VIDYA, v. 35, n. 2, p. 113-127, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015. **ISSN** 2176-4603

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO E AS CONTRIBUIÇÕES DOS RECURSOS DIDÁTICOS NO ESTUDO DOS QUADRILÁTEROS

THE DEVELOPMENT OF GEOMETRIC THOUGHT AND THE CONTRIBUTIONS OF LEARNING MATERIALS TO THE STUDY OF QUADRILATERALS

ROSELENE ALVES AMÂNCIO*
ELIANE SCHEID GAZIRE**

RESUMO

A pesquisa aqui apresentada foi realizada com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de Belo Horizonte. O trabalho foi embasado nas teorias propostas por Pais (1996, 2000) e Fischbein (1993) para compreender o desenvolvimento do pensamento geométrico; e também nos trabalhos de Fiorentini e Miorim (1990) e Lorenzato (2006) para identificar como os recursos didáticos podem contribuir para aprendizagem da geometria. Neste artigo, focalizamos a análise de duas atividades que utilizaram recursos distintos: a dobradura e o geoplano de madeira. As atividades foram propicias para que os alunos construíssem os conceitos abordados e também para que fossem refinadas e aprofundadas algumas propriedades dos quadriláteros estudadas anteriormente. A pesquisa mostra que a utilização dos recursos didáticos aliados a uma reflexão intelectual sobre a experiência realizada é fundamental para o aprendizado da Geometria.

Palavras-chave: Pensamento geométrico. Ensino de Geometria. Quadriláteros.

ABSTRACT

The research presented here was conducted with students from the 8th grade of Elementary School to a private school of Belo Horizonte. The research was based on the theories proposed by Pais (1996, 2000) and Fischbein (1993) to understand the development of geometric thought; and also inside work of Fiorentini and Miorim (1990) and Lorenzato's research (2006) to identify how learning materials can contribute to geometry learning. At this paper, we focus on the analysis of two activities that used different learning materials: folding and wooden board with pins. The activities have contributed to improvement of students' thinking of previous worked concepts and also to be refined and deepened some properties of quadrilaterals studied previously for them. Research shows that the use of teaching resources coupled with an intellectual reflection on the experiment carried out is critical for learning geometry.

Keywords: *Geometric thought. Learning materials. Quadrilaterals.*

* Mestre em Ensino de Matemática. Professora de Matemática do Centro Pedagógico da UFMG. E-mail: roseleneamancio@yahoo.com.br
** Doutora em Educação. Professora do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática Pontifícia Universidade Católica (PUC), Minas Gerais. E-mail: egazire@terra.com.br.

INTRODUÇÃO

O recorte de pesquisa aqui apresentado é parte de uma dissertação de mestrado[1]. Nesse trabalho, buscamos compreender como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico e como os recursos didáticos podem contribuir para a aprendizagem da geometria.

Elaboramos um produto para a pesquisa proposta no mestrado profissional: um caderno composto de quinze atividades utilizando diversos recursos, com o objetivo de possibilitar a construção ou ressignificação dos conceitos de polígonos e, especialmente, dos quadriláteros. Os recursos didáticos foram utilizados com vistas a possibilitar uma manipulação de materiais, associados a uma atividade intelectual que favorecesse a construção dos conceitos geométricos.

No presente trabalho, descrevemos e analisamos a aplicação de duas atividades referentes ao estudo dos quadriláteros: eixos de simetria e propriedades das diagonais.

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola da rede particular de Belo Horizonte, numa turma de 8º ano composta por 16 alunos. A primeora autora atuava nessa instituição de ensino como professora de Matemática do 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Os dados foram obtidos dos registros dos alunos, das gravações em áudio e dos protocolos de observação realizados a cada aula.

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Pais (1996) destaca três questões fundamentais do conhecimento geométrico: o intuitivo, o experimental e o teórico. Consoante esse autor, o aluno precisa recorrer às bases intuitivas e às atividades experimentais para chegar ao conhecimento téorico, devendo o professor considerar esses aspectos.

Segundo o autor, há quatro elementos fundamentais que influenciam no processo ensino e aprendizagem da Geometria: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental.

O termo objeto refere-se a modelos ou materiais didáticos que representam algum conceito geométrico, é uma forma primária de representação do conceito. Pais (2000), salienta que é importante que os alunos tenham oportunidade de manipular objetos para construir os conceitos geométricos, no entanto, a manipulação não deve limitar-se ao nível sensitivo. O material didático deve ser usado como um instrumento para a aquisição de conhecimentos geométricos e não com um fim em si mesmo. Assim, a manipulação deve estar associada a uma atividade intelectual, para que o aluno possa estabelecer relação entre a prática e a teoria.

A segunda forma de representação é o desenho. A ilustração dos conceitos por meio de um desenho é um dos recursos mais utilizados nas aulas de Geometria. Pais (1996), considera que os desenhos também possuem natureza particular e concreta. Na Geometria plana, os desenhos tendem a ser confundidos com os próprios conceitos. Porém, os conceitos possuem natureza abstrata.

