais dos alunos assumindo valor institucional (ALMOULOU, 2007, p. 40).

Situação-problema I: Decidir, com auxílio do *software Geogebra*, a convergência ou divergência da integral imprópria, dependente dos parâmetros, indicada por $I_{p,q} = \int_2^? x^p \cdot (\ln(x))^q dx$. Sugerimos empregar a seguinte propriedade $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \cdot (\ln(x))^q = 0$, para dois inteiros p e q positivos ($p, q \in \mathbb{N}$).

Comentários: Assumiremos posição concorde com Alves (2014d), no sentido de não precipitar e indicar, peremptoriamente, a variação correspondente do símbolo $\int_?^?$ que produzem um sentido/significado do processo integrais impróprias.

Figura 7 - Visualização das duas janelas do *software* GeoGebra com a indicação de uma família de funções (ao lado esquerdo) e o comportamento da área sob a curva designada pela função (elaboração do autor).



Situação de ação: Assumimos como pressuposto de que “a constituição do sentido, tal como entendemos, implica numa interação constante dos alunos com situações problemáticas, interações dialéticas (caso o sujeito antecipe, finalize suas ações) [...]” (BROUSSEAU, 1998, p. 117). Assim, de modo preliminar, os alunos manifestam uma ação em situação, na condição em que a situação problema manifeste um sentido e desperta o interesse dos mesmos.

Os alunos podem dispor da construção *a priori* elaborada que exibimos na figura 7. Acentuamos, porém, que a exploração do *software* pode impulsionar concepções tácitas e a atividade de elaboração de conjecturas desejáveis atinentes ao processo de convergência da família de funções (ao lado esquerdo), na cor azul, na medida em que os mesmo consideram valores $x \rightarrow 0^+$.

Além disso, para mantermos a fidedignidade com a definição e o sentido/significado extraído de sua definição formal, os estudantes deverão ser instigados a desenvolver uma atenção maior para o intervalo $(0,1]$, posto que, quando visualizamos o intervalo $[1, +\infty)$, os gráficos (na cor azul), tendem a manifestar um comportamento de maior dispersão e, portanto, sugerem a não existência do limite indicado por $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \cdot (\ln(x))^q = 0$. Desse modo, apenas em $(0,1]$, contamos com a possibilidade de sua consistência. Dessa forma, as relações e significados matemático deve ser depurados na fase atual, na medida em que, uma linguagem compreensível por todos deve ser mobilizada (ALMOULOU, 2007, p. 38).

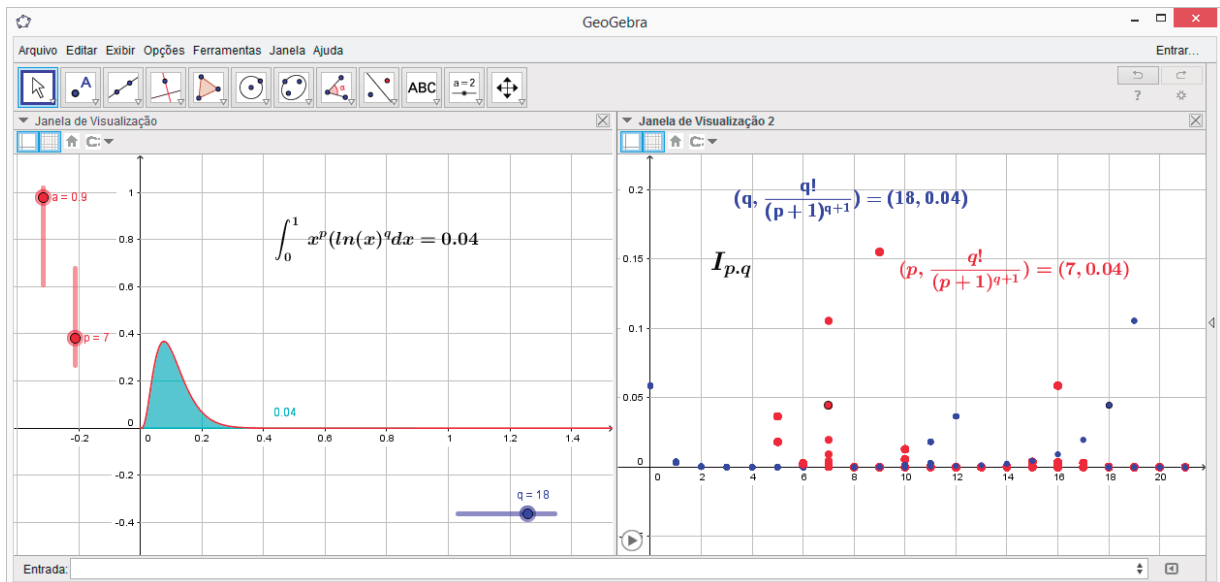
Situação de formulação: Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate a dialética “permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns”. Diante disso, um sistema peculiar simbólico-notacional deve ser mobilizado, tendo como fim e objetivo, a homogeneização e troca de informações no grupo de estudantes.

