

## PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E INVERSÃO: UMA MOTIVAÇÃO PARA UMA GEOMETRIA NÃO-EUCLIDIANA

### STEREOGRAPHIC PROJECTION AND INVERSION: A MOTIVATION FOR A NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS\*  
GONZALO GARCÍA CAMACHO\*\*

#### RESUMO

Neste artigo, abordamos um ensaio teórico no qual consideramos esfera no plano e no espaço, com o objetivo de explorar a imaginação e a visualização para, com o uso de Geometria Dinâmica, utilizar representação conforme na aquisição de conhecimentos necessários para a construção de um modelo de geometria não-euclidiana. Trazemos uma concepção sobre tais habilidades à luz da literatura existente a respeito, a fim de vislumbrar o comportamento de curvas no plano de projeção correspondentes às da esfera. Utilizamos os softwares Cabri 3D, GeoGebra e Maple, para compreender inversão de pontos, de esferas no plano e no espaço, ângulo entre as curvas e ortogonalidade, com vistas à sua aplicação no modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica. Como se trata de um ensaio teórico, não há uma questão de pesquisa e tampouco resultados finais.

**Palavras-chaves:** projeção estereográfica; inversão; geometria dinâmica; Poincaré.

#### ABSTRACT

*In this article we present theoretical essay, where we consider the sphere in the plane and space with the main objective to explore the imagination and the visualization to, using Dynamic Geometry, to use conformal representation in the acquisition of knowledge necessary for building a model of non-Euclidean geometry. We bring about such a conception skills in the light of existing literature regarding to envision the behavior of the curves corresponding to the projection plane of the sphere. We use 3D Cabri, GeoGebra and Maple software, to understand reversal points, spheres in the plane and in space, angle between the curves and orthogonal, with a view to its application in the Poincaré model for hyperbolic geometry. As it is a theoretical essay, there isn't a research question and neither final results.*

**Keywords:** stereographic projection; inversion; dynamic geometry; Poincaré.

---

\* Doutor - Centro Universitário Franciscano. E-mail: leivasjc@yahoo.com.br

\*\* Doutor - Universidad del Valle. E-mail: gonzalo.garcia@correounivalle.edu.co

## INTRODUÇÃO

Os séculos XIX e XX são ricos no que diz respeito ao conhecimento científico adquirido pela humanidade. Particularmente, no final do primeiro e início do segundo, muitas mudanças ocorreram e o paradigma científico se transformou, de maneira bastante rápida, em relação aos séculos anteriores e até milênios e uma nova visão do conhecimento se implantou.

Nas últimas décadas, a aceleração dessa visão tomou rumos bem avançados e, para os professores, a tarefa de realizar um ensino atualizado se tornou muito árdua. Além da excessiva carga horária em sala de aula, particularmente na Escola Básica pública, há uma necessidade constante de atualização e a ação continuada é algo que precisa ser realizada, a fim de acompanhar mudanças e sugerir novas abordagens.

A denominada Crise dos Fundamentos, ocorrida na passagem dos séculos supracitados, possivelmente tenha sido o grande marco da evolução ou transformação de conhecimentos desde Euclides, com a sua organização do conhecimento matemático, mais especificamente sobre o geométrico, aliado às ferramentas introduzidas por Leibniz para o Cálculo e a própria Geometria Analítica de René Descartes.

Por sua vez, a Geometria de Euclides, oriunda de um mundo perceptível, real ou visível, passa a ter uma amplitude maior com o tratamento dos objetos geométricos por coordenadas na Geometria Analítica. Para Euclides, o ponto, a reta, o plano e o espaço eram reais e visíveis, podendo ser percebidos na natureza e a eles se atrelavam dimensões zero, um, dois e três, às quais poderiam ser associadas medidas de comprimento, área e volume. Na Geometria Analítica, a percepção é extrapolada com a inclusão de mais de três números para representar um objeto, o que só pode ser concebido na mente por imaginação. Obviamente, na Física, a quarta coordenada é relacionada ao tempo, mas a partir daí foge ao mundo percebido na natureza.

A criação das Geometrias Não-Euclidianas – elíptica e hiperbólica – nos séculos XIX e XX, vai mais além, pois, de certa forma, rompe com o mito da existência de uma única geometria – a de Euclides. A simples noção de reta é generalizada em outros espaços geométricos, nos quais se estabelece uma axiomática específica com pontos em comuns e outros distintos, como é o caso do paralelismo.

A partir disso outras possibilidades de geometrias passam a coexistir como, por exemplo, a Geometria Topológica e, mais recentemente, a Geometria Fractal. O uso das tecnologias é algo que deve, sem sombra de dúvidas, ser incorporado ao ensino e à aprendizagem dessas geometrias, sendo ele destacado neste artigo no qual iremos abordar a projeção estereográfica, nem sempre fácil de ser visualizada, recebendo maior ênfase os aspectos matemáticos envolvidos. Dessa forma, além da Matemática envolvida, nosso principal objetivo no texto é fornecermos alguns indicativos de como utilizar softwares para visualizar projeções estereográficas de certas curvas da esfera tridimensional no plano de projeção.

Nesse intuito, será abordada a aplicação inversão em relação a uma circunferência no plano, com vistas a representar e interpretar inversão de pontos, de círculos e de retas de forma similar para uma esfera no espaço tridimensional, visando interpretar a ortogonalidade de curvas como base para a compreensão do modelo de Poincaré de Geometria Hiperbólica, sem aprofundar o modelo.

Duas superfícies,  $M$  e  $M'$ , podem ser transformadas ou representadas uma sobre a outra, se existe uma aplicação bijetora entre seus pontos. Admitamos que a superfície  $M$  seja dada pela função  $X=X(u,v)$  e  $M'$  por  $X_1=X_1(u_1,v_1)$ , em que  $(u,v)$  e  $(u_1,v_1)$  são regiões abertas do  $\mathbf{R}^2$ . Assim, ficam estabelecidas as relações

$$\begin{cases} u_1 = u_1(u, v) \\ v_1 = v_1(u, v) \end{cases},$$

sendo que  $u_1$  e  $v_1$  são funções uniformes com derivadas parciais contínuas, de modo que

$$\frac{\delta(u_1, v_1)}{\delta(u, v)} \neq 0$$

Portanto, um ponto de  $M$  e seu correspondente de  $M'$  são designados pelos mesmos valores do par  $(u,v)$ , ou seja,

$$X=X(u,v) \text{ e } X_1=X_1(u,v).$$

A geometria diferencial aborda algumas dessas importantes representações conforme, a saber:

- as que conservam ângulos [representações conforme];
- as que conservam ângulos e distâncias [representações isométricas];
- as que conservam áreas [representações equivalentes];
- as que conservam as geodésicas [representações geodésicas].

Nosso interesse, neste momento, está nas primeiras, as quais serão o objeto inicial de estudo.

## PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA DA ESFERA TRIDIMENSIONAL

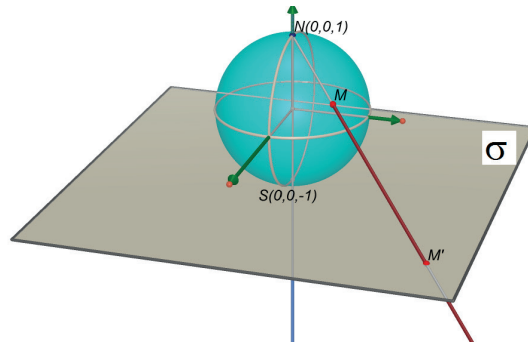
Consideremos a esfera unitária  $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , no espaço tridimensional. e dela retiraremos um ponto, a saber, o polo norte  $N = (0,0,1)$ , como na figura (1), a seguir. Consideremos, também, um plano horizontal  $XOY$ , denotado por  $\sigma$ . Sobre a esfera, tomemos um ponto  $M \neq N$  qualquer. A função definida por

$$\varphi: S^2 - \{N\} \rightarrow \sigma$$

$$M \rightarrow \varphi(M) = M' = \overrightarrow{NM} \cap \sigma$$

é chamada projeção estereográfica com centro de projeção  $N$ . Intuitivamente, pode ser percebida como sendo uma bijeção entre a esfera menos um ponto e o plano.

**Figura 1 - Função projeção estereográfica**



Tomemos um sistema de coordenadas cartesianas em  $\mathbf{R}^3 = \{(X,y): X \in \mathbf{R}^2 \text{ e } y \in \mathbf{R}\}$ ,  $X = (x_1, x_2)$ ,  $M = (X, z)$  e  $M' = (u, -1)$ . Os vetores  $\overrightarrow{NM}$  e  $\overrightarrow{NM'}$  são linearmente dependentes, isto é, colineares, logo

$$\overrightarrow{NM} = \lambda \overrightarrow{NM'}$$

com  $\lambda > 0$ . Portanto,

$$(X, z-1) = \lambda(u, -2) \Rightarrow x = \lambda u \text{ e } z-1 = -2\lambda.$$

Segue que  $\lambda = \frac{1-z}{2} \Rightarrow u = \frac{2x}{1-z}$  e  $z = 1 - 2\lambda$ . A projeção estereográfica, nesse caso, é dada por

$$\varphi: (X, z) \rightarrow \left( \frac{2X}{1-z}, -1 \right).$$

Como a função é bijetora, determinamos a sua inversa a partir da equação da esfera no espaço, isto é,

$$\begin{aligned} 1 &= |X|^2 + z^2 = \lambda^2 |u|^2 + (1-2\lambda)^2 = \lambda^2 |u|^2 + 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = \lambda^2 (|u|^2 + 4) + (1-4\lambda) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= \lambda^2 (|u|^2 + 4) - 4\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda (|u|^2 + 4) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \frac{4}{|u|^2 + 4}. \end{aligned}$$

Como  $X = \lambda u$  vem que  $X = \frac{4u}{|u|^2 + 4}$ . Por sua vez, de  $z = 1 - 2\lambda$  segue que  $z = 1 - 2 \frac{4}{|u|^2 + 4} = \frac{|u|^2 - 4}{|u|^2 + 4}$ .

Finalmente, a lei que define a inversa da projeção estereográfica é dada a seguir.

$$\varphi^{-1}(u) = (X, z) = \left( \frac{4u}{|u|^2 + 4}, \frac{|u|^2 - 4}{|u|^2 + 4} \right),$$

o que faz, então, a transformação inversa da projeção estereográfica? Ela toma um ponto qualquer do plano das projeções e retorna a um ponto da esfera, com exceção do polo norte ou origem do processo.

Klein considera a projeção estereográfica como um caso particular de um tipo de transformação que denomina transformação por raios vetores recíprocos. Notamos que, quando  $z=1$ , a projeção não fica definida, pois o denominador da fração se anula. Assim, o polo norte se torna um ponto

limite da transformação e tem como correspondência um ponto denominado ponto no infinito. Afirma o autor: “Reciprocamente, para todos os pontos do infinito, se obtém como homólogo à origem de coordenadas; utilizando a terminologia já antes introduzida, diremos que a esse ponto lhe corresponde um ponto único do plano do infinito.” (KLEIN, 1927 p. 132, trad. nossa). No caso exposto acima, a esfera e o plano são homólogos.

Uma das propriedades importantes da projeção estereográfica diz respeito a que circunferências sobre a esfera são homólogas a circunferência no plano. Quando as primeiras passam pelo polo norte, suas homólogas passam pelo ponto no infinito no plano, isto é, são retas, como veremos no que segue. Tomemos a equação cartesiana de um plano no espaço tridimensional  $Ax + By + Cz + D = 0$ , o qual intercepta a esfera  $S^2$ . Consideremos a inversa da função projeção estereográfica dada acima, para a qual  $u(u,v)$  e  $|u|^2 = u^2 + v^2$  é levado na equação do plano.

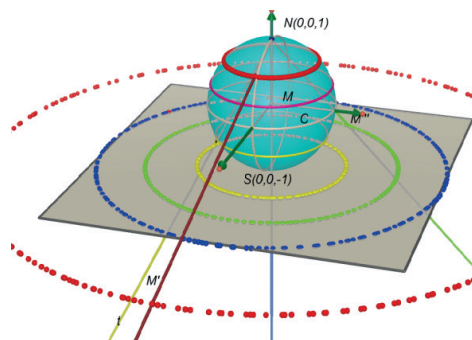
Então, nós temos que

$$\begin{aligned} A\left(\frac{4u}{u^2+v^2+4}\right) + B\left(\frac{4v}{u^2+v^2+4}\right) + C\left(\frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4}\right) + D &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4Au + 4Bv + C(u^2 + v^2 - 4) + D(u^2 + v^2 + 4) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (C + D)u^2 + (C + D)v^2 + 4Au + 4Bv - 4C + 4D &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Quando  $C+D \neq 0$ , o plano não passa pelo polo norte,  $N(0,0,1)$  e essa equação é a equação de uma circunferência no plano  $z = -1$ .

$\Rightarrow$  Quando  $C + D = 0$ , o plano passa pelo polo norte e a equação se reduz a  $4Au + 4Bv - 4C + 4D = 0$ , qual denota uma linha reta no plano  $z = -1$ .

**Figura 2** - Projeções estereográficas de circunferências paralelas ao plano de projeção.



Observamos na figura 2 que as circunferências as quais estão muito próximas do polo norte, ou seja, com raios tendendo a zero, se projetam no plano com raios muito grandes, tendendo ao infinito, o que faz a imaginação admitir que se transformem em retas ou pontos no infinito. Entendemos o termo imaginação como “uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual poderá ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito” (LEIVAS, 2009, p. 20). No prefácio do livro *Geometry and the Imagination*, a habilidade de visualização é caracterizada da seguinte forma.

[...] é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria, tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria; além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais. (HILBERT, D.; COHN-VOSSSEN, 1932, p. iii)

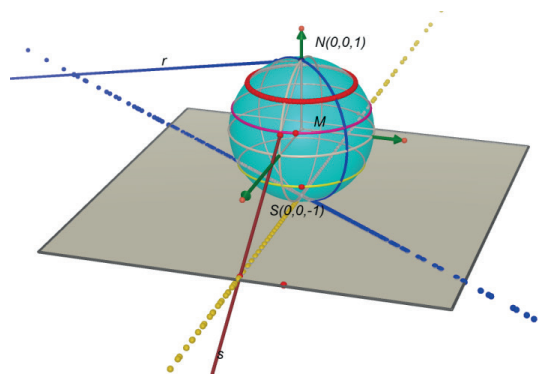
Por sua vez,

nos anos 1880, Galton afirmou que as pessoas se diferenciavam por sua imaginação mental. Algumas, como ele mesmo, possuíam uma forte imaginação visual; outras, nada em absoluto, pensavam principalmente com palavras. Hoje, isso é tão certo como fora então. Há, também, pessoas que dispõem das duas modalidades, porque, talvez, têm uma preferência mais para uma do que para outra. (SKEMP, 1993 p. 100)

A circunferência de raio máximo  $C$ , a qual representa o equador, serve de limite no sentido que aquelas que se encontram no hemisfério superior têm seus raios aumentando indefinidamente, enquanto as que se encontram no hemisfério inferior têm seus raios diminuindo, aproximando-se do polo sul.