Um conceito geométrico pode ser representado por uma infinidade de desenhos, mas, na prática, há uma predominância de algumas figuras particulares, encontradas com frequência em livros, cadernos, ou desenhadas na lousa pelo professor. Segundo Pais (2000), há uma especie de tradição de desenhos dessas formas particulares de representação.

A terceira forma de representação dos conceitos geométricos são as imagens mentais. Pais (1996) relata que não é fácil definir imagem mental, mas considera que “uma pessoa tem uma dessas

[1] AMÂNCIO, Roselene Alves. **O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico:** trabalhando polígonos, especialmente quadriláteros. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática. PUC MINAS. 2013.

imagens quando ela é capaz de enunciar de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos.” (PAIS, 1996, p. 70).

As imagens mentais possuem natureza abstrata e subjetiva. Por serem abstratas, podem ser relacionadas aos conceitos, mas devido ao seu aspecto subjetivo e particular, se afastam dos conceitos matemáticos.

Para o autor, a formação das imagens mentais é consequência da experiência com objetos e com desenhos. Cada pessoa possui uma série de imagens mentais associadas a um determinado conceito. É importante que ao longo da escolaridade, o conjunto das imagens mentais seja enriquecido no aspecto quantitativo e qualitativo.

Ainda, em consônancia com o autor, a construção da objetividade passa necessariamente pelo estágio subjetivo da concepção individual do aluno. Sendo que esse processo é influenciado pelas experiências que cada aluno tem com as diferentes formas de representação do conceito geométrico: os objetos, os desenhos e as imagens mentais.

> É evidente que, do ponto de vista científico, o conceito não pode ser algo susceptível a modificações subjetivas que permitam diferentes significados. Mas, enquanto conhecimento que é construido pelo homem, existe um série de particularidades que acabam determinando níveis de conceitualização diferentes. (PAIS, 1996. p. 71)

A pouca experiência com manipulação de objetos e os desenhos esteriotipados, contribuem para que os alunos tenham imagens mentais reduzidas dos entes geométricos. Em geral, os losangos aparecem desenhados com as diagonais paralelas às bordas das páginas ou da lousa; já os retângulos são desenhados com seus lados paralelos às bordas e o lado maior na horizontal, enquanto que os quadrados são frequentemente desenhados com os lados paralelos às bordas.

Pais (1996), ressalta que a generalidade e a abstração dos conceitos geométricos são construídos lentamente, num processo dialético entre o mundo físico e uma reflexão intelecutal sobre esse mundo. Ele ainda coloca que no início da aprendizagem ocorre uma identificação, por parte do aluno, do ente geométrico com sua representação. Somente quando se alcança um nível de formalização, é que o objeto, o desenho, as imagens mentais são compreendidos como representações de um conceito.

Na teoria proposta por Fischbein (1993), os entes geométricos possuem dupla natureza, pois possuem duas componentes: uma conceitual e outra figural. A conceitual está associada ao fato de que no raciocínio matemático não nos referimos a objetos materiais, mas sim, às construções mentais. O que caracteriza um conceito é o fato de que ele expressa uma ideia, uma representação ideal de uma classe de objetos, baseada em suas caracterísitcas comuns. Os objetos materiais – sólidos ou desenhos – são apenas representações de um conceito, pois somente os conceitos possuem perfeição absoluta.

Um ente geométrico pode ser descrito por suas propriedades conceituais, mas não são somente conceitos, também são imagens. Quando raciocinamos em termos de compor, decompor e mover, nos referimos a imagens, e não somente conceitos. Os entes geométricos como pontos, lados, vértices, polígonos, e as operações com eles, são de uma natureza conceitual, entretanto possuem uma natureza figural intrínseca.

De acordo com Fischbein (1993), os objetos de investigação e manipulação da Geometria são entidades mentais chamadas de *conceitos figurais*, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, tamanho), e ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais (idealidade, abstração, generalidade, perfeição).

A componente conceitual, através da linguagem escrita ou falada, expressa propriedades de uma certa classe de objetos. Já a componente figural, corresponde à imagem mental que associamos ao conceito, uma vez que a harmonia entre esses dois componentes é que determina a noção correta sobre o ente geométrico.

O conceito figural é uma construção conduzida por um raciocínio matemático. Por exemplo, o círculo, em Geometria, não pode ser reduzido a um conceito. Ele é uma imagem controlada por uma definição.

Muitas vezes, as restrições da figura, gráfica ou objeto, pode escapar ao controle conceitual e impor interpretações que são figurativamente consistentes, porém não estão sujeitos mais às restrições do conceito. Por exemplo, embora o aluno conheça a definição de paralelogramo, pode ser difícil para ele visualizar várias formas correspondentes a essa definição, pois a imagem mental que uma pessoa tem de um objeto pode enfraquecer o aspecto conceitual.

O mesmo autor enfatiza que a integração das componentes conceituais e figurais em uma estrutura mental unitária, com predominância do aspecto conceitual, não é um processo natural, sendo assim, deve constituir uma preocupação contínua do professor. Portanto, devem ser criadas situações didáticas nas quais sistematicamente solicita-se a cooperação entre esses dois aspectos, até atingir a fusão em um objeto mental.

