VIDYA, v. 35, n. 1, p. 133-146, jan./jun., 2015 - Santa Maria, 2015. **ISSN** 2176-4603

SOBRE A EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO MODELO DE FIBONACCI: A CLASSE DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DE FIBONACCI - FHF

ABOUT THE FIBONACCI´S MODEL HISTORICAL EVOLUTION: THE HYPERBOLIC FIBONACCI FUNCTIONS CLASS - HFF

FRANCISCO REGIS VIEIRA ALVES*

RESUMO

Para este trabalho, o objetivo consiste em evidenciar a evolução e a generalização epistemológica em torno da emblemática sequência numérica de Fibonacci, a qual, possui descrição nos livros de História da Matemática, por meio do modelo biológico envolvendo o nascedouro de casais de coelhos. Para tanto, abordamos elementos de um tópico merecedor de maior atenção, no *locus* acadêmico, concernente ao conceito de extensões contínuas de funções de Fibonacci, por intermédio de funções hiperbólicas. O modelo foi proposto originalmente pelo matemático Alexey Stakhov, em 1984, que envolve a definição de uma classe particular de funções, possuindo analogia extraída das funções hiperbólicas. Portanto, por intermédio de um estudo bibliográfico, buscamos a demarcação de uma espécie de abordagem do assunto, com a intenção de divulgação científica, no âmbito da formação inicial de professores de Matemática, posto que, registramos sua desconsideração por parte dos autores de livros de História da Matemática, além de proporcionarmos a percepção de uma noção em evolução constante.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Função Hiperbólica de Fibonacci. História da Matemática. Investigação Histórica.

ABSTRACT

For this work, the objetive is to show the evolution and epistemological generalization about a emblematic numerical Fibonacci sequence, which has a description in the Mathematics History books, through the biological model involving the birthplace of rabbit´s couples. To this goal, we discuss some elements of a topic worthy a further attention in the academic locus, concerning the concept of continous extensios of Fibonacci´s functions, through hyperbolic function model. That model was originally proposed by a russian mathematician Alexey Stakhv, in 1984, involvig the definition of a particular class of functions with analogy extracted from hyperbolic functions. Therefore, through a bibliographic study, we seek a demarcation of a kind of this subject´s approach, with the inttention of scientific dissemination within the initial training of mathematics teachers, since we recorded its disregard by authors of History of Mathematics. Moreover, we provide a application about a subject in constant evolution

Keywords: *Fibonacci Sequence. Hyperbolic Fibonacci Function. History of Mathematics. Historical Research.*

* Doutor em Educação com ênfase no Ensino de Matemática pela UFC. Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará. e-mail: fregis@ifce.edu.br

INTRODUÇÃO

O objetivo deste artigo incide no propósito de envidar esforços para a divulgação científica e um entendimento epistemológico evolutivo acerca de um modelo matemático, originalmente concebido por Leonardo Pisano, em 1202 mas, que, manifesta, ao decorrer dos séculos, um vigor científico que preserva o interesse de estudos em Matemática Pura de alto nível em todo mundo.

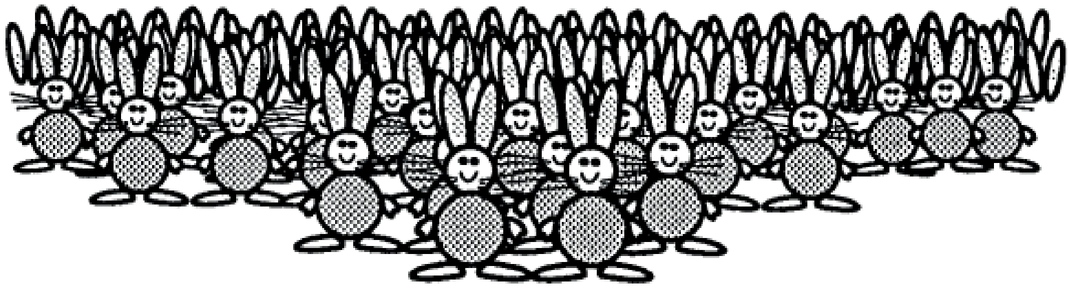
Desse forma, diante de uma variedade de extensões e generalizações oriundas da relação recorrente particular (*) $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$, para $n \geq 1$, simplificadamente denotada por $\left(f_n\right)_{n \in IN}$, abordamos um modelo de interesse dos matemáticos profissionais dos séculos XIX e XX. Um dos questionamentos que buscamos responder ao decurso deste escrito, pode ser caracterizado do seguinte modo: que ou quais evoluções ou generalizações recentes podem ser identificadas a partir do modelo da produção de pares de coelhos, sugerido por Leonardo de Fibonacci, conhecido no contexto acadêmico como Sequência de Fibonacci - SF?

Nas próximas seções, com a intenção de responder a pergunta anterior e diante da constatação de variadas formas de evolução epistemológica e generalização da SF, restringir-nos-emos ao caso da derivação de determinadas formulações, a partir da expressão que fornece, de modo explícito, qualquer elemento presente na SF, conhecida como fórmula de Binnet, bem como o modelo hiperbólico de funções. A atenção dedicada por alguns matemáticos profissionais permitiram a descoberta de relações funcionais intrigantes, na variável real e na variável complexa, nominadas por Funções Hiperbólicas de Fibonacci – FHF e Funções Hiperbólicas de Lucas – FHL.

EXTENSÕES E GENERALIZAÇÕES POSSÍVEIS DE UM MODELO

Restringir-nos-emos ao caso da derivação de determinadas formulações a partir da expressão (fórmula de Binnet) que fornece, de modo explícito, qualquer elemento presente na Sequencia Generalizada de Fibonacci – SGF (BERNSTEIN, 1976; BROUSSEEAU, 1967), que denotaremos por $\left(f(x)\right)_{x \in IR}$. Cabe assinalar ao leitor, uma profusão de descrições e fórmulas que, grosso modo, possibilitam a extensão da sequência original que conhecemos por $\left(f_n\right)_{n \in IN}$. Por outro lado, a despeito do modelo lúdico proposto (ver figura 1) por Leornardo Pisano, que encontramos na obra intitulada *Liber Abaci*, com forte influência do pensamento árabe (STAKHOV, 2006, p. 1128) e discutido por vários autores de livros de HM (ESTRADA, et al., 2000; EVES, 969; GULLBERG, 1997; HERZ, 1998; WALSER, 2001), questionamos as reais e concretas potencialidades de uso em sala de aula, tendo em vista a não exploração/introdução adequada do robusto modelo formal matemático que regula a reprodução dos mesmos.