Por outro lado, as circunferências que representam os meridianos, isto é, as que passam pelos polos norte e sul são projetadas em retas no plano, como podemos observar na figura 3, a seguir.

**Figura 3** - Projeção estereográfica de meridianos.

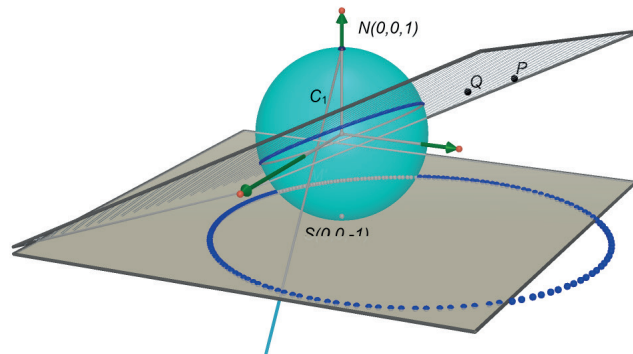


Falta-nos, agora, visualizar como são projetadas as demais circunferências máximas da esfera, isto é, circunferências resultantes da intersecção dela com os outros planos que passam pelo seu centro. Isso pode ser observado na figura 4. Tomemos um plano passando pela origem e pelos pontos  $P$  e  $Q$  do espaço e determinemos sua intersecção com a esfera, ou seja, a circunferência  $C_1$ . Tomemos um ponto  $M$  sobre essa circunferência e a semirreta de origem  $N$  passando por  $M$ , a qual intersecciona o plano da projeção estereográfica em  $M'$ . O lugar geométrico descrito pelo ponto  $M'$ ,



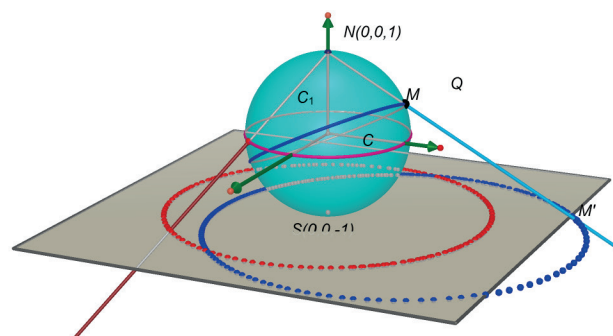
quando o ponto  $M$  percorre  $C_1$ , é também circunferência, porém não mais de centro na origem do sistema plano  $(0,0,0)$ .

**Figura 4** - Projeção estereográfica de circunferências com centro no centro da esfera.



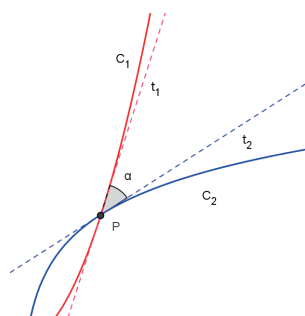
As circunferências resultantes da intersecção da esfera por planos que passam pelo seu centro são denominadas geodésicas da esfera. Assim, a projeção estereográfica manda geodésicas da esfera no espaço em retas ou circunferências no plano. Essa projeção tem a propriedade de conservar ângulos, sendo, por isso, denominada aplicação conforme.

**Figura 5** - Posição entre as circunferências no plano de projeção.



O ângulo entre duas curvas  $C_1$  e  $C_2$ , em um ponto comum  $P$ , é definido como o ângulo  $\alpha$ , formado pelas tangentes  $t_1$  a  $C_1$  e  $t_2$  a  $C_2$  no ponto  $P$ , como pode ser visualizado na figura 6. Uma transformação que preserva ângulos é denominada isogonal ou conforme. A projeção estereográfica envia ângulos entre curvas da esfera em ângulos iguais formados pelas respectivas curvas projetadas no plano. Dito de outra forma, a projeção estereográfica preserva ângulos. Por sua vez, em Leivas (2011) encontra-se uma forma analítica de obter triângulos curvilíneos com três ângulos retos sobre a esfera.

**Figura 6 - Ângulo entre curvas.**



## A GEOMETRIA DA INVERSÃO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA NO PLANO

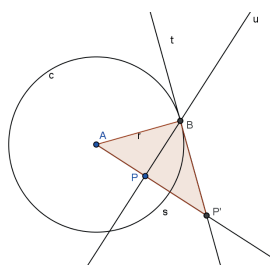
Para aqueles que estudaram Geometria há algum tempo ou até mesmo a ensinaram na escola básica, um dos temas relacionados ao estudo de posições relativas de ponto e circunferência é a denominada potência. Em Dows (1971) encontram-se demonstrados dois teoremas relacionando tangentes e secantes a uma circunferência. Pretendemos aqui obter uma transformação, denominada inversão, que está diretamente relacionada a esses teoremas, a qual pode ser explorada visualmente por meio de um software de Geometria Dinâmica. Isso conduzirá à visualização que entendemos “como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (LEIVAS, 2009, p. 22), sendo esse o sentido empregado ao longo do artigo. Assim, com o software, o indivíduo passa a obter imagem mental de um conceito matemático, por vezes adquirido apenas por meio de uma representação algébrica.

Tomemos uma circunferência de centro  $A$  e raio  $r$  e um ponto  $P$  pertencente ao plano que a contém, distinto de  $A$ . A transformação bijetora que associa a cada ponto  $P$  do plano um ponto  $P'$ , satisfazendo às duas condições a seguir, é denominada transformação inversão associada à circunferência  $c$ :

1.  $P' = T(P)$  pertence à semirreta  $AP$ ;
2. O produto das medidas dos segmentos  $AP$  e  $AP'$  é igual ao quadrado da medida do raio da circunferência.

Muito embora softwares como Cabri e GeoGebra disponibilizem uma ferramenta para obter tal transformação, utilizaremos a construção geométrica, explorando propriedades geométricas, como veremos na figura 7, construída no GeoGebra.

**Figura 7 - Transformação inversão construída com o auxílio do GeoGebra.**





A seguir apresentaremos a sequência a ser construída.

1. Construir uma circunferência  $c$  de centro  $A$  e raio  $r$  e um ponto  $P$  na região interior limitada por ela.
2. Conduzir a semirreta  $s$  de origem  $A$  passando por  $P$ .
3. Por  $P$  conduzir a perpendicular  $u$  a  $s$  por  $P$ , determinando o ponto  $B$  de intersecção de  $u$  com  $c$ .
4. Por  $B$  conduzir a tangente  $t$  à  $c$  que intersecciona  $s$  em  $P'$ .
5. Tomar o triângulo  $ABP'$ , que é retângulo em  $B$ .

Nota 1. No triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual à medida da projeção desse cateto sobre a medida da hipotenusa vezes a medida dessa, ou seja,  $r^2 = AP \cdot AP'$ .

Nota 2. Essa relação é denominada potência de um ponto em relação à circunferência.

Nota 3. O ponto  $P'$  é denominado inversão de  $P$  em relação à circunferência.