OS RECURSOS DIDÁTICOS

Fiorentini e Miorim (1990) fazem uma reflexão sobre o uso dos recursos didáticos no ensino de Matemática. Eles lembram que diante das dificuldades dos alunos em aprender Matemática, os professores buscam recursos nos materiais didáticos como se esses fossem a solução para os problemas que enfrentam na sala de aula.

Segundo os mesmo autores, o professor nem sempre tem clareza sobre o motivo pelo qual os materiais didáticos são importantes e o momento em que devem ser usados. Muitas vezes, justificam sua utilização pelo seu caráter motivador. No entanto, a utilização do material didático deve ser justificada pela possibilidade de proporcionar experiências em que o aluno "participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente, produzindo e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade." (FIORENTINI E MIORIM, 1990, p. 6).

Lorenzato (2006), afirma que é quase impossível um ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. Para as pessoas que já caracterizaram esses objetos, quando ouvem seus nomes, vem em suas mentes a ideia correspondente aos objetos. Assim, a abstração começa com o apoio dos nossos sentidos.

O autor reforça que a ausência de materiais didáticos pode atrasar o desenvolvimento intelectual do aluno. Por isso, é de grande importância que ao planejar uma aula, o professor se questione:

- Será conveniente, ou mesmo necessário, facilitar a aprendizagem usando algum material didático?
- Qual deve ser o material?
- Quando utilizá-lo?
- Como esse material deve ser utilizado?

Lorenzato (2006), ainda observa que quando o material didático for novidade para os alunos, deve ser dado um tempo para que eles possam explorá-lo livremente. Depois da realização da atividade proposta, é necessário que os alunos tenham oportunidade de comunicar suas ideias, raciocínios, ações e conclusões. Após a verbalização, é importante que os alunos registrem os novos aprendizados decorrentes das atividades concretas e abstratas que eles realizam numa aula.

Nessa perspectiva, a eficiência de qualquer material didático depende da forma como o professor conduzirá a sua utilização. Os alunos devem ter oportunidade de explorá-lo, bem como, refletirem sobre a atividade manipulativa realizada. Logo, é importante que o professor formule questões que contribuam para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em relação às atividades utilizando a manipulação, Machado (2012), ressalta que "Num ambiente de manipulação e investigação, o aluno encontra condições para produzir o conceito, produzir conhecimento, experimentar combinações, expressar-se livremente, desenvolver a criatividade, resolver problemas, ampliar sua noção do mundo".

Manipular figuras é muito diferente de vê-las desenhadas. A possibilidade de movimento, aliada ao tato e à visão contribuem para a formação de imagens mentais.

Um dos recursos didáticos que permite um trabalho manipulativo é o geoplano. O aluno pode construir e desfazer, alterar suas construções facilmente, favorecendo a exploração de figuras geométricas. De acordo com Machado (2012), o geoplano oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração.

CONTEXTO DA PESQUISA E METODOLOGIA

A pesquisa descrita foi desenvolvida em uma escola da rede particular de Belo Horizonte. A instituição é pequena e possui uma classe de cada ano escolar, na Educação Infantil e no Ensino Fundamental I e II. Suas turmas contêm em torno de vinte alunos, cada uma.

Os alunos, em geral, são de classe média, a maioria reside no próprio bairro onde está situada a escola, e são bastante heterogêneos em relação ao nível de aprendizagem.

A pesquisa foi realizada no 8º ano do Ensino Fundamental. Essa turma se compunha de 16 alunos, com idade entre 12 e 14 anos. A aplicação das atividades se deu no horário das aulas de Matemática, com todos os alunos que faziam parte da turma. A primeira autora era, também, professora da classe. A propósito, escolhemos a turma do 8º ano para realizar esta pesquisa devido ao programa da escola que prevê o estudo de polígonos e quadriláteros nesta série.

Nesse trabalho, os alunos foram identificados por suas iniciais. Nos casos em que havia mais de um aluno com a mesma inicial, foram usados um algarismo seguido da primeira letra do nome.

Esta pesquisa foi desenvolvida como estudo de caso de cunho qualitativo. Os dados foram obtidos dos registros das atividades dos alunos, das gravações em áudio realizadas nas aulas ministradas presentes neste trabalho, e nos protocolos de observações que foram feitos a cada aula.

APLICAÇÃO DA ATIVIDADE EIXOS DE SIMETRIA DOS QUADRILÁTEROS

Quadro 1 - Descrição da atividade Eixos de Simetria

Objetivo: identificar eixos de simetrias nos quadriláteros notáveis. **Material utilizado**: figuras que representam quadriláteros impressos em papel A4. **Organização da turma:** duplas. **Duração:** 100 minutos (duas aulas geminadas).

Fonte: elaborado pelo autor.

Os alunos já haviam estudado simetria axial no ano anterior, quando cursavam o 7º ano. Eles já haviam obtido eixos de simetria por meio de dobraduras em diversas figuras, e também, haviam desenhado figuras simétricas em papel quadriculado.