Figura 1 - Descrição da sequência de coelhos imortais que retrata de forma lúdica um comportamento de uma sequência recorrente linear homogênea conhecida como Sequência de Fibonacci



Fonte: Gullberg (1997, p. 286).

Desenvolvemos nosso interesse na investigação histórica (BARONI, TEIXEIRA & NOBRE, 2011; NOBRE, 2003) envolvendo consulta de documentos que contribuem na formação de professor, no âmbito da vertente História de problemas e conceitos (BARONI, TEIXEIRA & NOBRE, 2011, p. 158). Com tal escopo, recordamos o escrito de Hoggat & Vernner (1969) que desenvolvem e demonstram várias propriedades do que podemos chamar de sequência "extendida", e podemos empregar a simbologia $(f_n)_{n\in Z}$. Na figura 2, observamos o esquema mnemônico discutido por Hoggat & Vernner (1969), no sentido de antever e determinar determinadas propriedades das sequências "extendidas" de Lucas e Fibonacci. O aspecto diferenciado do esquema abaixo consiste em antever o comportamento da referida sequência, quando buscamos antever sua progressão à esquerda, ou seja, (f_{-n}), para $n>0$.

Figura 2 - Discussão e a descrição de ambas as sequências numéricas no campo dos inteiros, isto é, $(f_n)_{n\in Z}$ e $(L_n)_{n\in Z}$

...	F_{-4}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	...
...	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	...
...	7	−4	3	−1	2	1	3	4	7	...
...	L_{-4}	L_{-3}	L_{-2}	L_{-1}	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	...

Fonte: Hoggat & Venner (1969, p. 27).

Por outro lado, deparamos ainda um esquema hodierno semelhante, cuja autoria é de Stakhov & Aranson (2011), em que os referidos autores discutem uma propriedade de simetria, observada há décadas, por exemplo, identificada por $f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n$, com $n\geq 0$ (BROUSSEAU, 1965). Por outro lado, mesmo que Stakhov e Rozin discutam a propriedade anterior, seu contexto de abordagem é distinto da situação comentada por Hoggat & Vernner (1969). Com efeito, os mesmos apresentam os *lambda* números de Fibonacci, que denotam por $f_\lambda(n)$, a partir da seguinte regra: (**) $\begin{cases} f_\lambda(n+2)=\lambda\cdot f_\lambda(\mathrm{n}+1)+f_\lambda(\mathrm{n}) \\ f_\lambda(\mathrm{n})=0, f_\lambda(1)=1, \lambda\in \mathrm{IR}^+ \end{cases}$. E, de imediato, depreendemos que, no caso particular $\lambda=1$, inferimos a ocorrência de $f_\lambda(\mathrm{n})=f_n$ o que resulta nossa sequência preliminar.

Figura 3 - Descrição dos números de Fibonacci e Lucas “extendidos”, isto é, com índices inteiros.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	−1	2	−3	5	−8	13	−21	34	−55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
L_{-n}	2	−1	3	−4	7	−11	18	−29	47	−76	123

Fonte: Stakhov & Aranson (2011, p. 79)

Por outro lado, desde que dedicamos atenção aos modos de generalização do modelo de reprodução ideal de coelhos, assinalamos uma perspectiva epistemológica delimitada, ou ainda, uma demarcação de gênese epistemológica, a partir do excerto que segue:

> uma nova classe de funções hiperbólicas baseadas na razão áurea poderá indicar duradouras consequências para o futuro da Matemática, Física, Biologia e Cosmologia. Em primeiro lugar, as funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas, as quais, representam uma extensão das fórmulas de Binnet, no caso dos números de Fibonacci e de Lucas, segundo um domínio contínuo, transformam a teoria dos números de Fibonacci numa teoria “contínua” porque, cada identidade para as funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas possuem analogia discreta com a categoria dos números de Fibonacci e de Lucas [...] (STAKHOV & ROZIN, 2005, p. 388)

Pois bem, Stakhov & Rozin descrevem os elementos de ordem formal e, por não dizer, informal, que concorreram na concepção e o estabelecimento de definições formais e a conceptualização de um novo objeto conceitual nominado pelos mesmos como funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas. Antes, porém, uma pequena digressão à respeito da fórmula que permite a descrição explícita dos elementos definidos, preliminarmente, pela relação não explícita que apontamos em (*).

Apresentada com alguma imprecisão histórica pelos autores de livros de História da Matemática, a fórmula de Binnet, ou fórmula de De Moivre, ou ainda fórmula de Bernoulli ou de Lamé (LUCAS, 1877, TATTERSALL, 2005) é, de modo standard, descrita por $f_n = \frac{\phi^n - \beta^n}{\phi - \beta}$, aonde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ e $\phi^{-2} = 1 - \phi^{-1}$. Por outro lado, descrições menos discutidas e registradas nos compêndios de HM, podem ainda ser caracterizadas por $f_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k-1}{k}$ (LUCAS, 1877) ou $f_n = \frac{\alpha^{2n} - \cos(n\pi) + isen(n\pi)}{(\alpha - \beta) \cdot \alpha^n}$ (DE BRUIJN, 1974). Ou ainda, pelas seguintes expressões $f(z) = \frac{\alpha^z - \alpha^{-z} \cdot \cos(\pi z)}{\sqrt{5}}$ (PARKER, 1968) e $f_n = 2^{n-2}\left[\frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos^n\left(\frac{3\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) sen\left(\frac{3\pi}{5}\right)}\right]$ (DEBNATH, 2011, p. 363), com a condição de $n \in Z$, em todos os casos.