E, nesse momento, ao considerar a seguinte integral $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \cdot (\ln(x))^q dx$, podemos assumir

que $u = \ln(x)^q \therefore du = q \cdot (\ln x)^{q-1} \cdot \frac{dx}{x}$, enquanto que $dv = x^p dx \therefore v = \frac{x^{p+1}}{p+1}$. Segue, pelo processo de integração por partes, que: $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \cdot (\ln(x))^q dx = (\ln(x))^q \cdot \left(\frac{x^{p+1}}{p+1} \right)_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \cdot q (\ln x)^{q-1} \cdot \frac{1}{x} dx$

janelas, inclusive do lado esquerdo na mesma figura. Notamos que, na fase dialética subsequente, a teoria deve funcionar, no sentido de confirmar ou rechaçar declarações elaboradas na fase atual.

Figura 8 - Visualização de duas janelas do software proporciona a “soma visual” das informações e seu confronto com o modelo formal subjacente (elaboração do autor).



Daí, as informações do quadro analítico e numérico poderão ser confrontadas com as ilações produzidas na fase preliminar, com apelo tácito e intuitivo (ALVES, 2012) que exploramos na figura anterior.

Situação de validação: Nessa fase, num contexto do “debate da certeza das asserções” (ALMOULOU, 2007, p. 40), os dados produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes, com as informações e inferências empregadas afim de obter a relação que indicamos por $\int_0^1 x^p \cdot (\ln(x))^q dx = I_{p,q} = \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$, deverão reforçar as relações conceituais entre o modelo formal de integração na variável real, indicado por $\int_0^1 x^p \cdot (\ln(x))^q dx$, com um outro modelo, de natureza combinatória, representado pelo número $\frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$, ou ainda, o entendimento da relação $(p+1)^{q+1} \cdot \int_0^1 x^p \cdot (\ln(x))^q dx = q! \in \mathbb{N}$.

Situação de institucionalização: Para concluir, todas as informações produzidas nos momentos didáticos anteriores devem ser coligidos, no sentido da culminância e a preparação de um substrato didático para a enunciação do seguinte teorema e do corolário (descritos logo na sequência), tendo como escopo a fixação/determinação do estatuto oficial de um saber científico (ALMOULOU, 2007, p. 40).

Teorema: Para dois números naturais p e q , teremos que $\int_0^1 x^p \cdot (\ln(x))^q dx = \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$ ou $((p+1)^{q+1}) \cdot \int_0^1 x^p \cdot (\ln(x))^q dx = q!$.

Demonstração: ver Dana-Picard (2005a, p. 4).

Corolário: Para um número natural n , teremos que $\int_0^1 x \cdot (\ln(x))^n dx = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$ ou

$$((p+1)^{q+1}) \cdot \int_0^1 x^p \cdot (\ln(x))^q dx = q!.$$

Demonstração: ver Dana-Picard (2005a, p. 5).

Logo em seguida abordaremos uma segunda situação didática, não obstante, recordamos que uma mesma noção matemática se articula e se relaciona com uma família de situações didáticas (BROUSSEAU, 1988, p. 316). Dessa forma, perseguimos um *link* conceitual que deverá ser objeto de descoberta por parte do aprendiz no seguinte contexto de discussão e debate científico.

Situação-problema II: Decidir o caráter de convergência ou divergência da seguinte integral

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})^n} dx, \text{ para todo índice inteiro não negativo.}$$

Comentários: no próxima situação, com arrimo na figura 9, o estudante será instigado a uma análise pormenorizada da integral $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})^n} dx$. Dessa forma, deverá identificar valores

(numéricos) correspondentes de alguns índices em que não contamos, eventualmente, com sua convergência.