Antes de iniciar a atividade, a professora enfatizou que os ângulos congruentes devem ser destacados nos desenhos com marquinhas iguais, e os ângulos com medidas diferentes, devem ser desenhados com marquinhas diferentes. Pois tinha a intenção de retomar as propriedades dos quadriláteros referentes a ângulos e lados estudadas anteriormente.

Diante disso, a professora deu tempo para que os alunos recortassem os quadriláteros. Então, iniciou a atividade com a seguinte pergunta:

Professora: *O que é um eixo de simetria?*

Aluno M: *O eixo de simetria divide a figura em duas partes iguais.*

Professora: *Está correto, mas falta um detalhe muito importante. Alguém se lembra?*

Nenhum aluno responde.

Professora: *O eixo de simetria é como um espelho que reflete exatamente a figura* do outro *lado. Se pudéssemos dobrar a figura sobre o eixo de simetria, ela ficaria sobreposta.*

Aluno H: *Um lado tem que ficar em cima do outro.*

Em meio às respostas dos alunos, a professora solicitou que os alunos pegassem o quadrado que haviam recortado e fizessem dobraduras marcando os eixos de simetria. Facilmente, os alunos perceberam que o quadrado tem quatro eixos de simetria. Assim, destacaram com caneta ou lápis de cor, e também, desenharam os ângulos retos da figura. Depois, fizeram o mesmo com o retângulo. Com o envolvimento na atividade, compreenderam que o retângulo tem apenas dois eixos de simetria. Com uma pergunta, a professora iniciou as reflexões:

Professora: *E as diagonais do retângulo são eixos de simetr*ia?

Vários alunos: *Não*.

Aluno G1: *Eu pensei que era, porque quando eu dobrei apareceram dois triângulos iguaizinhos, mas depois o aluno C (*outro aluno da dupla*) me mostrou que um triângulo não ficava em cima do outro, então vi que não era.*

Aluno J: *Os triângulos não coincidem quando a gente d*obra.

Prosseguindo, a próxima figura explorada foi o losango. Os alunos logo disseram que essa figura tinha dois eixos de simetria, e outros disseram que o losango parece com o paralelogramo, como é mostrado nos próximos diálogos.

Aluno P: *O losango e o paralelogramo são muito parecidos.*

Aluno U: *Para saber que é losango, é preciso medir os lados para ver se tem o mesmo tamanho.*

Aluno L: *O paralelogramo só tem os lados opostos iguais.*

Aluno J: *Eu estou colocando marquinhas iguais nos ângulos opostos do losango, porque eles têm a mesma medida.*

Nesse contexto, a professora desenhou um losango no quadro e indicou um ângulo interno como 30˚. Depois, perguntou: *Se um ângulo do losango mede 30 graus, tem como eu descobrir os outros ângulos?*

Vários alunos: *Sim. O oposto também mede 30 graus, e os outros dois, 150 graus.*

Partindo das intervenções da professora, os alunos verificaram que o paralelogramo não tinha eixo de simetria, e marcaram os ângulos opostos na figura.

Professora: *Porque o paralelogramo não tem eixo de simetria?*

Aluno C: *A gente dobra e não dá certo, porque o tamanho dos lados é diferente. Não tem jeito de coincidir.*

Logo que a professora pediu para os alunos marcarem os eixos de simetria do trapézio, o aluno M falou: *Professora, não precisa nem tentar que eu já sei que o trapézio não vai ter eixo de simetria, porque ele é todo irregular.*

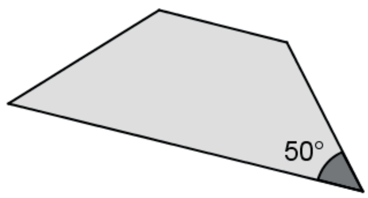
Os alunos fizeram marquinhas diferentes nos ângulos do trapézio. Então, a professora coloca a questão: *Se eu disser que um trapézio tem um ângulo de 50 graus, tem como descobrir o valor dos outros ângulos?*

Alguns alunos disseram sim, e outros não.

Aluno J: *Desenha no quadro que fica mais fácil da gente pensar.*

Assim, a professora faz um desenho semelhante à figura 1, no quadro.

Figura 1 - Desenho de um trapézio feito pela professora na lousa



Fonte: construção do autor.

Aluno D: *O ângulo de cima vai medir 130 graus.*

Professora: *E os outros ângulos internos?*

Aluno Y: Não tem como saber, porque o trapézio tem ângulos diferentes.

Aluno P: *Se a soma dos ângulos vai dar 360 graus, então nós podemos descobrir o valor dos outros.*

Professora: *Qual o valor dos ângulos?*

Aluno J: *Um pode ser 120, e outro 60.*

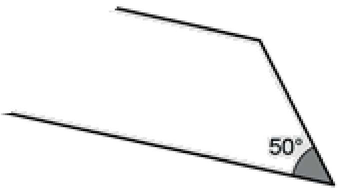
Professora: *Mas você tem certeza que os ângulos medirão 60 e 120?*

Aluno J: É um exemplo, pode também ser 100 e 80, qualquer valor que dê 180 graus.