Diante de várias caracterizações que encontramos, inclusive em manuscritos da década de 60, e de modo recente em Stakhov & Rosin (2005, p. 678), quando acentuam que “a fórmula de Binnet constitui a base para a introdução das funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas”. Não obstante, a caracterização indicada pelos autores é definida por $f_n = \frac{\phi^n - (-1)^n \phi^{-n}}{\sqrt{5}}$, com $n \in Z$. E, podemos ainda comentar que se assemelha bastante com a definição adotada por Filliponi (1993, p. 307 – 308), quando indica $F_x = \frac{\left[\alpha^x - f(x) \cdot \alpha^{-x}\right]}{\sqrt{5}}$, aonde temos função que satisfaz $f(x+1) = -f(x)$. E, além disso, verificamos a relação fundamental $F_{x+2}=F_{x+1}+F_x$, de maneira que $f(\mathrm{n})=(-1)^n, n\in IN$. Por outro lado, cabe assinalar as semelhanças da maior parte dos casos anteriores, com as clássicas funções hiperbólicas, que, costumeiramente, são descritas por $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\mathrm{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Dessa forma, no próximo segmento, trazemos um conjunto de definições matemáticas que poderiam constituir, no que concerne ao processo de formação inicial de professores, tópico merecedor de divulgação no *locus* acadêmico, tendo em vista pertencer ao processo de evolução contínua de um modelo originado há séculos atrás.

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS DE FIBONACCI – FHF

Na seção anterior abordamos, sem maiores pormenores, a diversidade de extensões e generalizações abstratas de um modelo originalmente significado da reprodução ideal (a morte dos coelhos é desconsiderada) de pares de coelhos.

Stakhov & Aranson (2011, p. 75) sublinham que "infelizmente, os matemáticos dos séculos XIX e XX não conseguiram avaliar os verdadeiros valores das fórmulas de Binnet, embora tais fórmulas detivessem um elemento indicador de descoberta importante – Funções Hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas". Por outro lado, Stakhov & Aranson registram que, no ano de 1984, o matemático russo Alexey Stakhov publicou um livro intitulado The book of codes and Golden proportion (O livro dos códigos e da razão proporcional). Neste livro, Stakhov & Aranson (2011, p. 75) explicam que "as fórmulas de Binnet são apresentadas de uma forma, pouco usual na literatura científica".

Apesar de não assumirmos posição concorde com esses autores, consideramos as formulações exploradas por A. Stakhov, da seguinte forma:

$$F(n)=\begin{cases}\dfrac{\phi^n+\phi^{-n}}{\sqrt{5}}, n=2k+1\\ \dfrac{\phi^n-\phi^{-n}}{\sqrt{5}}, n=2k\end{cases} \text{ e } \mathrm{L}(n)=\begin{cases}\phi^n+\phi^{-n}, n=2k\\ \phi^n-\phi^{-n}, n=2k+1\end{cases}.$$

Um pouco mais adiante, Stakhov & Aranson indicam um ideia fundamental de relacionar, por analogia, com os modelos descritos por $F(n)$ e $\mathrm{L}(n)$, com as respectivas funções hiperbólicas, que conhecemos por $senh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ e $\cos h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Por tal via, Stakhov & Aranson (2011, p. 75) comentam que as fórmulas que indicamos por $F(n)$ e $\mathrm{L}(n)$ podem ser concebidas como uma espécie de nova classe de funções hiperbólicas.

Stakhov & Rozin (2005, p. 381) abordam as seguintes funções (***): $senhF(x)=\frac{\phi^{2x}-\phi^{-2x}}{\sqrt{5}}$ (seno hiperbólico de Fibonacci), $\cos hF(x)=\frac{\phi^{2x}+\phi^{-2x}}{\sqrt{5}}$ (cosseno hiperbólico de Fibonacci), $senhL(x)=\phi^{2x+1}-\phi^{-(2x+1)}$ (seno hiperbólico de Lucas), $\cos hL(x)=\phi^{2x}+\phi^{-2x}$ (cosseno hiperbólico de Lucas). Ora, as relações íntimas com as sequências numéricas expressas, por exemplo, na figura 3, podem ser divisadas e compreendidas, na medida em que, Stakhov & Rozin registram que $senhF(2\mathrm{k})=f_{2k}$, $\cos hF(2\mathrm{k}+1)=f_{2k+1}$, $senhL(\mathrm{k})=L_{2k+1}$ e $\cosh L(\mathrm{k})=L_{2k}$, com índices inteiros.

Vale recordar que Stakhov (2009, p. 265) se refere às descrições que indicamos em (***) por "strong definitions". E, no que concerne a igualdade do tipo $senhF(2\mathrm{k})=f_{2k}$, para $k\in Z$, Stakhov

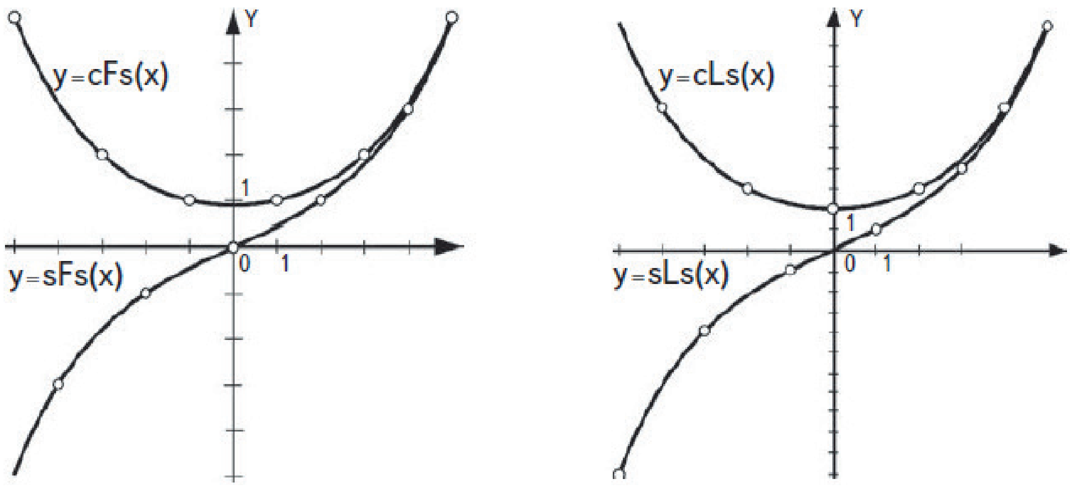
(2009, p. 265) explica seu significado quando conclui que “as funções extendidas de Fibonacci e de Lucas coincidem com as funções hiperbólicas em pontos discretos”.