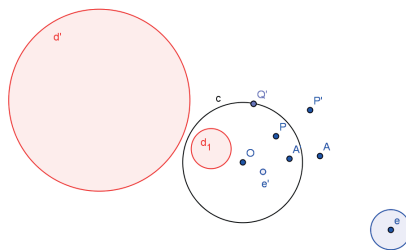
Nota 4. A transformação que faz isso é denominada transformação inversão em relação à circunferência.

Empregamos a ferramenta inversão disponível no GeoGebra para analisar inversão de pontos e linhas no plano. Para tal, consideremos uma circunferência  $c$ , que limita a região limitada do plano chamada círculo e uma região exterior ilimitada do plano.

Tomemos um ponto  $P$  do círculo e localizemos seu inverso  $P'$ , pertencendo à região exterior. De modo recíproco, se o ponto estiver na região exterior, o seu inverso se encontrará na região interior. O ponto  $P$  não pode ser o centro da circunferência, pela própria definição. A fim de que a função seja bijetora, definimos a imagem do centro da circunferência como sendo um ponto no infinito, o qual é acrescido ao plano euclidiano, isto é,  $\mathbb{R}^2 \cup \infty$ , denominando-o de plano inversivo. Se o ponto  $Q$  pertencer à circunferência, então o seu inverso é ele mesmo. Tomemos um círculo  $d$  com raio menor do que o raio da circunferência  $c$ , não contendo o centro. Seu inverso é o círculo  $d'$ , exterior à  $c$ . Utilizando a ferramenta do GeoGebra a qual permite movimentar o círculo menor observa-se que, quanto mais próximo ele se encontra da circunferência  $c$ , tanto menor se torna seu simétrico, além de se aproximar externamente de  $c$ . Ao aproximar  $d$  do centro de  $c$ , o círculo  $d'$  tem seu raio aumentado infinitamente.

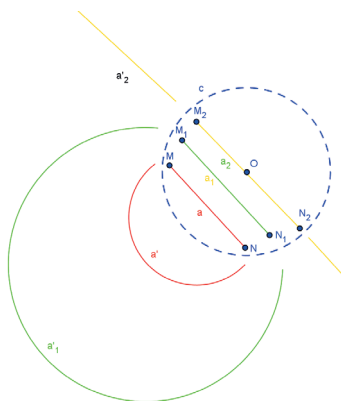
Definamos um círculo  $e$  de raio fixo, menor do que o raio de  $c$ , na região externa, e busquemos seu inverso. De forma similar, obteremos um círculo no interior de  $c$  e, na medida em que o centro de  $e$  se afastar de  $c$ ,  $e'$  ficará próximo do centro de  $c$ , com raio tendendo a zero.

**Figura 8** - Inversos de pontos e círculos em relação à circunferência.



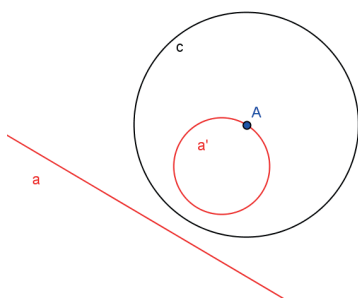
Na figura 9, ilustramos as situações de inversão de segmentos de retas e de retas. Observamos que a inversão de segmentos de retas produz arcos de circunferências. Na medida em que os segmentos se aproximam do centro  $O$  de  $c$ , os raios das circunferências são cada vez maiores e, quando o segmento passa pelo centro  $O$ , esses arcos se transformam em duas semirretas.

**Figura 9** - Inversão de segmentos relativos à circunferência.



Quando os pontos extremos dos segmentos pertencem à circunferência  $c$ , os arcos se transformam em arcos de circunferências, tendo extremos comuns com os dos segmentos e as semirretas se transformam em reta. De forma recíproca, se os segmentos forem exteriores a  $c$ , então os arcos serão interiores. Por sua vez, se os segmentos tiverem parte no interior e parte no exterior, então a inversão produzirá arcos com parte no interior de  $c$  e parte no exterior. O dinamismo do GeoGebra permite visualizar essa variação apenas movimentando o segmento em que visualização tem o significado definido anteriormente

**Figura 10** - Inversão de retas.



A reta  $a$ , exterior à circunferência, é levada pela transformação inversão em circunferência passando pelo centro de  $c$  e vice versa. Ao movimentar a reta  $a$  de modo a interseccionar a circunferência  $c$ , então a inversão produz circunferência passando pelo centro de  $c$ , mas a interseccionando.

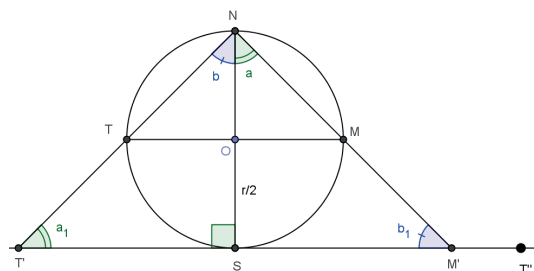
Nessa geometria inversiva, temos uma ampliação do conceito de circunferência, incluindo reta como caso particular, pois quando a circunferência não passa pelo ponto no infinito, ou seja, não é

uma reta e nem passa pelo centro da circunferência de inversão, os pontos transformados estão todos a uma mesma distância finita e sua imagem é uma circunferência não contendo o centro. Porém, se a circunferência passar pelo ponto no infinito, ou seja, se for uma reta e não contiver o centro da circunferência de inversão, a sua inversa não passará pelo infinito, ou seja, será uma circunferência no sentido usual, contendo o centro de inversão. Se uma circunferência contém o centro de inversão, mas não passa pelo ponto no infinito, ou seja, é uma circunferência usual, sua inversa passa pelo ponto no infinito, ou seja, é uma reta e não passa pelo centro de inversão. Se a circunferência contém o centro de inversão e o ponto no infinito, ou seja, é uma reta passando pelo centro de inversão, sua inversa contém, também, os mesmos dois pontos, isto é, é a mesma reta.

Provaremos, analiticamente, que a função inversão, como a projeção estereográfica, transforma linhas retas e circunferências em circunferências e linhas retas, além de preservar ângulos. Suponhamos uma esfera de raio  $r$ , um ponto  $N$ , a projeção estereográfica da esfera, a partir de  $N$  sobre o plano tangente e seu ponto simétrico  $S$ . Imaginemos um ponto  $M$  e seu simétrico  $T$  em relação à esfera.  $M'$  e  $T'$  são a projeção estereográfica de  $M$  e  $T$ , respectivamente. O ângulo de vértice  $N$  e lados  $NT$  e  $NM$  é reto. Além disso, na figura 13, observamos que os ângulos  $a$  e  $a_1$  são congruentes, bem como os ângulos  $b$  e  $b_1$ . Portanto,  $\triangle TSN \cong \triangle NSM'$  e

$$\frac{T'S}{NS} = \frac{SN}{SM'} \Rightarrow T'S \cdot SM' = r^2, \text{ donde } ST' \cdot SM' = r^2.$$

Figura 11 - Simetria na esfera.



Agora, consideremos uma circunferência de centro  $S$  e raio  $r$ , no plano tangente, no polo sul  $S$ . Seja  $T''$  o ponto simétrico  $T'$  para o ponto  $S$ . Então,  $ST' = ST''$  e, conseqüentemente,  $T''$  representará a inversão de  $T$  em relação à circunferência.

Assim, a função de inversão do plano tangente no ponto  $S$ , em relação à circunferência com centro em  $S$ , pode ser vista como uma composição da inversa da projeção estereográfica, a reflexão, sobre a origem da primeira esfera, a projeção estereográfica e a reflexão de um ponto.