Aluno P: *Eu não concordo, se já descobrimos dois, porque não podemos descobrir os outros?*

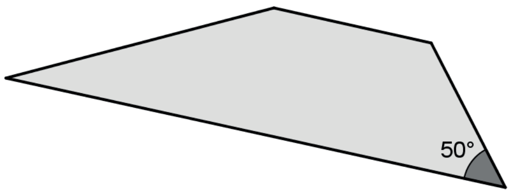
Com as intervenções dos alunos, a professora apaga o lado não paralelo do trapézio cujos ângulos não têm medidas conhecidas (figura 2), em seguida desenha outro lado com ângulo agudo bem menor (figura 3), e pergunta:

Figura 2 - Professora desmancha um lado do trapézio



Fonte: construção do autor.

Figura 3 - Trapézio com novo lado desenhado



Fonte: construção do autor.

Professora: *Eu mudei os ângulos de 50 e 130 graus?*

Alunos: *Não.*

Professora: *Existe alguma relação entre os ângulos de um lado do trapézio e do outro?*

Aluno Y: *Você mudou os ângulos de um lado e os outros continuaram iguais, nós vimos que os ângulos do trapézio são diferentes, então não tem como nós descobrirmos.*

Aluno S: *Nós sabemos que os ângulos de um lado somam 180°, se soubermos um ângulo de cada lado, então podemos calcular os outros dois.*

Diante das reflexões, os alunos passaram a verificar os eixos de simetria no trapézio isósceles.

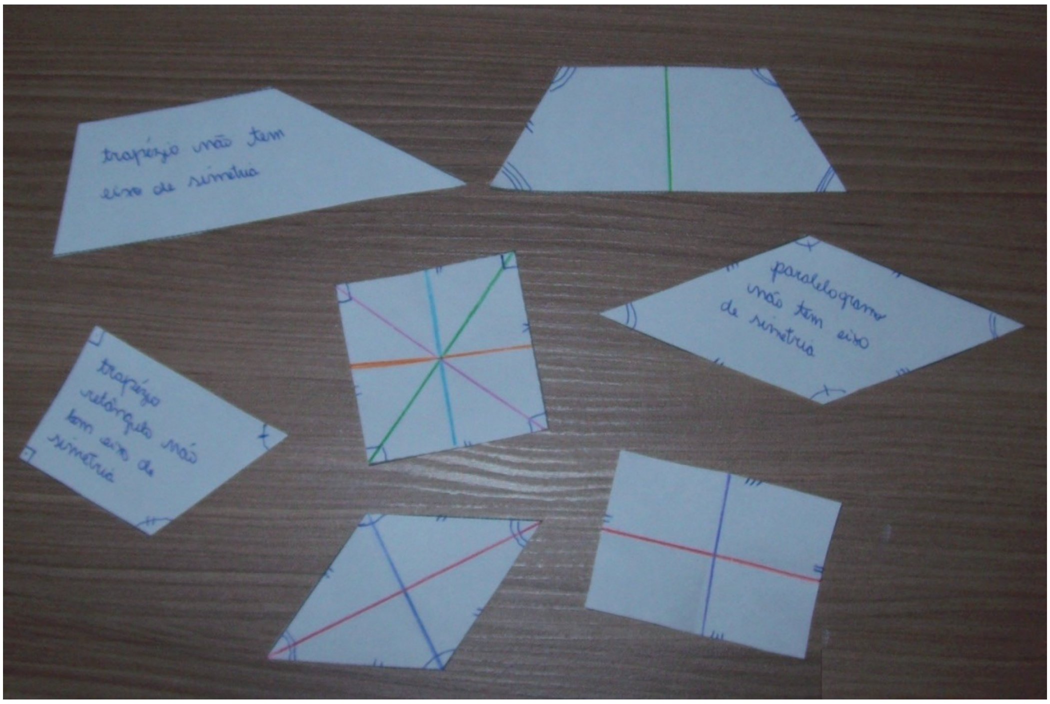
Aluno Y: *Professora, esse trapézio isósceles tem dois ângulos agudos congruentes e dois ângulos obtusos congruentes, isso vai acontecer em todo trapézio isósceles, ou aconteceu apenas nesse?*

Aluno M: *Vai acontecer em todos, se os ângulos fossem diferentes, como é que o trapézio iria ter dois lados iguais.*

Aluno Y: É *mesmo.*

Os alunos verificaram facilmente que o trapézio retângulo não possui eixo de simetria, desenharam os dois ângulos retos na figura e fizeram marquinhas diferentes no ângulo agudo e obtuso. Dessa forma, a professora orientou os alunos para que colassem as figuras no caderno, escrevendo o nome de cada quadrilátero.

Figura 4 - Eixos de simetria dos quadriláteros notáveis



Fonte: foto do autor.

Na sequência do trabalho, a professora desenhou na lousa um quadro como o mostrado a seguir (quadro 2) que foi preenchido com a participação dos alunos. Depois, os alunos fizeram o quadro no caderno.

Quadro 2 - Número de eixos de simetria de cada quadrilátero

Quadrilátero	Número de eixos de simetria
Quadrado	4
Losango	2
Paralelogramo	0
Retângulo	2
Trapézio	0
Trapézio isósceles	1
Trapézio retângulo	0

Fonte: construção do autor.