Stakhov (2009, p. 265 – 266) prossegue em seu raciocínio quando escreve, de acordo com as definições (***): $tghF(x)=\frac{senhF(x)}{\cos hF(x)}=\frac{\phi^{2x}-\phi^{-2x}}{\phi^{2x}+\phi^{-2x}}=\frac{\phi^{2x+1}\left(\phi^{4x}-1\right)}{\phi^{2x}(\phi^{4x+2}+1)}=\frac{\phi\left(\phi^{4x}-1\right)}{(\phi^{4x+2}+1)}$. E, de modo semelhante, define ainda que $cotghF(x)=\frac{\cos hF(x)}{senhF(x)}=\frac{\phi^{4x+2}+1}{\phi(\phi^{4x}-1)}$. Enfim, seguindo uma definição semelhante ao caso das funções trigonométricas, se torna natural esperar ainda que: $tghL(x)=\frac{senhL(x)}{\cosh L(x)}=\frac{\phi^{4x+2}-1}{\phi(\phi^{4x}+1)}$ e $cotghL(x)=\frac{\cos hL(x)}{\text{senh}\, L(x)}=\frac{\phi(\phi^{4x}+1)}{\phi^{4x+2}-1}$.

Depreendemos algumas propriedades a partir das definições anteriores. Nesse sentido, verificamos, facilmente, que vale a condição de simetria $senhF(-x)=\frac{\phi^{2(-x)}-\phi^{-2(-x)}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{-2x}-\phi^{2x}}{\sqrt{5}}=-\frac{\phi^{2x}-\phi^{-2x}}{\sqrt{5}}=-senhF(x)$ e que $senhF(0)=\frac{\phi^{0}-\phi^{-0}}{\sqrt{5}}=0$. Ademais, vemos que $\cos hF(x)=\frac{\phi^{2x}+\phi^{-2x}}{\sqrt{5}}>0$, para todo $x\in IR$. Não obstante, os autores deparam algumas deficiências nas funções definidas há pouco, sobretudo algumas indicadas no comportamento de ausência de simetria nos gráficos.

Pouco mais adiante, com a intenção de evitar determinados entraves epistemológicos e lógicos, Stakhov & Rozin (2005, p. 381) definem uma nova função, nominada agora por seno hiperbólico simétrico de Fibonacci e o cosseno hiperbólico simétrico de Fibonacci, por intermédio da seguinte notação: $senhFs(x)=\frac{\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}$, $\cosh Fs(x)=\frac{\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}$. De modo similar, definem a função seno hiperbólico simétrico de Lucas e o cosseno hiperbólico simétrico de Lucas, por intermédio da seguinte notação: $senhLs(x)=\phi^{x}-\phi^{-x}$, $\text{coshL}\, s(x)=\phi^{x}+\phi^{-x}$. Com arrimo na figura 4, divisamos agora um comportamento geométrico de simetria perseguido no estabelecimento das definições de $senhLs$ e $\text{coshL}\, s$.

Figura 4 - Visualização do comportamento geométrico da simetria de uma classe de funções formuladas na década de 80, por Alexey Stakhov.



Fonte - Stakhov (2009, p. 278)

Stakhov (2009, p. 261) desenvolve atenção especial a um tópico relativo à evolução e aplicação de funções hiperbólicas. Para tanto, o autor discute, inclusive, a formulação de determinadas teorias em Física, tendo como influência o modelo hiperbólico. Por outro lado, Stakhov (2009, p. 277), ressalva a necessidade de definição das funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas, de acordo com o parágrafo anterior, na medida em que, as originais funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas (***) não gozam de determinadas propriedades, tais como: $senh(-x) = -senh(\mathrm{x})$ e $\cos h(-x) = \cos h(\mathrm{x})$.

Em todo caso, na próxima seção, discutiremos identidades envolvendo $senhFs$ e $\cosh Fs$ e, demonstraremos que podem ser obtidas identidades semelhantes ao caso discreto, ou seja, ao modelo envolvendo identidades de Fibonacci, para índices naturais e, em consonância com a definição (**), para o caso $\lambda = 1$.

TEOREMAS E PROPRIEDADES RELACIONADAS COM A CLASSE FHF

Nesta seção trazemos, de modo pormenorizado, algumas propriedades discutidas por Stakhov & Rozin (2005) e Stakhov (2009), relacionadas com as definições das funções definidas na seção anterior. Enunciamos, desse modo, nosso primeiro teorema.

Teorema 1: Considerando as funções $senhFs(x)$, $\cosh Fs(x)$, verificamos as seguintes propriedades: (i) $senhFs(x+2) = \cos hFs(x+1) + senhFs(x)$; (ii) $\cos hFs(x+2) = senhFs(x+1) + \cos hFs(x)$.

Demonstração: De modo preliminar, consideraremos a seguinte expressão

$$\cos hFs(x+1) + senhFs(x) = \frac{\phi^{x+1} + \phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^x - \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{x+1} + \phi^{-(x+1)} + \phi^x - \phi^{-x}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{(\phi^x\phi^1 + \phi^x) + (\phi^{-x}\phi^{-1} - \phi^{-x})}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x(\phi+1) - \phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}} \overset{\phi^{-2}=1-\phi^{-1}}{=} \frac{\phi^x(\phi^2) - \phi^{-x}(\phi^{-2})}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\phi^{x+2} - \phi^{-(x+2)}}{\sqrt{5}} = senhFs(x+2) \quad \text{(i)}$$

E, de modo similar, verificamos propriedade semelhante quando desenvolvemos

$$senhFs(x+1) + \cos hFs(x) = \frac{\phi^{x+1} - \phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^x + \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{x+1} - \phi^{-(x+1)} + \phi^x + \phi^{-x}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\phi^{x+1} + \phi^x - \phi^{-(x+1)} + \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x(\phi+1) + \phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x(\phi^2) + \phi^{-x}(\phi^{-2})}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{x+2} + \phi^{-(x+2)}}{\sqrt{5}}$$

Isto é, encontramos a igualdade $senhFs(x+1) + \cos hFs(x) = \cos hFs(x+2)$. Vejamos, pois, relação semelhante no teorema seguinte.

Teorema 2: Considerando as funções $senhL(x)$ e $\cosh L(x)$, verificamos as seguintes propriedades: (i) $senhLs(x+2) = \cosh Ls(x+1) + senhFs(x)$; (ii) $\cosh Ls(x+2) = senhLs(x+1) + \cosh Ls(x)$.