### A GEOMETRIA DA INVERSÃO EM RELAÇÃO A UMA ESFERA NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL

Levaremos em consideração uma esfera no  $\mathbf{R}^3$  menos um ponto e a função inversão com relação a ela. Para tal, consideremos uma esfera de centro  $M_0$ ; raio  $R$  e um ponto  $M$  no  $\mathbf{R}^3$ , diferente de  $M_0$ . A função inversão em relação à esfera será uma função

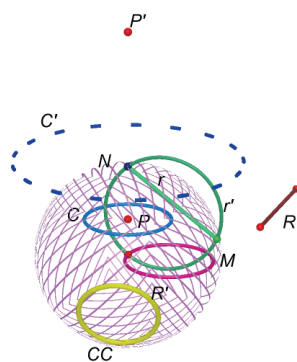
$$\varphi: \mathbf{R}^3 - \{M_0\} \rightarrow \mathbf{R}^3 - \{M_0\},$$

definida de tal modo que  $M'$  pertença à semirreta  $\overrightarrow{M_0M}$  e

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{M_0M'} = R^2.$$

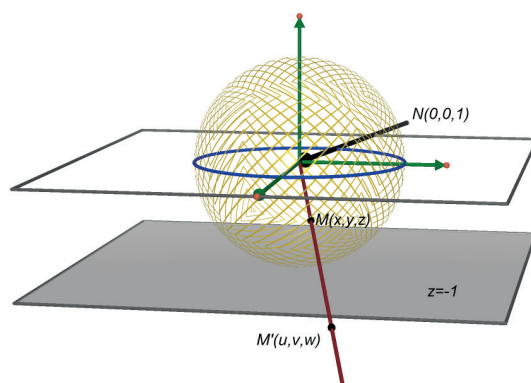
Na figura 12, podemos ver algumas inversões em relação à esfera. Por exemplo, o ponto  $P$ , no interior da superfície esférica, tem por inverso o ponto  $P'$ , exterior, ambos num eixo que passa pelo centro da esfera. A circunferência  $C$ , em azul, também interior à esfera, contida num plano paralelo ao plano do equador, tem por inversa a circunferência  $C'$ , também em azul, tracejada, no exterior da esfera, contida num plano paralelo ao anterior. A corda  $MN$ , de comprimento  $r$ , tem por inversão o arco, no exterior da esfera, de uma circunferência  $r'$ . A curva  $CC$ , em amarelo, é uma circunferência da esfera e sua inversa é ela mesma. Por fim, o segmento  $R$ , em vermelho, é invertido no arco da circunferência  $R'$ , também em vermelho, no interior da esfera. Assim, pontos da esfera são levados neles mesmos e pontos do interior são levados ao exterior e vice-versa.

**Figura 12** - A aplicação inversão na esfera.



Tomemos uma esfera de centro em  $M_0 = N(0,0,1)$  e raio  $R$  igual a 2; um ponto  $M(x,y,z)$  no  $\mathbf{R}^3$  diferente de  $M_0$  e sua inversão  $M'(u,v,w)$  com relação à esfera, figura (13).

**Figura 13** - Inversão de pontos na esfera.



Nessas condições, a equação da esfera é  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ , uma vez, que tendo centro em N e tangenciando o plano  $z = -1$ , seu raio é igual a 2 unidades. Como os vetores  $NM'$  e  $NM$  são linearmente independentes, existe um escalar positivo  $\lambda$ , de modo que

$$(u-0, v-0, w-1) = \lambda(x, y, z-1).$$

Isso implica  $u = \lambda x$ ;  $v = \lambda y$  e  $w-1 = \lambda(z-1)$ . Fazendo a substituição na igualdade  $NM \cdot NM' = 4$ , segue que

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + (w-1)^2} = 4$$

Por sua vez, fazendo a substituição conveniente, encontramos

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 (z-1)^2} &= 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda (x^2 + y^2 + (z-1)^2) &= 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{(x^2 + y^2 + (z-1)^2)} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } u = \frac{4x}{(x^2 + y^2 + (z-1)^2)}; v = \frac{4y}{(x^2 + y^2 + (z-1)^2)} \text{ e } w = 1 + \frac{4(z-1)}{(x^2 + y^2 + (z-1)^2)} = \frac{x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 4}{(x^2 + y^2 + (z-1)^2)}.$$

Observemos que, se o ponto  $M'$  pertence ao plano  $Z = -1$ , as equações anteriores se transformam em

$$u = \frac{4x}{(x^2 + y^2 + 4)}; v = \frac{4y}{(x^2 + y^2 + 4)} \text{ e } w = \frac{(x^2 + y^2 - 4)}{(x^2 + y^2 + 4)}.$$

Então, a função inversa da projeção estereográfica é a restrição da função inversão.

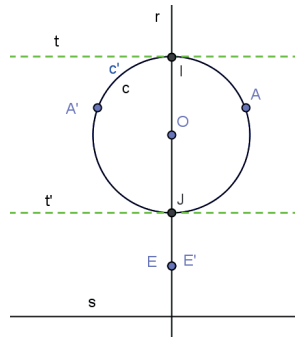
## INVERSÃO E ORTOGONALIDADE

Não podemos deixar de estabelecer semelhanças entre a transformação inversão e a transformação reflexão, um dos movimentos rígidos do plano. Para a reflexão, existe um eixo ou um plano de simetria, dependendo dela ocorrer no plano ou no espaço. Respectivamente, uma circunferência ou uma esfera desempenham papel análogo na inversão.

Observamos que os pontos do eixo de simetria são inversos de si mesmos na transformação reflexão, da mesma forma que os pontos da circunferência são os inversos de si mesmos na transformação inversão. Tomamos uma reta  $r$ , eixo de simetria no plano, uma reta perpendicular a  $r$ ,  $s$  e uma circunferência de centro no eixo de simetria, figura 14. O simétrico em relação a  $r$  do ponto  $A$  é o ponto  $A'$ . A figura simétrica da circunferência  $c$  é a circunferência  $c'$ , coincidindo com  $c$ ; logo,  $c$  é invariante relacionado à reflexão em relação à reta  $r$ , da mesma forma que os pontos  $E$  e  $E'$  sobre a reta  $r$ . De forma similar à circunferência, a reta  $s$ , perpendicular a  $r$ , é invariante em relação a ela pela reflexão.

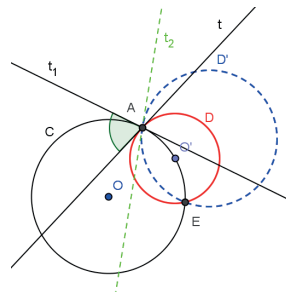
Além disso, podemos observar que a circunferência é perpendicular ao eixo de simetria nos pontos de intersecção (I e J) de ambos os lugares geométricos, pois as tangentes ( $t$  e  $t'$ ) a  $c$ , nesses pontos, são perpendiculares a  $r$ . Assim, se uma circunferência  $c$  tem seu centro sobre uma reta  $r$ , ambas são ortogonais. Veremos a seguir que, no caso da inversão, isso não ocorre.