Para concluir a atividade, solicitamos que os alunos terminassem de fazer marquinhas iguais nos ângulos e lados congruentes, desenhassem os ângulos retos e fizessem marquinhas diferentes nos ângulos e lados com medidas diferentes, com o objetivo de retomar algumas propriedades, e também, para que os alunos pudessem relacionar os eixos de simetria às propriedades dos quadriláteros.

ANÁLISE DA ATIVIDADE EIXOS DE SIMETRIA DOS QUADRILÁTEROS

Na nossa experiência docente, constatamos que os alunos geralmente consideram as diagonais dos retângulos eixos de simetria. No entanto, como os alunos fizeram dobraduras, perceberam facilmente que a diagonal desse quadrilátero não é um eixo de simetria, pois verificaram que os triângulos obtidos não coincidem por superposição. A esse respeito, Lorenzato (2006) coloca que a abstração começa com o apoio dos nossos sentidos. No entanto, a atividade não se limitou ao nível sensitivo, pois a atividade experimental realizada esteve aliada a uma reflexão intelectual e então, pode contribuir para que os alunos pudessem construir o conceito de simetria axial, conforme recomenda Pais (1996).

A atividade realizada também foi propícia para que várias propriedades dos quadriláteros pudessem ser novamente discutidas e ressignificadas. As discussões realizadas a respeito dos ângulos dos losangos e dos trapézios tiveram como base os desenhos das figuras e os conceitos que os alunos já haviam desenvolvido sobre as propriedades desses quadriláteros. Assim, as componentes figural e conceitual foram trabalhadas de maneira integrada, conforme coloca Fischbein (1993).

Notamos, também, que alguns alunos começaram a fazer relação entre as propriedades das figuras. Isso se evidenciou no diálogo decorrente.

Aluno Y: *Professora, esse trapézio isósceles tem dois ângulos agudos congruentes e dois ângulos obtusos congruentes. Isso vai acontecer em todo trapézio isósceles, ou aconteceu apenas nesse?*

Aluno M: *Vai acontecer em todos, se os ângulos fossem diferentes, como é que o trapézio iria ter dois lados iguais.*

Em outra situação, o mesmo aluno mostra compreender a relação entre os lados, ângulos e a simetria axial:

Aluno M: *Professora, não precisa nem tentar que eu já sei que o trapézio não vai ter eixo de simetria porque ele é todo irregular.*

A realização da atividade ainda forneceu elementos para que pudéssemos avaliar as atividades aplicadas anteriormente relativas ao estudo das propriedades dos quadriláteros e que utilizam como recurso didático o software *Geogebra*. Pudemos verificar que os alunos realmente aprenderam as propriedades dos ângulos e lados dos diversos quadriláteros notáveis, pois pegavam uma figura e, rapidamente faziam marquinhas iguais nos ângulos e lados congruentes, sem a necessidade de medições. Verificamos também que vários alunos colaram as figuras que representavam os quadriláteros em posição diferente dos desenhos que geralmente encontramos nos livros e cadernos. Evidenciando que as experiências vivenciadas foram importantes para formação de imagens mentais mais ricas, rompendo com a força dos desenhos estereótipos. A esse respeito, Pais (1996), afirma que a formação das imagens mentais é consequência da experiência com objetos e com desenhos. Sendo que cada pessoa possui uma série de imagens mentais associadas a um determinado conceito. Desse modo, torna-se necessário que ao longo da escolaridade, o conjunto das imagens mentais seja enriquecido no aspecto quantitativo e qualitativo.

APLICAÇÃO DA ATIVIDADE DIAGONAIS DOS QUADRILÁTEROS

Quadro 3 - Descrição da atividade Diagonais dos quadriláteros

Objetivo: Identificar as propriedades das diagonais dos quadriláteros notáveis. **Material utilizado**: geoplano de madeira, gominhas e atividade impressa. **Organização da turma:** duplas. **Duração:** 100 minutos (duas aulas em dias diferentes).

Fonte: elaborado pelo autor.

Para iniciar o trabalho, entregamos um geoplano de madeira com 25 pinos e algumas gominhas para cada aluno. Logo que receberam, começaram a brincar com o geoplano e as gominhas coloridas, tentando fazer várias figuras. Nós demos um tempo para que manuseassem o material recebido.

Em meio ao contato com as gominhas, o aluno I perguntou: Essa aula é só para brincar?

Professora: É para brincar e aprender.

Aluno D: *Eu sabia que estava muito bom para ser verdade*.

Então, entregamos a atividade impressa e explicamos que os alunos deveriam usar as gominhas para fazerem as construções solicitadas, sendo que os quatro primeiros itens pediam que os alunos construíssem quadriláteros de acordo com as propriedades das diagonais indicadas.