Demonstração: Para tanto, consideremos a seguinte expressão em (i)

$$\cosh Ls(x+1) + senhFs(x) = \frac{\phi^{x+1} + \phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^x - \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{x+1} + \phi^{-(x+1)} + \phi^x - \phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x\phi + \phi^x - \phi^{-x} + \phi^{-x}\phi^{-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\phi^x(\phi+1) - \phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x(\phi+1) - \phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x(\phi^2) - \phi^{-x}(\phi^{-2})}{\sqrt{5}} = senhLs(x+2).$$

E, pelo mesmo motivo, apreciamos o item (ii), da seguinte forma:

$$senhLs(x+1)+\cosh Ls(x)=\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}+\frac{\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}+\phi^{x}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\phi^{x+1}+\phi^{x}-\phi^{-(x+1)}+\phi^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(1+\phi)-\phi^{-x}(1-\phi^{-1})}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{x}(\phi^{2})+\phi^{-x}(\phi^{-2})}{\sqrt{5}}=\cosh Ls(x+2)$$

Nos resultados subsequentes, proporcionamos ao leitor a apreciação de propriedades largamente discutidas por autores de livros de HM e que continuam sendo verificadas no modelo hiperbólico proposto por Alexey Stakhov.

Teorema 3: A fórmula de Cassini (KOSHY, 2007, p. 133) descrita por $f_n^2-f_{n+1}f_{n-1}=(-1)^{n+1}$ é válida para funções hiperbólicas simétricas. Em outras palavras, valem as seguintes identidades: (i) $\left(senhFs(x)\right)^2-\left(\cos hFs(x+1)\right)\left(\cos hFs(x-1)\right)=(-1)$; (ii) $\left(\cos hFs(x)\right)^2-\left(senhFs(x+1)\right)\left(senhFs(x-1)\right)=(-1)$.

Demonstração: Para tal verificação, Stakhov & Rozin (2005, p. 384) escrevem

$$\left(senhFs(x)\right)^2-\left(\cos hFs(x+1)\right)\left(\cos hFs(x-1)\right)=\left(\frac{\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{\phi^{x+1}+\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\phi^{x-1}+\phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{\phi^{2x}-2+\phi^{-2x}-\left(\phi^{2x}+\phi^{2}+\phi^{-2}+\phi^{-2x}\right)}{5}=\frac{-2-\phi^{2}-\phi^{-2}}{5}=\frac{-2-\phi-1-1+\phi^{-1}}{5}\overset{\phi^{-1}-\phi=-1}{=}\frac{-4+(\phi^{-1}-\phi)}{5}=-1$$

E, com origem no mesmo argumento, inferimos que valem

$$\left(\cos hFs(x)\right)^2-\left(senhFs(x+1)\right)\left(senhFs(x-1)\right)=\left(\frac{\phi^{x}-\phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{\phi^{x+1}-\phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\phi^{x-1}+\phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{\phi^{2x}-2+\phi^{-2x}-\left(\phi^{2x}+\phi^{2}+\phi^{-2}+\phi^{-2x}\right)}{5}=\frac{\phi^{2x}-2+\phi^{-2x}-\phi^{2x}-\phi^{2}-\phi^{-2}-\phi^{-2x}}{5}=\frac{-2-\phi^{2}-\phi^{-2}}{5}$$

$$=\frac{-2-(1+\phi)-(1-\phi^{-1})}{5}=\frac{-2-1-\phi-1+\phi^{-1}}{5}=\frac{-4-1}{5}=-1$$

No enunciado do próximo teorema, abordamos relações envolvendo a Sequência de Lucas, Apesar de não constituir maior interesse, estabelecemos no teorema 4, resultado que pode proporcionar ulteriores investigações, para o caso das funções hiperbólicas de Lucas que denotamos por $senhLs$ e $\cos hLs$.

Teorema 4: A fórmula descrita por $L_n^2-2(-1)^n=L_{2n}$ é válida para funções hiperbólicas simétricas de Lucas, por meio das seguintes identidades: (i) $\left(senhLs(x)\right)^2+2=\cos hLs(2x)$; (ii) $\left(\cos hLs(x)\right)^2-2=\cos hLs(2x)$

Demonstração: De fato, basta notar que ocorre que $\left(senhLs(x)\right)^2+2=\left(\phi^{x}-\phi^{-x}\right)^2+2=\phi^{2x}+\phi^{-2x}-2\phi^{x}\phi^{-x}+2=\phi^{2x}+\phi^{-2x}=\cos hLs(2x)$. E, de imediato, obteremos também que $\left(\cos hLs(x)\right)^2-2=\left(\phi^{x}+\phi^{-x}\right)^2-2=\phi^{2x}+\phi^{-2x}=\cos hLs(2x)$.

No teorema 5, logo em seguida, abordamos uma relação recorrentemente discutida pelos autores de livros de HM, pelo fato de proporcionar a demonstração da fórmula de Binnet para o caso da Sequência de Lucas.

Teorema 5: A fórmula descrita por $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$, para $n \in Z$ (HOGGAT & VERNNER, 1969, p. 23) possui um fórmula equivalente para as funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas, descritas por: (i) $\cosh Fs(x+1) + \cosh Fs(x-1) = \cos hLs(x)$; (ii) $\operatorname{senh} Fs(x+1) + sen\,\mathrm{h}\, Fs(x-1) = senhLs(x)$.