Situação de ação: com origem em um manipulação do estudante de seletores moveis do *software GeoGebra*, os alunos poderão depreender que as contribuições dinâmicas de área (de cor amarela) tendem paulatinamente a decrescer, na medida em que $x \rightarrow +\infty$. Ora, ao lado direito, com origem no exemplo discutido na seção anterior, mostraremos que podemos contar com a seguinte expressão

$I_n = \frac{n}{n^2-1}$ e, com origem no rastro (na cor azul) definido no plano cartesiano (como um recurso do *software*) por $(n, \frac{n}{n^2-1}) \in \mathbb{R}^2$, os estudantes poderão agora concluir que seus valores não assumem

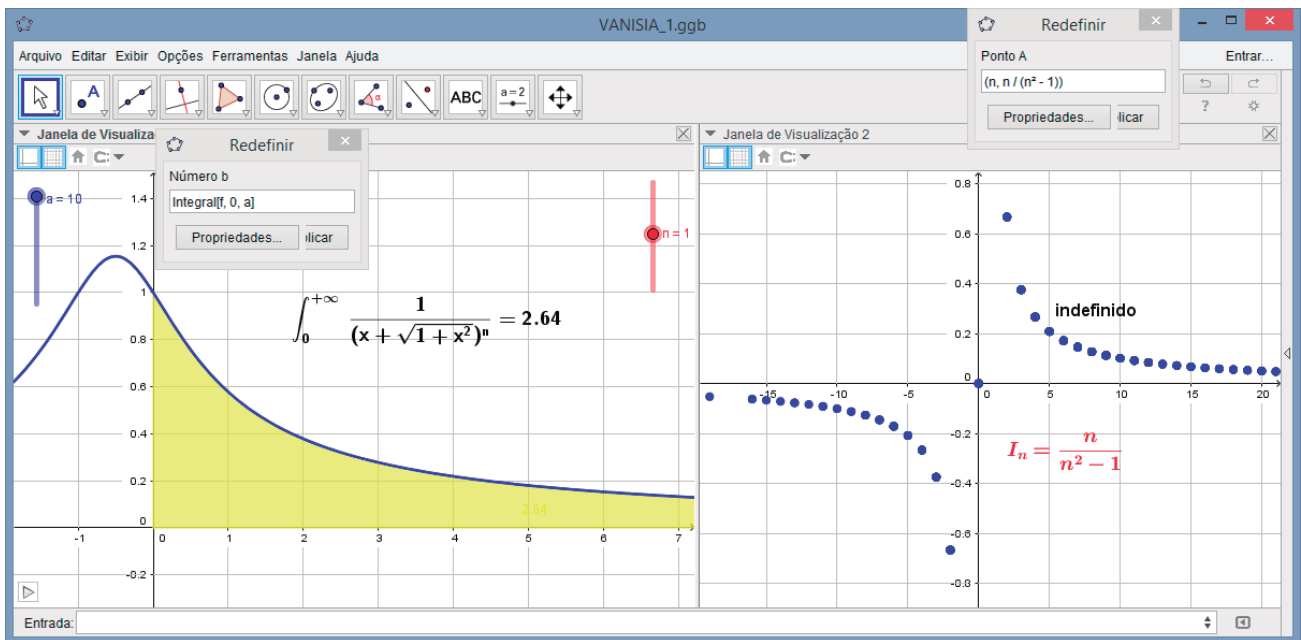
valores demasiadamente grandes, na medida em que $n \rightarrow +\infty$. Todavia, a construção com o *software* permite, ainda, a previsão dos valores numéricos assumidos pela integral, inclusive, para índices negativos.

Entretanto, podemos analisar, de modo particular, os valores iniciais de seu comportamento, com o auxílio da função rastro do *GeoGebra* (ponto na cor azul ao lado direito). Observamos, ainda, os valores numéricos assumidos pela integral anterior indicando, exatamente 2.64 (ver figura 9, ao lado esquerdo).

Com origem na exploração do modelo formal e do ambiente produzido pelo *software*, o professor deve instigar uma plenária de troca de informações entre os estudantes (AUMOULOU, 2007, p. 38) e, assim, terá início a fase dialética seguinte. Nesse momento, o professor estimulará um processo de homogeneização da linguagem simbólica e ser dispensada nas estratégias preliminares ou o surgimento das ideias iniciais a serem implementadas pelo grupo.

Além disso, os estudantes devem ser estimulados a explorar a construção com o *software GeoGebra* (ver figura 9) que divisamos abaixo, com o intuito de relacionar/perceber/identificar as propriedades matemáticas na janela do *software* ao lado esquerdo (descrição da variável real), com a janela exibida ao lado direito (descrição da integral por intermédio de variáveis discreta). Tais relações conceituais são valorizadas e imprescindíveis, segundo Dana-Picard (2004a; 2004b) e Dana-Picard & Kidron (2006) e Dana-Picard & Steiner (2003).

Figura 9 - Visualização de um processo dinâmico envolvendo o processo de integração com a exploração de representações aritméticas, geométricas e algébricas com arrimo no *software*.



