

ENTENDIMENTOS DO CONCEITO DE VETOR POR ESTUDANTES DE ENGENHARIA *UNDERSTANDINGS ABOUT THE VECTOR CONCEPT BY ENGINEERING STUDENTS*

VIVIANE RONCAGLIO*
CATIA MARIA NEHRING**

RESUMO

Este artigo apresenta resultados da pesquisa desenvolvida no curso de Mestrado da primeira autora, com orientação da segunda, que teve por objetivo analisar registros produzidos por estudantes de Engenharia em atividades de tratamento e conversão, considerando conceitos trabalhados na disciplina de Geometria Analítica e Vetores (GAV) a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, na perspectiva da apreensão teórica do conceito de vetor e suas operações. A pesquisa foi realizada com uma turma de estudantes matriculados na disciplina de (GAV) sendo analisados exercícios, provas, registros em cadernos e atividades de monitoria. A partir das análises realizadas concluímos que os estudantes de Engenharia apresentam dificuldades em realizar conversões quando um dos registros envolvidos é o registro figural, ocorrendo também falta de entendimento em relação aos elementos de formação do vetor, falta de compreensão em relação ao sentido da operação e inexistência de atividades de aplicação de vetor como possibilidade de estabelecimento de sentido e significados.

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica. Argumento de estudantes. Conceito de vetor. Ensino em Engenharia.

ABSTRACT

This paper presents the results of a research developed during the first author Master's degree, under the orientation of the second one, which aimed to analyze the registers produced by engineering students in treatment and conversion activities, considering the concepts studied in the course of Analytical Geometry and Vectors, from the Theory of Semiotic Register of Representation, in the perspective of conceptual apprehension of vector concept and its operations. The research was conducted with a group of students enrolled in the course of Analytical Geometry and Vectors, being analyzed exercises, tests, registers in notebooks, and monitoring activities. Based on the analysis we concluded that Engineering students have difficulties in performing conversions when one of the records involved is the figural record, lack of understanding in relation to vector formation elements, lack of understanding in relation to the direction of operation, and lack of vector enforcement activities as a possibility of establishing direction and meaning.

Keywords: *Semiotic Register of Representation. Students Argument. Vector Concept. Teaching in Engineering.*

* Mestre em Educação nas Ciências. Integrante do Grupo de Estudos em Educação Matemática – GEEM, viviane.roncaglio@unijui.edu.br.

** Professora Orientadora do Programa de Pós-Graduação Mestrado e Doutorado em Educação nas Ciências – UNIJUI – DCEEng. Pesquisadora do Grupo de Estudos em Educação Matemática – GEEM, catia@unijui.edu.br.

INTRODUÇÃO

O Brasil é um país em pleno desenvolvimento, o que exige de todos os setores um número cada vez maior de profissionais capacitados. A Engenharia é uma área em que nos últimos anos vem crescendo a busca por profissionais devido, principalmente, ao constante crescimento econômico-financeiro do País. Ainda faltam, contudo, muitos profissionais nesta área. Um artigo de Marco Prates, publicado pela Revista Eletrônica Exame, em agosto de 2012, aponta três desafios que impedem o Brasil de ter mais engenheiros. De acordo com este autor, os desafios são: fazer mais gente se interessar pela Engenharia; quem optar pela Engenharia tem que ficar até o final do curso; e quem cursar e concluir Engenharia tem que visualizar carreira na área.

No primeiro desafio, “fazer mais gente se interessar pela Engenharia”, o autor destaca o PISA, um teste internacional de avaliação da educação, que aponta o baixo rendimento dos alunos em relação à Matemática, e o fato de que muitos preferem passar longe dos números. Para ele, ter mais engenheiros no Brasil significa fazer com que mais alunos deixem de temer e passem a gostar de Matemática e Física, condição básica dos cursos e da profissão de Engenharia.