Demonstração: Com efeito, escrevemos $\cosh Fs(x+1) + \cosh Fs(x-1) =$

$$= \frac{\phi^{x+1} + \phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{x-1} - \phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x \phi + \phi^{-x}\phi^{-1} + \phi^x \phi^{-1} - \phi^{-x}\phi}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x(\phi + \phi^{-1}) + \phi^{-x}(\phi^{-1} - \phi)}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x\sqrt{5} + \phi^{-x}\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$= \phi^x + \phi^{-x} = \cosh L(x)$$

Segue o resultado que indicamos em (i). Por outro lado, em relação ao item (ii), vemos ainda que

$$\operatorname{senh} Fs(x+1) + sen\,\mathrm{h}\, Fs(x-1) = \frac{\phi^{x+1} - \phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{x-1} - \phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{x+1} - \phi^{-(x+1)} + \phi^{x-1} - \phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\phi^x\phi - \phi^{-x}\phi^{-1} + \phi^x\phi^{-1} - \phi^{-x}\phi}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x(\phi + \phi^{-1}) - \phi^{-x}(\phi^{-1} + \phi)}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^x\sqrt{5} - \phi^{-x}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \phi^x - \phi^{-x} = senhLs(x)$$

Teorema 6: As fórmulas $f_n + f_{n+1} = 2f_{n+1}$ e $f_{2n} = f_n L_n$ (BROUSSEAU, 1965, p. 14), para $n \in Z$, possuem descrições equivalentes em termos das funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas. Isto é, valem as relações: (i) $\cosh Fs(x+1) + sen\,\mathrm{h}\, Fs(x-1) = \mathrm{coshL(x)}$; (ii) $\operatorname{senh} Fs(x+1) + sen\,\mathrm{h}\, Fs(x-1) = sen\,\mathrm{hL(x)}$; (iii) $\operatorname{senh} Fs(2x) = \cosh Fs(x) \operatorname{senh} Fs(x)$.

Demonstração: De fato, vemos que se verifica que

$$\cosh Fs(x+1) + sen\,\mathrm{h}\, Fs(x-1) = \frac{\phi^{x+1} + \phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{x-1} - \phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{x+1} + \phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}}.$$

No que concerne ao item (iii), vejamos que

$$\operatorname{senh} Fs(2x) = \frac{\phi^{2x} - \phi^{-2x}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\phi^x - \phi^{-x}\right)\left(\phi^x + \phi^{-x}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\phi^x - \phi^{-x}\right)}{\sqrt{5}}\left(\phi^x + \phi^{-x}\right) = senhF(x) \cdot \cosh L(x)$$

No que concerne aos próximos teoremas, Stakhov & Rozin (2005, p. 384) acentuam que "as representações simétricas das funções hiperbólicas de Fibonacci e de Lucas possuem propriedades similares à classe de funções hiperbólicas clássicas". De acordo com tal perspectiva, enunciamos o próximo teorema.

Teorema 7: A relação clássica conhecida como $\cosh(x)^2 - senh(x)^2 = 1$ é válida, também, no caso das funções hiperbólicas simétricas de Fibonacci e de Lucas.

Demonstração: De fato, notamos que decorre a seguinte igualdade

$$\mathrm{coshFs}(x)^2 - senhFs(x)^2 = \left(\frac{\phi^x + \phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{\phi^x - \phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{\phi^{2x} + \phi^{-2x} + 2\phi^x\phi^{-x} - \left(\phi^{2x} + \phi^{-2x} - 2\phi^x\phi^{-x}\right)}{5}$$

$$= \frac{\phi^{2x} + \phi^{-2x} + 2\phi^x\phi^{-x} - \phi^{2x} - \phi^{-2x} + 2\phi^x\phi^{-x}}{5} = \frac{\phi^{2x} + \phi^{-2x} + 4 - \phi^{2x} - \phi^{-2x}}{5} = \frac{4}{5}$$

Portanto, inferimos que $\cosh Fs(x)^2 - senhFs(x)^2 = \frac{4}{5}$, para todo $x \in IR$. E, por analogia, Stakhov acentua a seguinte verificação para o caso da função simétrica hiperbólica de Lucas, para pela $\forall x \in IR$, a seguinte via de dedução $\cosh Ls(x)^2 - senhLs(x)^2 = \left(\phi^x + \phi^{-x}\right)^2 - \left(\phi^x - \phi^{-x}\right)^2 = \phi^{2x} + \phi^{-2x} + 2 - \left(\phi^{2x} + \phi^{-2x} - 2\right) = 4$.

Trazemos para o leitor um quadro resumido apresentado por Stakhov (2009), com a intenção precípua de proporcionar um entendimento das relações conceituais entre o modelo de Fibonacci e de Lucas original, com o modelo resultante das definições originadas a partir da analogia inspirada na classe de funções hiperbólicas, detalhadamente descritas num excerto que abordamos na segunda seção. Assinalamos que sua dedução formal, com semelhança aos casos aqui discutidos nos teoremas, não exigem conhecimentos que extrapolam saberes científicos matemáticos de um curso de graduação em Matemática.

Convidamos ao leitor para examinar outras relações exibidas em Traszka (1996). Em sua discussão vislumbramos distinguidas aplicações da classe de funções aqui discutidas, no domínio da Física e em modelos da Philotaxia (STAKHOV, 2009, p. 307). Ademais, observamos que as fórmulas discutidas por Stakhov (2009, p. 284), para os processos de diferenciação e integração não constituirão objeto de nossa discussão e se inserem num bojo de investigações ulteriores.

Figura 5 - Apresentação de uma síntese de várias relações conceituais estabelecidas entre os dois modelos matemáticos.

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$	$sFs(x+2) = cFs(x+1) + sFs(x)$	$cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x)$
$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$	$sLs(x+2) = cLs(x+1) + sLs(x)$	$cLs(x+2) = sLs(x+1) + cLs(x)$
$F_n = (-1)^{n+1} F_{-n}$	$sFs(x) = -sFs(-x)$	$cFs(x) = cFs(-x)$
$L_n = (-1)^n L_{-n}$	$sLs(x) = sLs(-x)$	$cLs(x) = -cLs(-x)$
$F_{n+3} + F_n = 2F_{n+2}$	$sFs(x+3) + cFs(x) = 2cFs(x+2)$	$cFs(x+3) + sFs(x) = 2sFs(x+2)$
$F_{n+3} - F_n = 2F_{n+1}$	$sFs(x+3) - cFs(x) = 2sFs(x+1)$	$cFs(x+3) - sFs(x) = 2cFs(x+1)$
$F_{n+6} - F_n = 4F_{n+3}$	$sFs(x+6) - cFs(x) = 4sFs(x+3)$	$cFs(x+6) - sFs(x) = 4cFs(x+3)$
$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$	$\left[sFs(x)\right]^2 - cFs(x+1)cFs(x-1) = -1$	$\left[cFs(x)\right]^2 - sFs(x+1)sFs(x-1) = 1$
$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$	$cFs(2x+1) = \left[cFs(x+1)\right]^2 + \left[sFs(x)\right]^2$	$sFs(2x+1) = \left[sFs(x+1)\right]^2 + \left[cFs(x)\right]^2$
$L_n^2 - 2(-1)^n = L_{2n}$	$\left[sLs(x)\right]^2 + 2 = cLs(2x)$	$\left[cLs(x)\right]^2 - 2 = cLs(2x)$
$L_n + L_{n+3} = 2L_{n+2}$	$sLs(x) + cLs(x+3) = 2sLs(x+2)$	$cLs(x) + sLs(x+3) = 2cLs(x+2)$
$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$	$sLs(x+1)sLs(x-1) - \left[cLs(x)\right]^2 = -5$	$cLs(x+1)cLs(x-1) - \left[sLs(x)\right]^2 = 5$
$F_{n+3} - 2F_n = L_n$	$sFs(x+3) - 2cFs(x) = sLs(x)$	$cFs(x+3) - 2sFs(x) = cLs(x)$
$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$	$sLs(x-1) + sLs(x+1) = 5sFs(x)$	$cLs(x-1) + cLs(x+1) = 5cFs(x)$
$L_n + 5F_n = 2L_{n+1}$	$sLs(x) + 5cFs(x) = 2cLs(x+1)$	$cLs(x) + 5sFs(x) = 2sLs(x+1)$
$L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5F_{2n+1}$	$\left[sLs(x+1)\right]^2 + \left[cLs(x)\right]^2 = 5cFs(2x+1)$	$\left[cLs(x+1)\right]^2 + \left[sLs(x)\right]^2 = 5sFs(2x+1)$