**Figura 14** - Simetria ou reflexão em relação a uma reta no plano.



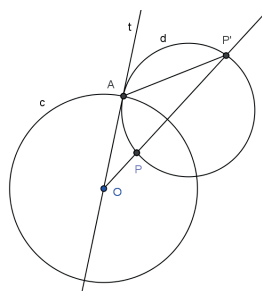
Comparativamente, tomemos a inversão em relação à circunferência  $C$  no plano, já analisadas, anteriormente, figuras 8, 9 e 10, de forma que se o ponto pertencer à circunferência, então o seu inverso é o próprio. As retas ortogonais à  $C$  são as que passam pelo seu centro. Entretanto, se tomarmos uma circunferência  $D$ , de centro na circunferência de inversão  $C$ , então sua inversa não é ela mesma, não sendo, pois invariante. Além disso, não é ortogonal, visto que as tangentes  $t$  a  $D$  e  $t_1$  a  $C$  não formam ângulo reto em  $A$ . Por outro lado, a inversa de  $D$  é a circunferência  $D'$ , a qual também não é ortogonal à  $C$ , pois a sua tangente em  $A$ ,  $t_2$  também não é ortogonal a  $t_1$  (não passa por  $O$ ), conforme vemos na figura 15.

**Figura 15** - Não ortogonalidade na inversão na circunferência.



No que segue, procuramos determinar quais são as circunferências ortogonais à circunferência de inversão.

**Figura 16** - Ortogonalidade na inversão de circunferência.





Definamos a circunferência de inversão  $\mathbf{c}$ , de centro em  $O$ , e admitamos que a circunferência  $\mathbf{d}$  seja sua inversa ortogonal. Precisamos mostrar que  $\mathbf{d}$  é invariante em relação a  $\mathbf{c}$ . Para tal, é necessário que, tomando um ponto qualquer,  $P$  de  $\mathbf{d}$ , seu inverso em relação a  $\mathbf{c}$  está na intersecção da semirreta de origem  $O$ , passando por  $P$ , ou seja, o ponto  $P'$  na figura 16. Isso significa, por definição, que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OA}^2$$

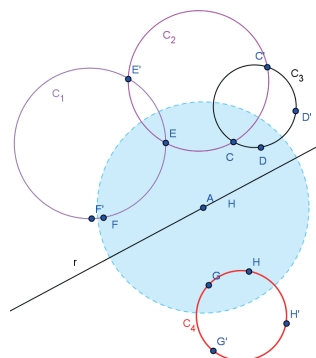
Portanto, as circunferências ortogonais à de inversão são invariantes, como as de centro na reta de reflexão. Além disso, todas as que são ortogonais à circunferência de inversão contêm os pontos e seus respectivos inversos. Por sua vez, dados dois pontos pertencentes ao interior da circunferência de inversão, existe uma única ortogonal a ela que contém os dois pontos. Tal circunferência é obtida pelos dois pontos e por um dos simétricos de um deles, pois três pontos distintos determinam, univocamente, uma circunferência.

## INVERSÃO, ORTOGONALIDADE E O MODELO DE POINCARÉ

No intuito de demonstrar o quinto postulado de Euclides, o das paralelas, vários modelos foram apresentados, sendo um deles o modelo de Poincaré, o qual, inicialmente, não parece priorizar os aspectos geométricos e, sim, os algébricos. Nossa intenção aqui é explorar os aspectos visuais do modelo, ou seja, de que forma o indivíduo internaliza o modelo geometricamente em sua mente. O modelo de Poincaré, como espaço geométrico, é o interior de uma região circular  $H$ . Nesse espaço, os pontos são como na geometria euclidiana e as retas, no sentido hiperbólico, são as intersecções de circunferências e retas ortogonais a  $H$ , com  $H$ .

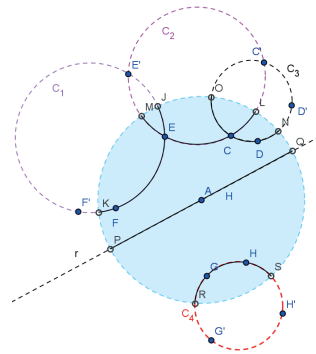
Para que retas sejam ortogonais à circunferência fronteira de  $H$ , é necessário que sejam ortogonais às retas tangentes no ponto de intersecção de ambas, ou seja, devem passar pelo centro da circunferência que define  $H$ , portanto, diâmetros sem os extremos. Por sua vez, no item anterior, verificamos como obter circunferências que sejam ortogonais à fronteira de  $H$ , conforme a figura 16. Na figura 17a, encontramos a construção das retas ortogonais à  $H$ , sendo  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  as circunferências e  $r$  a reta, propriamente dita.

**Figura 17a** - Circunferência e retas ortogonais a  $H$ .



Fazendo a intersecção dessas “retas” com H, visualizamos o modelo de Poincaré na figura 17b. A construção feita num software de Geometria Dinâmica permite visualizações diferentes do modelo e suas “retas” (arcos de circunferência que penetram em H ortogonalmente e diâmetros, excetuados os extremos).

**Figura 17b - As retas de H.**



Devemos explorar, no modelo, o famoso quinto postulado, o qual não é nada intuitivo, uma vez que muitos cursos de graduação não vão além da geometria euclidiana. Tomemos o arco da circunferência  $C_4$ , RGHS, figura 17b, o qual é uma reta no modelo hiperbólico de Poincaré, e um ponto E, por exemplo, não pertencente a essa. Por E passam os arcos KFEJ e MECL, também retas no modelo e que não interseccionam a primeira, sendo-lhe paralelas. Assim, no modelo de Poincaré, dada uma reta e um ponto fora dela, existe mais do que uma reta que não a intersecciona, ou seja, é paralela.

### DISTÂNCIA NA GEOMETRIA HIPERBÓLICA

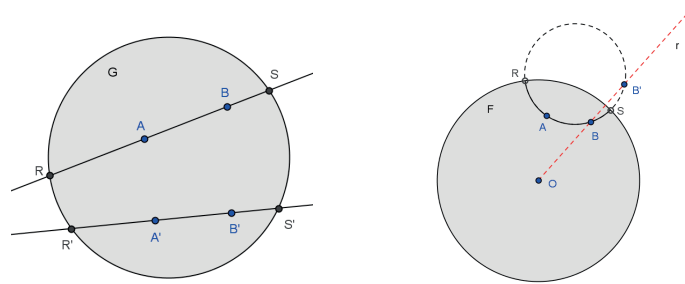
Assim como mostramos que a projeção estereográfica da esfera, uma superfície de curvatura gaussiana constante e positiva, leva as geodésicas dessa em circunferências no plano projetivo, figuras 2,3,4, ou seja, em “retas”, veremos que, para superfícies de curvatura gaussiana constante e negativa, algo similar pode ser feito. O modelo de superfície no  $\mathbf{R}^3$  de uma superfície de curvatura constante e negativa é a pseudo-esfera. Entretanto, essa superfície tem pontos singulares, ou seja, aqueles onde os planos tangentes não estão definidos e, cuja fronteira se estende continuamente.

Suponhamos que E seja uma superfície de curvatura gaussiana constante e negativa  $-\frac{1}{c^2}$  onde c é uma constante real não nula. De acordo Hilbert and Cohn-Vossen (1932), uma porção qualquer da superfície de curvatura gaussiana constante e negativa pode ser levada numa região plana G, interior de um círculo m de radio r no plano projetivo, de tal modo que todas as geodésicas de E são transformadas em segmentos de reta contidos em G, a saber, cordas da circunferência. Consideremos ainda que, sendo a curvatura de G, que é parte de um plano, nula, e a de E negativa, não existe isometria que leve um objeto geométrico no outro.