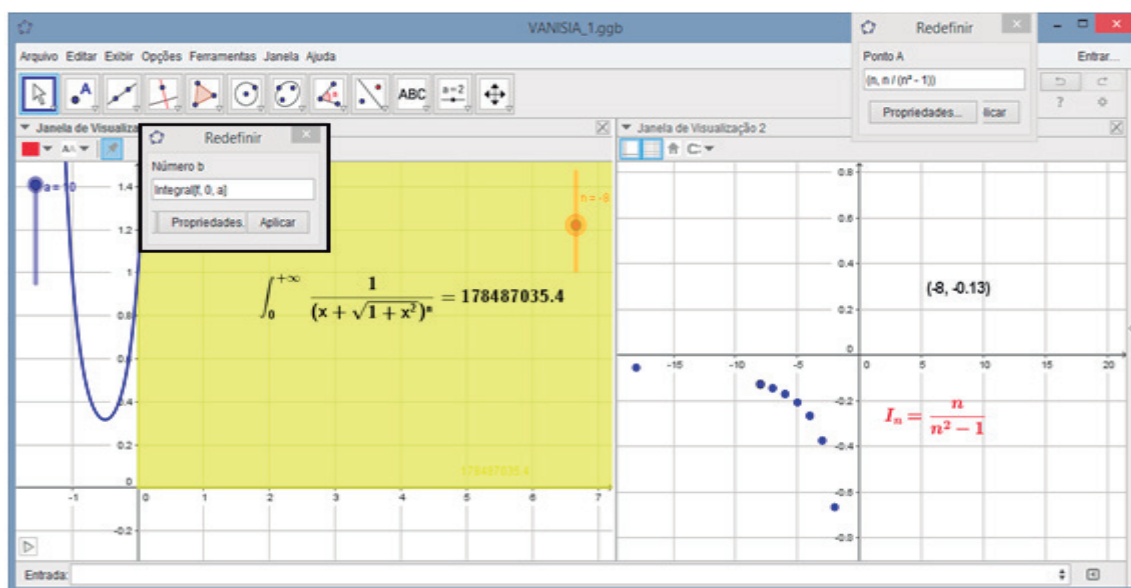
Situação de formulação: Todavia, cabe observar também que $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})} dx$ e, usando que $x = \sinh(t) \therefore dx = \cosh(t)$, podemos substituir

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh(t)}{\sinh(t) + \cosh(t)} \frac{\cosh(t) - \frac{e^t + e^{-t}}{2}}{\cosh(t) - \frac{e^t - e^{-t}}{2}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{2e^t} dt = \int_0^{+\infty} (1 + e^{-t}) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{e^{-t}}{2} \right)_0^{+\infty} = +\infty$$

Portanto, divergente para $n = 1$. Desse modo, com origem na visualização, os alunos podem fazer os devidos ajustes do modelo indutivo e no enunciado anterior, e considerar com comportamento de convergência da integral imprópria $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})^n} dx$, agora com a condição restritiva de $n \geq 2$.

Por outro lado, na figura 10, poderemos conduzir o estudantes ao entendimento da divergência da referida integral (para o caso de $n < 0$), na medida em que, os mesmo podem visualizar, ao lado esquerdo, as contribuições tendencialmente crescentes (na cor amarela), oriundas da valor numérico da integral anterior expressido pelo software. Ao lado direito, o comportamento esperado dos pontos do tipo $(n, \frac{n}{n^2-1}) \in \mathbb{R}^2$, devem ser do tipo de afastamento do eixo das abcissas. Desse modo, a partir da “soma visual” envolvendo a ação perceptual de coligir os dados exibidos nas duas janelas do *software* GeoGebra, os alunos poderão depreender o comportamento de divergência, quando exploramos os índices indicados I_{-n} , com $n > 0$. Notamos que seu valor numérico indicado 178487035,4 e que tende a crescer (rapidamente) na construção abaixo (região na cor amarela).

Figura 10 - “Soma visual” relativa a uma vizinhança cognitiva relacionada com a noção de integrais dependentes de parâmetros no caso da divergência (elaboração do autor).



Situação de validação: Almouloud (2007, p. 39) explica que “é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo de situação) ao julgamento de um interlocutor”. Ora, do ponto de vista do procedimento analítico, ao considerar que $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})^n} dx$, efetuando a substituição anterior, devemos encontrar

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})^n} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh(t)}{(\sinh(t) + \cosh(t))^n} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{(e^t)^n} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{t(1-n)} + e^{-t(1+n)}) dt$. Vamos considerar as seguintes integrais: $J_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{t(1-n)} dt$ e $K_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+n)} dt$. Tomaremos $u = t(1-n) \therefore t \rightarrow +\infty$, segue que $u \rightarrow -\infty$.