Fonte: Stakhov (2009, p. 282)

Antes de concluir esta seção, assinalamos ainda a sequência dos lambda Fibonacci números, que admitem uma descrição atualizada, segundo a discussão conduzida por Falcón & Plaza (2008, p. 409). Para tanto, eles encontram a equação característica de fórmula de recorrência que discutimos em (**), e escrevem funções mais gerais que indicam por $senhf_{\lambda}(x) = \frac{\phi_k^{2x} - \phi_k^{-2x}}{\sqrt{\lambda^2 + 4}}$ e o $\cos hf_{\lambda}(x) = \frac{\phi_k^{2x} + \phi_k^{-2x}}{\sqrt{\lambda^2 + 4}}$ que representam o seno hiperbólico de uma lambda sequência de Fibonacci (respectivamente, cosseno hiperbólico de uma lambda sequência de Fibonacci). Ou ainda o estudo de Stakhov & Rozin (2005, p. 678) aonde encontramos outra formula oriunda da mesma derivação da fórmula de Binnet, nomeada neste caso por função quase-seno de Fibonacci (quasi-seno Fibonacci function), definida por $ff(x) = \frac{\phi^x - \cos(\pi x) \cdot \phi^{-x}}{\sqrt{5}}$ que, mais uma vez, descreve correlação direta com a sequência $(f_n)_{n \in IN}$, para $ff(\text{n}) = \frac{\phi^n - \cos(\pi n) \cdot \phi^{-n}}{\sqrt{5}}$, o que produz a sequência numérica original, como podemos apreciar no artigo de De Bruijn (1974), da década de 70.

Com origem nessas últimas informações, a partir de uma análise açodada, determinados aspectos podem passar desapercebidos como, por exemplo, a própria evolução e complexificação das notações e simbologias que abordamos ao longo do trabalho, tais como: $(f_n)_{n \in IN}$, $(f_n)_{n \in Z}$, $(f(x))_{x \in IR}$, $senhF(x)$, $\cos hF(x)$, $senhFs(x)$, $\cos hFs(x)$, $(senhf_{\lambda}(x))_{\lambda \in IR}$, $(\cos hf_{\lambda}(x))_{\lambda \in IR}$ e $ff(x)$. Tal fato não pode prescindir de um análise histórico-epistemológica (QUARESMA, 2009, p. 19) relacionada com o modelo de Fibonacci. Desconsideraremos, por exemplo, a abordagem matricial, encontrada em Stakhov (2005) e que pode ser observada, também, desde os anos 60.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Decididamente, o objeto matemático discutido ao decurso do presente escrito envolve elementos que mereceriam maior divulgação num âmbito da formação inicial de professores. Seu valor didático pedagógico se mostra indubitável, na medida em que, proporciona uma visão e percepção epistemológica de um modelo matemático, originado há séculos atrás mas, que, preserva seu vigor científico e mantém o interesse de inúmeros estudiosos.

Assim, mostramos que o modelo, de apelo biológico inclusive, concebido por Leonardo Pisano, se mantém em evolução, sistematização e generalização (STAKOV, 2006), sob égide de um profusão de caracterizações e definições matemáticas, erigidas por matemáticos profissionais, sobretudo, com maior publicização no *locus* acadêmico, a partir dos anos 60 e 70, visto que, encontramos na *internet* periódicos que permitem a convergência de investigações de alto nível como, por exemplo, o periódico *The Fibonacci Quarterly*, fundado em 1963 (GULLBERG, 1997, p. 243; POSAMENTIER & LEHMANN, 2007, p. 28; STAKHOV, 2009, p. 130), por um grupo de matemáticos americanos o que permitiu e disseminação de eventos envolvendo a História da Teoria dos Números de Fibonacci (STAKHOV, 2009, p. 130), e na fig. 6 vemos os fundadores.

Figura 6 - Imagens dos matemáticos americanos fundadores do periódico The Fibonacci Quartely.

Alfred Brousseau (1907-1988) Verner Emil Hoggatt (1921-1981)

Fonte: Stakhov (2009, p. 130 - 131)

Por fim, não podemos deixar de envidar esforços nos sentido da aquisição de concepções adequadas e o enriquecimento do processo de representação (QUARESMA, 2009, p. 161) para os futuros professores de Matemática. E, o tema aqui discutido fortalece uma perspectiva de entendimento de um processo epistemológico não estático e de caráter ubíquo de um sequência homogênea recorrente linear em Matemática Pura, descrita, de modo standard, pela relação $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$, para $\forall n \in IN$, e que preserva seu vigor matemático.

Com efeito, a ideia empregada por Alexey Stakhov, em 1984, explicada ao decurso do presente escrito, comentada por Stakhov & Aranson (2011, p. 75), envolve o estabelecimento de analogias entre dois modelos e/ou definições matemáticas, extraídos inicialmente da fórmula de Binnet e das funções hiperbólicas. Ademais, os teoremas apresentados na última seção confirmam que propriedades largamente abordadas por autores de livros de HM admitem equivalência num campo numérico bem maior, a saber, no campo dos reais, embora sejam desconsiderados pelos mesmos.