Quadro 4 - Enunciado dos itens 01 a 04 da atividade Diagonais dos quadriláteros

Utilize o geoplano e as gominhas para fazer as construções indicadas em cada item. 1. As diagonais são congruentes, perpendiculares entre si e se interceptam nos pontos médios. Qual o quadrilátero obtido? ______________________________ 2. As diagonais são congruentes, não são perpendiculares entre si e se interceptam nos pontos médios. Qual o quadrilátero obtido? ______________________________ 3. As diagonais têm medidas diferentes, são perpendiculares entre si e se interceptam nos pontos médios. Qual o quadrilátero obtido? ______________________________ 4. As diagonais têm medidas diferentes, não são perpendiculares entre si e se interceptam nos pontos médios. Qual o quadrilátero obtido? ______________________________

Fonte: elaborado pelo autor.

As duplas começaram a realizar a atividade muito animadas. Alguns alunos tentaram construir o quadrilátero em posição diferente do seu colega de dupla. Então, os alunos facilmente descobriram que o primeiro quadrilátero era o quadrado.

O aluno C estava tentando construir um quadrilátero com diagonais paralelas e solicitou a intervenção da professora.

Aluno C: *Não tem jeito professora.*

Professora: *Por quê*?

Aluno C: *Como vai existir diagonais que não se cruzam? Aqui está escrito que as diagonais não podem ser perpendiculares.*

Professora: *O que são retas perpendiculares?*

Aluno C: *São as retas que se cruzam*.

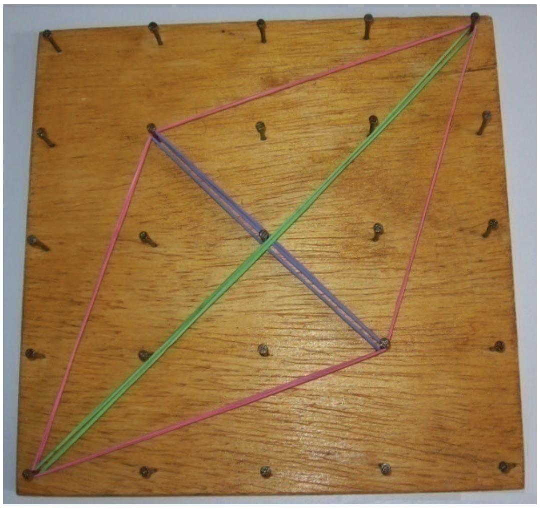
Diante das colocações do aluno C, a professora faz a pergunta para toda a turma: *O que são retas perpendiculares?*

Aluno Y: *São retas que se cruzam formando ângulos retos.*

Aluno C: *Eu tinha esquecido.*

A professora deixou os alunos bem livres para fazerem as construções, alguns deles solicitavam que ela verificasse se tinham construído as diagonais corretamente, mas recebiam como resposta: *Verifiquem com a sua dupla se vocês obtiveram as características das diagonais solicitadas*.

Figura 5 - Losango com suas diagonais, construído no geoplano



Fonte: foto do autor.

O item 02 da atividade foi o que gerou mais dificuldades na construção. Passava-se o tempo e duas duplas não conseguiam construir o quadrilátero. Diante do ocorrido, a professora pediu que uma dupla mostrasse o retângulo alcançado para os colegas.

Quando um dos alunos viu o resultado obtido por outra dupla, disse:

Aluno F: *Era um retângulo! Como eu não pensei!*

Professora: *Faça a construção no geoplano de vocês e verifiquem as propriedades das diagonais.*

Por fim, todos os alunos fizeram as construções solicitadas.

Quadro 5 - Enunciado dos itens 05 e 06 da atividade Diagonais dos quadriláteros

5. Construa um trapézio não isósceles no geoplano. Quais as características de suas diagonais? 6. Construa um trapézio isósceles no geoplano. Quais as características de suas diagonais?

Fonte: elaborado pelo autor.

Após a leitura e a compreensão do enunciado, as duplas tiveram facilidade em construir os trapézios, e também, de verificar as propriedades das diagonais.

Quadro 6 - Enunciado do item 07 da atividade Diagonais dos quadriláteros.

Desenhe os diversos tipos de quadriláteros no quadriculado e verifique as propriedades das diagonais obtidas nos itens anteriores.

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir do comando proposto na atividade, as duplas iniciaram os esboços dos quadriláteros na malha quadriculada com as suas respectivas diagonais. Como o tempo da aula terminou, os alunos ficaram de terminar os desenhos em casa.

No dia seguinte, a professora relembrou o trabalho realizado na aula anterior e perguntou: *Quais as características das diagonais que se pode observar nesta atividade?*

Vários alunos responderam: *Se as diagonais têm a mesma medida, se cruzam nos pontos médios, se são perpendiculares.*

Professora: *Agora, vamos fazer um quadro resumo com as características das diagonais de cada quadrilátero.*

Diante da atividade proposta, a professora fez na lousa um quadro com os nomes dos quadriláteros e as propriedades das diagonais. Depois, foi fazendo perguntas e marcando um *x* nas propriedades verdadeiras.

Professora: *Para começar,* vamos v*erificar as características das diagonais do paralelogramo. Elas são congruentes?*

Alunos: *Não.*

Professora: *Interceptam nos pontos médios?*

Alunos: *Sim.*

Professora: *São perpendiculares?*

Alunos: *Não*

Assim, a professora foi fazendo as mesmas perguntas para os quadriláteros seguintes, e os alunos foram respondendo, até que o quadro ficou preenchido como mostrado adiante.