E, quando $u = 0 \therefore t = 0$. Desse modo, teremos: $J_n = \int_{-\infty}^0 \frac{e^u}{1-n} du = \frac{1}{1-n} \int_{-\infty}^0 e^u du = \frac{1}{1-n} e^u \Big|_{-\infty}^0$.

Ora, mas basta ver que $J_n = \frac{1}{1-n} e^0 - \frac{1}{1-n} e^{-\infty} = \frac{1}{1-n}$. Agora, no caso da integral $K_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+n)} dt$, empregando outra substituição $u = -t(1+n) \therefore \frac{du}{1+n} = -dt$. E, desde que, já que e quando.

No que segue, notamos: $K_n = -\int_{-\infty}^0 \frac{e^u}{1+n} du = -\frac{1}{1+n} \int_{-\infty}^0 e^u du = -\frac{1}{1+n} e^u \Big|_{-\infty}^0$, ou ainda $K_n = -\left(\frac{1}{1+n} e^0 - \frac{1}{1+n} e^{-\infty}\right)$ e, por fim, vem que $K_n = -\frac{1}{1+n} - \frac{1}{(1+n)e^{+\infty}} = -\frac{1}{1+n}$.

Para concluir, retomaremos o resultado anterior $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{1+x^2})^n} dx = \frac{1}{2} (J_n + K_n) = \frac{n}{1-n^2}$, com índices inteiros, isto é, $n \in \mathbb{Z}$.

Situação de institucionalização: Dana-Picard (2005, p. 4) acentua o seguinte modelo de recorrência $I_n = f(n) \cdot I_{n-1}$, onde $f(n)$ indica uma homografia, na variável n , com coeficientes inteiros. Dana-Picard (2005b, p. 4-5) adverte que “quando esta situação não ocorre, os cálculos podem ser tornar mais complicados”. Dessa forma, na última etapa, o professor poderá confrontar os resultados e argumentações utilizados nas duas últimas situações e, acentuar o papel fundamental da identificação das homografias, ou ainda conhecidas como transformações de Möebius, grosso modo, se caracteriza por uma função racional não constante, como indicamos há pouco por $I_{p,q} = I(p,q) = -\frac{q}{p+1} \cdot I_{p,q-1}$.

Ora, o conhecimento matemático que o *expert* deverá convencionar ou fixar (ARTIGUE, 1984, p. 8), seguindo os rituais acadêmicos, indicando o estatuto cognitivo de um novo saber, rico em relações conceituais e, como apontamos, inclusive com relações com a Análise Complexa, tendo em vista que, a classe de funções meromorfas (ou homografias) são estudadas no interior da Teoria das funções na variável complexa.

Neste momento, de modo mais visível, o professor deve assumir o papel proeminente na fase atual (ALMOULOUD, 2007, p. 42), uma vez que, a determinação da forma e do conteúdo do saber para o qual ele tenciona aderir um determinado estatuto oficial, caracterizado ainda como a produção local e consequência das interações envolvendo a tríade estudantes - professo - conhecimento matemático.

Para finalizar a segunda situação didática, recordamos as recomendações de Artigue (1984, p. 6), quando observa que:

Para o didata, determinar como as variáveis de comando da situação pode provocar na classe, as mudanças de estratégia, como podemos controlá-las ao longo do processo. Pela manipulação de seus elementos e gênese escolar dos conceitos, aparece como mais importância em se pesquisar nos mínimos pormenores, os detalhes da etapa psico-cognitiva.

Evidentemente, o contexto do excerto anterior é distinto do nosso, tendo em vista que, temos situado um interesse de discussão no âmbito da academia. Dessa forma, assinalando os elementos indicados por Robert (1986, p. 28), constatamos que as exigências progressivas de habilidades envolvendo ação de formalização dos argumentos, assim como uma manipulação e o emprego preciso de um sistema de representação simbólica particular (ALVES, 2011, p. 132) se mostram recorrentes e podem atuar com entraves aos estudantes, tanto no caso das IDP's, como em outras situações. Neste caso, a exploração de instrumentos tecnológicos (DANA-PICARD & KIDRON, 2006) poderá indicar abordagens alternativas e diferenciadas para sua transmissão didática em sala de aula.