Na figura 18, os pontos A e B representam as imagens dos pontos P e Q de E. Se R e S são as extremidades da corda que contém esses dois pontos, sem os extremos, então a distância geodésica entre os pontos P e Q é dada pela fórmula a seguir:

$$S = \frac{c}{2} \cdot \left| \ln \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right|, \text{ onde } c \text{ é uma constante positiva.}$$

**Figura 18 - Distância geodésica. Figura 19 - Arco contendo A e B.**



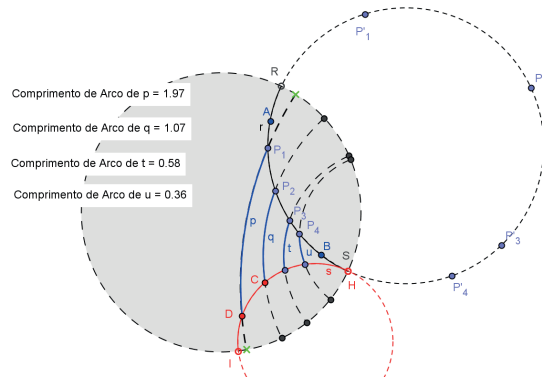
Consideremos uma esfera M, de radio r, tangente ao plano que contém G, no centro do círculo M. Projetermos G verticalmente sobre o hemisfério inferior L de M. Tomemos a projeção estereográfica desde o polo norte de M sobre o plano que contém G. Seja F a imagem de L mediante essa projeção estereográfica. F é um disco tendo por fronteira uma circunferência de radio k. Esse é o modelo hiperbólico de Poincaré obtido a partir da pseudoesfera.

Observamos que, dados dois pontos, A e B, pertencentes a F, existe um e somente um arco de circunferência que contem A e B e que é ortogonal a F, figura 19. Assim, para A, B, R e S, no modelo original G, cujas imagens em F são os pontos P, Q, P' e Q', obtidos da projeção estereográfica, da fórmula acima vem que:

$$\begin{aligned} \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} &= \sqrt{\frac{PP' \cdot QS}{QP' \cdot PS'}} \Rightarrow \ln \left( \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right) = \ln \left( \sqrt{\frac{PP' \cdot QS}{QP' \cdot PS'}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{PP' \cdot QS}{QP' \cdot PS'} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \left( \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right) = \frac{c \cdot 1}{c \cdot 2} \ln \left( \frac{PP' \cdot QS}{QP' \cdot PS'} \right) = \frac{s}{c} \Rightarrow c \ln \left( \frac{AR \cdot BS}{BR \cdot AS} \right) = s . \end{aligned}$$

No modelo hiperbólico de Poincaré, duas paralelas não preservam a distância entre pontos, o que pode ser visualizado na figura 20. Consideremos a reta r passando por A e B, ambos pertencentes a F, e uma reta s paralela a r que, como já sabemos, é outro arco ortogonal à circunferência limítrofe de F, passando por C e D e interseccionando a circunferência de F em I e H. Busquemos encontrar a distância de r a s e, para tal, tomemos uma sequência infinita de pontos de r, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, ..., convergindo para S, e localizemos a distância de cada um deles à reta s. Não percamos de vista que é necessário obter as circunferências que passam por esses pontos e são perpendiculares às retas.

**Figura 20** - O paralelismo no modelo de Poincaré.



A seqüência de pontos tomados sobre a reta  $r$  converge para  $S \cong H$ , infinitamente, enquanto que as retas que passam por esses pontos e são perpendiculares a  $s$  definem arcos de comprimentos de medidas cada vez menores, tendendo a zero. Portanto, não há conservação de distância entre as duas retas paralelas. A reta  $r$  funciona como uma assíntota para a reta  $s$ .

O ponto  $S \cong H$  é chamado ponto ideal da reta  $s$  (bem como o ponto  $I$ ). A reta  $r$  chama-se paralela crítica à  $s$  (são as duas, uma é aquela que encontra  $s$  em  $S$  e a outra em  $I$ ).

Além do paralelismo, outras propriedades da geometria euclidiana poderiam ser comparadas em termos de existência ou não no modelo de Poincaré, como, por exemplo, semelhança e congruência, o que não é propósito deste artigo.

## A PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E O PLANO DE LOBACHEVSKI

Tomemos no espaço tridimensional  $\mathbf{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbf{R}\}$  os pontos  $M_1(x_1,y_1,z_1)$  e  $M_2(x_2,y_2,z_2)$ . A métrica de Minkowski é definida da seguinte forma:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}.$$

A definição de ângulo entre vetores é feita do mesmo modo que fazemos utilizando as métricas usuais. Assim, se  $*$  denota o produto escalar na métrica de Minkowski e  $\varphi$  o ângulo entre os vetores  $\vec{OM}_1$  e  $\vec{OM}_2$ , então

$$\cos\phi = \frac{\vec{OM}_1 * \vec{OM}_2}{|\vec{OM}_1| * |\vec{OM}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 - z_2^2}}.$$

Em Garcia (2011) é definido o plano de Lobachevski como sendo o seguinte conjunto de pontos do espaço:

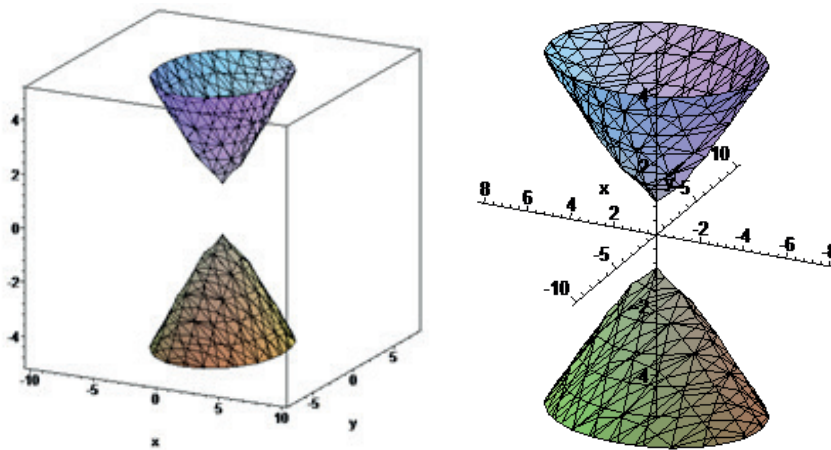
$$L = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$

em que o autor afirma:

así, el plano de Lobachevski es un hiperboloide de 2 hojas que se puede pensar como una esfera de radio imaginario  $i$  en el espacio de Minkowski. En este espacio, al igual que en el espacio euclidiano, podemos definir la proyección estereográfica de la esfera de radio  $i$ , con centro en el punto  $N=(0,0,1)$  sobre el plano  $Z=-1$ . Esta proyección tiene las mismas propiedades demostradas para la proyección sobre la esfera de radio 1. La imagen de la hoja inferior del hiperboloide mediante esta proyección es el interior de la circunferencia de centro en el origen y radio 2. (p.66)

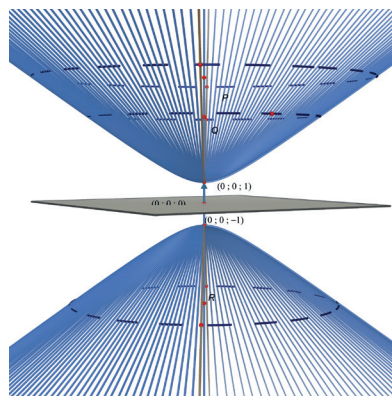
A figura 21 ilustra o hiperboloide  $x^2+y^2-z^2=-1$  construído no Maple com o comando `with(plot-s):implicitplot3d(x^2+y^2-z^2=-1,x=10..10,y=-8..8,z=-5..5,axes=BOXED,grid=[20,20,20]);` Na figura da direita, o comando BOXED foi substituído por NORMAL.