Quadro 7 - Propriedades das diagonais.

Quadriláteros	Diagonais congruentes	Diagonais se interceptam nos pontos médios	Diagonais são perpendiculares
Paralelogramo		x	
Retângulo	X	x	
Losango		x	x
Quadrado	X	x	x
Trapézio não–isósceles			
Trapézio isósceles	X		

Fonte: elaborado pelo autor.

Durante o preenchimento do quadro, ocorreram alguns diálogos interessantes:

Professora: *As diagonais do retângulo são perpendiculares?*

Vários alunos: *Não.*

Aluno E: *Eu acho que é sim. Deixa eu ver* (verificando a atividade escrita). *Não é não.*

Aluno U: *Foi a diagonal que nós achamos mais difícil para descobrir o quadrilátero.*

Aluno M: *Porque não eram perpendiculares, lembra? Parecia que não dava, mas depois foi legal, porque nós conseguimos.*

Quando estávamos conferindo as propriedades do losango, as falas de alguns alunos evidenciavam a compreensão da inclusão de classes de losangos e quadrados.

Aluno S: *Esse losango não é quadrado, por isso as diagonais não são congruentes.*

Aluno Y: *Losango quadrado, existe isso?*

Aluno S: *Quando o losango tem os ângulos retos, ele é um quadrado e não deixa de ser losango. Se ele for quadrado, as diagonais serão congruentes*.

Aluno H: *Se o losango tiver ângulos retos, a figura fica toda regular.*

Aluno M: *O losango com ângulos retos é um quadrado*.

Aluno L1: *As diagonais do losango têm duas características. Se ele for quadrado, tem todas.*

Aluno M: *As diagonais do quadrado têm as três características, porque o quadrado é todo regular.*

ANÁLISE DA ATIVIDADE DIAGONAIS DOS QUADRILÁTEROS

Com o geoplano, os alunos puderam testar suas ideias, modificando facilmente as construções, até obter o quadrilátero solicitado. Os aspectos figural e conceitual foram explorados em conjunto, colaborando para a construção do conceito figural, de acordo com as ideias de Fischbein (1993).

A propósito, Pais (1996), também diz que a formação das imagens mentais é consequência da experiência com objetos e com desenhos. Dessa forma, após a construção dos quadriláteros e suas diagonais no geoplano, foi solicitado aos alunos que desenhassem um exemplo de cada um dos quadriláteros notáveis na malha quadriculada. Também, deveriam conferir as propriedades observadas anteriormente. E, como estipulado, os alunos procuraram fazer desenhos diferentes de seus pares e conferiram as propriedades.

Percebemos que os alunos recorreram à intuição, associada à manipulação e ao desenho, e tiveram oportunidade de construir o conhecimento teórico das propriedades das diagonais, conforme a colocação de Pais (1996).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do pensamento geométrico é um processo lento e complexo, construído a partir das experiências vivenciadas pelo aluno, sendo que os materiais concretos e os desenhos exercem grande influência no processo de construção conceitual.

Ao analisar a aplicação das atividades verificamos que a obtenção dos eixos de simetria a partir das dobraduras se mostrou positiva. Também pudemos constatar o grande potencial do geoplano para a aprendizagem da Geometria.

A troca de ideias entre os alunos e a escrita tiveram papéis importantes na organização do pensamento e no desenvolvimento da comunicação Matemática. O momento da discussão dos trabalhos foi fundamental para a construção/ressignificação dos conceitos. A partir dos diálogos entre os colegas, com discussões, refutações e complemento de ideias, os alunos se sentiram valorizados e atuantes. Com as intervenções da professora, os conceitos abordados durante a realização das atividades puderam ser retomados e aprofundados.

A partir desta experiência constatamos que é possivel desenvolver na sala de aula um processo de contrução ativa do conhecimento por parte dos alunos, quando estes são estimulados a se envolver em ricos momentos de atividade Matemática. Nessa perspectiva, acreditamos que este trabalho possa inspirar outros colegas a buscarem conhecimentos e vivências a fim de que cada aluno tenha a oportunidade de desenvolver o pensamento geométrico.

REFERÊNCIAS

FISCHBEIN, Efraim. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Vol. 24, No. 2 , p. 139-162. Dordretch: Publishedby: Springer. 1993.

FIORENTINI, Dario. & MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo: SBM/SP, ano 4, n. 7, 1990.

LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Autores Associados, Campinas - SP, 2006. Org. Sergio Lorenzato.

PAIS, Luís Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **In Zetetiké**. v. 4, n. 6, julho/dezembro, p. 65-74, Campinas: CEMPEM /FE/ UNICAMP, 1996.

PAIS, Luís Carlos. **Uma análise do Significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria**. In ANPED, 2000. Disponível em: www.anped.org.br/23/textos/19/1919t.pdf. Acesso em 07 de junho de 2012.

MACHADO, Rosa Maria. **Minicurso - explorando o geoplano**. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2012.

RECEBIDO EM: 10 ago. 2015
CONCLUÍDO EM: 18 out. 2015