Desse modo, encerramos a seção atual a partir da discussão de determinados aspectos e perspectivas de abordagem do conteúdo de IDP's passíveis de replicação/reprodução em sala de aula, desde que levemos em consideração as adaptações e modificações particulares, tendo como alvo um público específico. E, diante dos dados teóricos discutidos nas seções anteriores, conseguiremos produzir um cenário de aprendizagem que não desconsidera vários elementos apontados por Dana-Picard, que possuem lugar numa vizinhança cognitiva, fato que responde ao questionamento de investigação, proposto na terceira seção do artigo atual.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Discutimos no presente escrito a proposição das etapas preliminares de uma ED (análises preliminares e análise *a priori*), com o tema envolvendo a noção de Integrais Dependentes de Parâmetros - IDP's, com recurso na tecnologia, buscando a exploração de elementos relacionados com a noção de uma "vizinhança cognitiva" (DANA-PICARD, 2004a; 2004b). De modo específico, apresentamos e indicamos possibilidades de uso do *software GeoGebra*, tendo em vista a promoção de um processo investigativo, por parte dos estudantes, que não prescinde da visualização como elemento impulsor de um entendimento tácito e preliminar (ALVES, 2012; ALVES & LOPES, 2013), subjacente ao processo matemático de integração segundo Riemann.

Conforme a figura 1, exibida na seção introdutória, lidamos com uma classe mais geral de funções, não necessariamente contínuas. Ademais, ao longo do processo de integração, situações de convergência e divergência de algumas integrais podem ser preditas, como evidenciamos nas duas situações-didáticas abordadas na seção anterior, tendo como pressupostos de pesquisa, alguns elementos de uma ED e, como pressupostos de ensino, uma teoria de base metodológica (BROUSSEAU, 1986b).

Recordando o pensamento de Brousseau (1986b, p. 297), quando observa que "a concepção moderna de ensino vai demandar do professor a provocação nos estudantes de adaptações desejáveis". Em nosso caso, ao longo da discussão das duas situações-problema, as adaptações que buscamos promover se relacionam com a possibilidade de relacionar e perceber, por intermédio da visualização, o comportamento de convergência e divergência das IDP's discutidas (a partir de uma inspeção das duas janelas do *software*).

Entretanto, seguindo a tipologia descrita por Brousseau, ao final do debate científico, ocorre a culminância do estabelecimento de um modelo formal, que garante a consistência de todas as ilações produzidas e se inserem numa vizinhança cognitiva para o ensino de IDP's. Tal constatação detém o potencial de proporcionar a produção de conhecimentos acerca do ensino desses objetos na academia.

Para concluir, depreendemos que, a ação dos estudantes desconsiderando a tecnologia atual não permite a exploração de um espectro de possibilidades sugeridas, por exemplo, pelo *software GeoGebra*, empregado nos últimos exemplos. No que concerne ao papel do professor e do papel do estudante, não exigimos grande domínio de uma sintaxe programacional sofisticada, posto que, o *software* possui cultura acadêmica razoavelmente conhecida pela sua simplicidade e exploração dinâmica dos conceitos científicos matemáticos (ALVES, 2012; 2014e).

Além disso, assumimos o pressuposto de que "a pesquisa em didática possui como objetivo descrever, classificar, compreender, explicar, conceber, melhorar, prever e permitir a reprodução de tais processos" (BROUSSEAU, 1986, p. 369). Em nosso caso, com origem em uma mediação didática modificada pelo uso do *software Geogebra* e assumindo os momentos dialéticos (situação de ação, formulação, validação e institucionalização) de Brousseau (1988), vislumbramos a possibilidade da mobilização/modificação de vários saberes e concepções, constituintes de um vizinhança cognitiva (*cognitive neighborhood*). Com efeito, decididamente, podemos proporcionar aos estudantes momentos de um entendimento não estático à respeito do processo de integração segundo Riemann (STAHL, 1999).

Finalmente, reconhecemos ao longo do presente texto, um emprego e aplicação/descrição de um *design* de investigação em Didática da Matemática, o que exige do leitor maior proximidade e familiaridade com o *corpus* teórico aqui discutido. Por outro lado, tendo em vista uma vasta literatura (ALVES, 2014c; ALVES & BORGES NETO, 2012; ALMOULOU & COUTINHO, 2008; LABORDE, 1997) nos informando sobre a essência e as características de um dispositivo teórico a ser concebido para uma intervenção ou realização didática específica, não nos detivemos a um expediente que busca explicar o sentido/significado, de modo pormenorizado, das etapas de análises preliminares e a análise *a priori* mas, apenas, sua descrição e aplicação para o caso das IDP's.