**Figura 21** - Hiperbolóide de duas folhas. Construção dos autores no Maple.



A figura 22 foi construída no Cabri 3D, utilizando uma rotação da hipérbole contida no plano YOZ em torno do eixo OZ. Observamos que o ponto P da hipérbole descreve uma circunferência em um plano paralelo ao XOY, da mesma forma que qualquer outro ponto Q ou R da mesma.

**Figura 22** - Hiperbolóide de duas folhas. Construção do autor no Cabri 3D.



No espaço de Minkowski, da mesma forma que no espaço euclidiano, podemos definir projeção estereográfica, porém usando a esfera imaginária com centro no ponto  $N(0,0,1)$  e o plano de projeção sendo  $z=-1$ . As propriedades da projeção estereográfica aqui são as mesmas daquelas obtidas na esfera unitária anteriormente. No caso do hiperboloide, como na inversa da projeção estereográfica temos que  $z = \frac{(u^2 + v^2 + 4)}{(u^2 + v^2 - 4)}$ , a imagem de sua folha inferior, pela projeção, corresponde ao interior da circunferência de centro no ponto  $S(0,0,-1)$  e raio 2 e, nessa região, é definido o modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica. A partir disso, pode ser feita a interpretação do correlato ao 5º Postulado de Euclides, o das paralelas, numa geometria que não a euclidiana, o que é usual num curso sobre geometrias não euclidianas.

Na continuação, mostraremos que as retas em dita representação são os diâmetros da circunferência e os arcos de circunferências ortogonais a ela. De fato, sejam  $M_1(x,y,z)$  y  $M_2(-x,-y,-z)$  pontos do plano de Lobachevski, diametralmente opostos. Suas imagens, mediante a projeção estereográfica, são dadas por  $M'_1\left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2x}{1-z}, -1\right)$  y  $M'_2\left(\frac{-2x}{1+z}, \frac{-2y}{1+z}, -1\right)$ . Portanto, tais pontos estão na reta que passa pelo ponto  $S$  do mesmo lado desse. Além disso, o produto  $SM'_1 \cdot SM'_2 = 4$ , isto é, os pontos  $M'_1$  y  $M'_2$  se correspondem sob a inversão em relação à circunferência com centro  $S(0,0,-1)$  e raio 2. A imagem da reta do plano de Lobachevski, que contém a  $M_1$  y  $M_2$ , é uma circunferência invariante sob a inversão com relação à circunferência com centro  $S(0,0,-1)$  e raio 2. Assim, se  $R$  é um ponto de intersecção das duas circunferências, a reta que contém os pontos  $S$  y  $R$  é tangente à circunferência que contém  $M'_1$  y  $M'_2$ , e as duas circunferências são ortogonais em  $R$ .

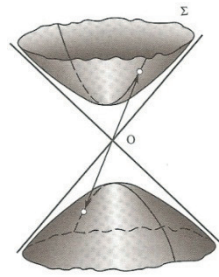
Claramente, por um ponto exterior de uma reta no disco de Poincaré, passam infinitas retas que não a cortam. Dessas há duas limítrofes (que se interseccionam com a reta dada na circunferência fronteira do disco), chamadas retas paralelas à reta dada; as outras São denominadas retas divergentes com a reta dada.

Como feito antes, a função inversão  $\varphi$  no plano, com relação à circunferência centrada na origem  $r$  e raio 2, pode ser vista como a composição da inversa da projeção estereográfica e duas reflexões. Assim, a inversão transforma circunferências e linhas retas em outras circunferências e linhas retas bem como preserva ângulos. A imagem da restrição da função inversão  $\varphi$  ao disco de Poincaré é o semiplano  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y < -1\}$ . Fazendo uma translação, obtemos o semiplano  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y < 0\}$ ; a reflexão desse semiplano, relativa ao plano  $y=0$ , fornece o semiplano superior  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: y > 0\}$ . Portanto, essa composição transforma as retas do disco de Poincaré  $H$  em retas do modelo do semiplano superior de Poincaré. A circunferência fronteira de  $H$  é transformada na reta fronteira  $y=0$ ; as rectas com um de seus extremos no polo norte (arcos de circunferência com um de seus extremos no polo norte) se transformam em retas perpendiculares à reta  $y=0$  e as outras retas se transformam em semicircunferências do semiplano superior com centro sobre a reta  $y=0$ .

Isso nos permite deduzir as propriedades do modelo de disco Poincaré do modelo Poincaré da metade superior do plano e vice-versa.



**Figura 23** - Hiperbolóide de duas folhas. Fonte: (GREENBERG, 1999, p.240).



## CONCLUINDO

Nosso objetivo principal neste artigo teórico foi apresentar um ensaio sobre as funções inversão e projeção estereográfica, a fim de incentivar estudos mais avançados sobre geometrias não-euclidianas. Particularmente, argumentamos que a visualização pode ser muito mais do que o simples fato de “ver com os olhos”, pois é um processo de formar imagens na mente. Assim, transformar as representações algébricas em representações geométricas, utilizando softwares de Geometria Dinâmica, especialmente, o Cabri 3D, o GeoGebra e, por fim, o Maple, pode ser um fator que favoreça esse processo, ainda mais levando em conta a imaginação que pode acompanhar as habilidades visuais.

Assim, visualizar a ortogonalidade que ocorre no modelo de Poincaré, por exemplo, é um conceito geométrico, algumas vezes, difícil de ser percebido pelos estudantes que se limitam a cálculos algébricos e interpretação de equações. No artigo articulamos o conceito de potência de um ponto em relação à uma circunferência com a função inversão. Tal conceito, algumas vezes é apresentado em livros didáticos do ensino fundamental e o professor nem sempre tem o conhecimento para que serve e onde o empregar, reduzindo este estudo à resolução de exercícios de tangentes e secantes à circunferência.

Acreditamos que, com o que aqui foi exposto, possamos contribuir e estimular estudantes a novas investigações, especialmente sobre como construir modelos não euclidianos, pois, em geral, na Licenciatura em Matemática, em particular, pouca atenção é dada ao assunto, como comprovam algumas de nossas pesquisas.

## REFERÊNCIAS

GREENBERG, M. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: development and history**. Third Edition. New York: W.H.Freeman and Company, 1999.

HILBERT, D. and COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination**. New York: Chelsea Publishing Company, 1932.

KLEIN, F. **Matemática elemental desde un punto de vista superior**. Madrid: Biblioteca Matemática, v. I, II. 1927.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática.** 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

LEIVAS, J. C. P. **Triângulos Diferentes: dos planos aos geodésicos.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.13, n.1, 2011, pp.77-93.

DOWS, M. **Geometria Moderna.** São Paulo: Edgard Blucher, Partes I,II. 1971.

GARCIA, G. La proyección estereográfica. En P. Perry (Ed.), **Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones** Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional, 2011, pp. 63-66.

HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination.** New York: Chelsea Publishing Company, 1932

SKEMP, R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas.** 2. ed. Madrid. Ediciones Morata, 1993.

---

RECEBIDO EM: 30 jul. 2015

CONCLUÍDO EM: 11 out. 2015