Para concluir, assinalamos nossa perspectiva que se coaduna com a visão empregada por Lara (2013), na medida em que contesta o uso de conteúdos de HM, como simples instrumentos ou acessórios em sala de aula. Neste sentido, urge um entendimento dos professores em formação quanto às formas de organização intelectual, de ordem axiológica, ontológica e lógica, de conceitos científicos originados no passado.

Em outros termos, um lugar garantido para uma discussão metafórica e introdução preliminar de conceitos no contexto do ensino (ver figura 1) possui determinado valor pedagógico (ALVES & BORGES NETO, 2011). Não obstante, a possibilidade de conduzir, por intermédio de uma investigação histórica em sala de aula, nossos futuros professores, para uma perspectiva evolutiva e de complexidade crescente, inclusive notacional, se coloca de modo indissociável. Finalmente, a estruturação dos dados apresentados concorrem para a formulação de uma resposta para o nosso questionamento introduzido na introdução do presente artigo.

REFERÊNCIAS

ALVES, Francisco. R. V. & BORGES NETO, H. A existência da Sequência de Fibonacci no campo dos Inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. In: **Boletim GEPEM**. v. 1, n. 53. p. 135-140, 2011.

BARONI, Rosa, L. S; TEIXEIRA, M. V. & NOBRE, Sergio. História da Matemática em contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. In: **Boletim de Educação Matemática**, v. 25, n. 41, p. 153-171, 2011.

BERNSTEIN, Leon. A Formula for Fibonacci Numbers From a New Approach to Generalized Fibonacci Numbers. In: **The Fibonacci Quarterly**. v. 14, n. 4, November, p. 358-368, 1976.

BROUSSEAU, Brother. A. **An introducion to Fibonacci Discovery**. The Fibonacci Association. Santa Clara: California, 1965.

BROUSSEAU, Brother. A. A Fibonacci generalization. In: **The Fibonacci Quarterly**. v. 5, n. 2, April, p. 171-175, 1967.

DE BRUIJN, P. J. An Extension of Fibonacci's Sequence. In: **The Fibonacci Quarterly**. v. 12, n. 3, May, p. 251-259, 1974.

DEBNATH, Lokenath. A short history of the Fibonacci Golden numbers wth their applications. In: **International Journal Contemporary Mathematics Sciences**, v. 42, n. 3, p. 337-367, 2011.

ESTRADA, et al. **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

EVES, Howard. **An introduction to the History of Mathematics**. Third edition. New York: Holt, Hinehart and Winston, 1969.

FALCÓN, Sergio. & PLAZA, Ángel. **The k-Fibonacci Hyperbolic Functions**. In: Solutions and Fractals. n. 38, p. 409-420, 2008.

FILIPPONI, Piero. Real Fibonacci ans Lucas numbers with real subscripts. In: **The Fibonacci Quarterly**. v. 31, n. 4, October, p. 307-315, 1972.

GULLBERG, Jan. **Mathematics:** from the birth of numbers. New York: W. W. Norton & Company, 1997.

HERZ, Fischler, R. **A mathematical history of Golden Number**. New York: Dover Publications Inc., 1998.

HOGGAT, Jr. V. E. & VENNER, E. 1969. **Fibonacci and Lucas Numbers**. Santa Clara: Fibonacci Association Publishers.

KOSHY. T. **Elementary Number Theory and Applications**, second edition, Boston: ELSELVIER, 2007.

KOSHY. T. **Fibonacci and Lucas Numbers and Applications**. New York: John Willey and Sons, 2011.

LARA, Isabel, C. M. O ensino de Matemática por meio de sua História: possíveis articulações com a Etnomatemática. In: **VYDIA EDUCAÇÃO**, v. 33, n. 2, jul/dez, p. 50-62, 2013.

LUCAS, Edouard. Théorie des fonctions numérique simplement périodique. In: **America Journal of Mathematics**. p. 184-319, 1877.

NOBRE, Sergio. Leitura crítica da História: reflexões sobre a história da matemática. In: **Ciência e Educação**, v. 10, n. 3, p. 531-543, 2003.

POSAMENTIER, Alfred, S. & LEHMANN, Ingmar. 2007. **The Fabulous Fibonacci Numbers**. New York: Prometheus Books.

PARKER, F. D. A Fibonacci function. In: **The Fibonacci Quarterly**. v. 6, n. 1, February, p. 1-2, 1968.

QUARESMA, João. C. B. **Uma análise histórico epistemológica do conceito de Grupo**. (tese de doutorado). Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2009, 175f.

STAKHOV, Alexey. **The mathematics of harmony:** from Euclid to contemporary mathematics and computer science. London: World Scientific Publishers, 2009.

STAKHOV, Alexey & ARANSON, Samuil. Hiperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bornar´s Geometry, Hilbert´s Fourth Problem. In: **Applied Mathematics**. n. 2, p. 74-84, 2011.

STAKHOV, Alexey & ROZIN, Boris. On a new class of Hyperbolic Functions. In: **Solutions and Fractals**. n. 23, p. 379-389, 2005.

STAKHOV, Alexey & ROZIN, Boris. The Golden Shofar. Chaos, **Solutions and Fractals**. n. 26, p. 677-684, 2005.

STAKHOV, Alexey. Fundamentals of a new kind of mathematics based on the Golden Section. In: **Solutions and Fractals**. n. 27, p. 1124-1146, 2006.

STAKHOV, Alexey. Fibonacci matrices, a generalization of the Cassini´s formula and a new coding theory. In: **Solutions and Fractals**. n. 15, p. 1-11, 2005.

TATTERSALL, James. J. **Elementary Number Theory in Nine chapters**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

TRZASKA, Zdzislaw, W. On the Fibonacci hyperbolic trigonometry and modified numerical trianggles. **The Fibonacci Quarterly**. v. 34, n. 2, May, p. 129-139, 1996.

WALSER, Hans. **The Golden Section**. New York: The Mathematical Association of America, 2001.

RECEBIDO EM: 30jun 2015
CONCLUIDO EM: 15 ago 2015