REFERÊNCIAS

ALVES, Francisco. R. V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. **Vydia Educação**, v. 35, nº 1, 133 - 146, 2015.

ALVES, Francisco. R. V. Visual criterion for understanding the notion of convergence of integrals in one parameter. **Acta Didactica Naposcencia**. v. 7, nº 1, 19 - 30, 2014a.

ALVES, Francisco. R. V. Técnica Computacional para o Ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics - CT^2M . **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 5, n. 2, p. 1-9, 2014b.

ALVES, Francisco. R. V. Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análise preliminares e a priori. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 7, nº 3, 148 - 168, 2014c.

ALVES, Francisco. R. V. Transição Interna do Cálculo: o caso das integrais impróprias em um parâmetro. **Revista SINERGIA**, v. 15, nº 2, 138 - 148, 2014d.

ALVES, Francisco. R. V. Construção de curvas parametrizadas: uma discussão sobre o uso dos softwares Geogebra e CAS Maple. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 3, nº 1, 5 - 21, 2014e.

ALVES, Francisco. R. V. Visualização no ensino de Integrais com o uso do GeoGebra: o caso das coordenadas polares. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 3, nº 1, 53 - 67, 2013a.

ALVES, Francisco. R. V. A noção de integral generalizada: sua exploração apoiada na tecnologia e no contexto histórico. **Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática**, São Carlos, 1 - 15, 2013b.

ALVES, Francisco. R. V. Reconhecimento de padrões gráficos com o apoio do software Geogebra: o caso da convergência pontual e uniforme. **TEAR: revista de educação, ciência e tecnologia**, v. 2, nº 2, 1 - 20, 2013c.

ALVES, Francisco. R. V. Insight: descrição e possibilidades no ensino do Cálculo. **Vydia Educação**, v. 32, n. 2, p. 149-146, 2012.

ALVES, Francisco. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis** (tese de doutorado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará - UFC, 2011, 339f.

ALVES, Francisco. R. V. & BORGES NETO, Hermínio. Engenharia Didática para a exploração didática da tecnologia no ensino no caso da Regra de L`Hospital. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 14, n. 2, p. 337-367, 2012.

ALVES, Francisco. R. V. & LOPES, Marcos, A. Métodos de integração: uma discussão do seu ensino com o apoio do software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 2, n. 1, p. 5-21, 2013.

ALMOULOUD, Saddo Ad. & COUTINHO, Cileda de Q. e S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.

ALMOULOUD, Ag Saddo. **Fundamentos da Didática da Matemática**. São Paulo: Editora UFPR. 2007.

ARTIGUE, Michelle. Modélisation et reproductibilité en Didactiques des Mathématiques. **Les Cahier Rouge des Didactiques des Mathématiques**. v. 8, 1 - 38, 1984.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactiques. Brun, J. (org.). **Didactiques de Mathématiques**, 243 - 264. LAGRANGE J.B. & al. (eds). Jun 2003, Reims, France. 1996.

ARTIGUE, Michelle. L´éducation mathématique comme champ de recherche et champ de pratique: resultats et défis. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 3, n. 3, p. 1-18, 2012.

ARTIGUE, Michelle. L´impact curriculaire des Technologies sur l´éducation mathématiques. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 4, n. 1, p. 1-15, 2013.

BOLON, J. **Comment les enseignants tirent-ils parti de recherche faites en Didactiques des mathématiques? Le cas de l´enseignement des décimaux a la charnière école-collegue** (thèse de doctorat). Paris: Université Paris VII, 1996, 319f.

BOURBAKI, N. **Éléments de Mathématiques: integration**. Paris: Editeurs Diffusion, 1969.

BROUSSEAU, G. Fondements et methodes de la Didactiques des Mathématiques. In: **Recherche en Didactiques des Mathématiques**. v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986a.

BROUSSEAU, Guy. **Théorisation des phénomènes d´enseignement des mathématiques** (thèse de doctorat). Bourdeaux: Université Bordeaux I, 1986b, 905f.

BROUSSEAU, Guy. Le contrat didactique: le milieu. **Recherche en Didactiques des Mathématiques**, v. 9, n. 2, p. 309-336, 1988.

DANA-PICARD, Thierry. & STEINER, Joseph. Enhancing conceptual insight using CAS. **Proceedings of Computer Algebra in Mathematics Education**. June, Reims, França, p. 1-8, 2003.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. G. Brousseau, (org.) (1998). **Théorie des situations didactiques**. Grenoble La Pensée Sauvage, p. 115-160, 1998.

DANA-PICARD, Thierry. Explicit closed forms for parametric integrals. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, n. 35, p. 456-467, 2004a.

- DANA-PICARD, Thierry. Parametric integrals and Catalan numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, n. 36, p. 410-414, 2004b.
- DANA-PICARD, Thierry. Technology-assisted discovery of conceptual connections within the cognitive neighborhood of a mathematical topic. **European Research of Mathematics Education - CERME 4**, p. 1-9, 2005a.
- DANA-PICARD, Thierry. Sequences of Definite Integrals, Factorials and Double Factorials. **Journal of Integer Sequences**. v. 8, p. 1-10, 2005b.
- DANA-PICARD, Thierry. Motivating constraints of a Pedagogy-embedded Computer Algebra System, **International Journal of Science and Mathematics Education**, n. 5, p. 217-235, 2006.
- DANA-PICARD, Thierry. Integral presentations of Catalan Numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. v. 41, n. 1, January, p. 63-138, 2010.
- DANA-PICARD, Thierry; ZEITOUN, David. G. Parametric improper integrals, Wallis formula and Catalan numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. v. 45, n. 4, June, p. 515-520, 2012a.
- DANA-PICARD, Thierry; ZEITOUN, David. G. Sequences of definite integrals, infinite series and Stirling numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. v. 43, n. 2, February, p. 219-230, 2012b.
- DANA-PICARD, Thierry. & KIDRON, I. A pedagogy-embedded Computer Algebra System as an instigator to learn more Mathematics. CELIA. H.; LAGRANGE, J. B.; SON, L. H. & SINCLAIR, N. (eds.) **Proceedings of the seventeenth study Conference of the Comissiono on Mathematics Instruction**, p. 128-135, 2006.
- DOUADY, Régine. **De la Didactiques des Mathematiques à l'heure actuelle**. Les Cahiers Blancs, n. 6, Paris: Presse Universitaire, 1984.
- DOUADY, Régine. L'ingénierie didactiques. **Les Cahier Rouge des Didactiques des Mathematiques**. v. 19, n. 1, p. 1-52, 1993.
- GONZALEZ-MARTÍN, Alexandro. S. **La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje** (tesis doctorales). Laguna: Universidad La Laguna. 2005, 498f.
- GRENIER, D. & LEGRAND, M. Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année. **Les Cahier Rouge des Didactiques des Mathematiques**. v. 22, n. 1, p. 1-85, 1986.
- HAIRER, E. & WANNER, G. **Analysis by its History**. New York: Springer, 2008.
- HUNTLEY, H. E. **The divine proportion: a study in mathematical beauty**. New York: Dover Publications Inc, 1970.
- KOSHY, Thomas. **Catalan Numbers and Applications**. Oxford: Oxford University Press, 2009.
- KOSHY, Thomas. **Fibonacci and Lucas Numbers and Applications**. New York: John Willey and Sons, 2011.

LABORDE, Colette. Affronter la complexité des situations d'apprentissage des mathématiques en classe. Défis et tentatives. **DIDASKALIA**, n. 10, p. 97-112, 1997.

MARGOLINAS, C. D'évolution et institutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôle du maître. **Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants**, Paris: Maison Édition, p. 342-347, 1995.

MARGOLINAS, C. **Points de vues de l'élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques** (Habilitation de recherche). Provence: Université de Provence. 160f. 2004.

MEDVEDEV, F. **Scenes from the History of Real Functions**. Boston: Birkäuser-Verlag, 1991.

ORTON, A. Student's understanding of integration. **Educational Studies in Mathematics**, p. 1-18, 1983.

ROBERT, Aline. **Ingénierie didactique sur les suites numériques après le Baccalauréat**. Les Cahiers Blancs, n. 4, Paris: Presse Universitaire, 1983.

ROBERT, Aline. Didactique dans l'enseignement supérieur: Une démarche. **Les Cahiers Blancs**, n. 28, 1986.

STAHL, Saul. **Real Analysis: a historical approach**. New York: John-Wiley and Sons, 1999.

TALL, David. **Understanding the Calculus**. Mathematics Teaching, n. 110, p. 49-53, 1985.

TALL, David. From school to university: the effects of learning styles in the transition from elementary to advanced mathematical thinking. THOMAS, M. J. (eds.). **Proceeding of the Seventh Annual Australian Bridging Network Mathematics Conference**, Aucland: Aucland University, p. 9-26, 1997.

TROUCHE, L. Environnements informatisés: quels usages pour quels apprentissages? **Educational Studies in Mathematics**, n. 55, p. 181-197, 2004.

RECEBIDO EM: 19 set. 2015

CONCLUÍDO EM: 21 fev. 2016