No segundo desafio, “quem optar pela Engenharia tem que ficar até o final do curso”, destaca que dos estudantes que iniciam algum curso de Engenharia, 43% não chegam a concluí-lo. Ou seja, um número significativo de estudantes desiste logo nos primeiros dois semestres, justamente quando precisam enfrentar conceitos matemáticos, em disciplinas tais como Geometria Analítica e Vetores¹, Cálculo I, Álgebra Linear, Matemática Básica, e disciplinas da área de Física. Outro aspecto importante que Prates (2012) destaca é que colocar a culpa da desistência ou da reprovação desses estudantes na Educação Básica não vai resolver qualquer problema. O que precisamos fazer, enquanto professores do ensino superior é termos ações efetivas no processo de ensino, trabalhando a partir de conceitos e não na simples retomada de conteúdos, na perspectiva de enfrentamento das dificuldades apresentadas pelos estudantes que chegam à universidade, sendo uma possibilidade de enfrentar o abandono ao curso.

Prates (2012) aponta como terceiro e último desafio, “[...] quem cursar e concluir Engenharia tem que visualizar a carreira na área”, pois apenas dois em cada sete engenheiros formados, vão trabalhar na área. Este estudo indica a necessidade de repensar o processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos, ou das disciplinas de Matemática terem um processo mais efetivo que possibilite ao estudante universitário ferramentas para avançar em seus conhecimentos e seguir em frente, evitando, talvez, a desistência e a evasão do curso.

Os currículos dos cursos de Engenharia apresentam disciplinas Matemáticas que exploram conceitos fundamentais necessários à formação do engenheiro. Um desses conceitos, trabalhado em praticamente todos os cursos de Engenharia, é o de vetor, estudado nos primeiros semestres do curso. Geralmente, este conceito é explorado nas disciplinas de GAV ou de Álgebra Linear. Em nossa pesquisa, (RONCAGLIO, 2015), o conceito de vetor foi trabalhado na disciplina de GAV, na qual foram considerados elementos fundamentais mediante a utilização da estrutura vetorial no tratamento de conceitos como, segmento de reta orientada, distâncias, ângulos, áreas, volume, equação da reta e equação do plano. O conceito básico na disciplina é vetor. Tudo nela gira em torno deste conceito, ou seja, para entender o significado das operações e o motivo pelo qual se opera é de fundamental importância que o estudante o compreenda, não só na disciplina de GAV, mas também pelo fato de ser explorado em outras disciplinas no decorrer do curso e, principalmente, em situações da profissão de engenheiro.

¹ Geometria Analítica e Vetores: será utilizada a sigla GAV ao longo deste artigo.

O conceito de vetor relaciona-se ao de grandeza quando esta considera a ideia de módulo, sentido e direção. Por essa razão, apresenta-se como fundamental para os engenheiros, por exemplo, na Engenharia Civil, que entendam grandezas como força, torque e velocidade, ou seja, são grandezas vetoriais presentes no cotidiano da futura profissão. Ademais, cálculos envolvendo vetores são utilizados em situações como dimensionamento de vigas e treliças, elevadores, guindastes, carregamentos, reações de apoio, nas quais existem forças envolvidas. Na Engenharia Elétrica, o vetor é utilizado para determinar a existência de campo elétrico. Ao mover uma carga elétrica em um campo elétrico ela fica sujeita a diversas e diferentes intensidades de força elétrica. Já na Engenharia Mecânica, os conceitos básicos utilizados são espaço, tempo, massa e força que, sendo força uma grandeza vetorial, necessita, conseqüentemente, do conceito de vetor.

Vetor é um conceito essencial para a profissão do engenheiro. Estudantes desconhecem a importância de tal conceito para a sua formação, ou a sua aplicação em diferentes situações da sua profissão, e apresentam dificuldades em sua utilização, perspectiva reforçada na pesquisa de Castro (2001), Karrer (2006) e França (2007). Disciplinas de GAV e Álgebra Linear são apontadas como aquelas que contribuem para o alto índice de reprovação e desistência dos estudantes ao longo do curso de Engenharia. Estudos apontam a dificuldade que os estudantes possuem em relação a essas disciplinas, mais especificamente em relação ao conceito de vetor. Uma dessas pesquisas é a de Castro (2001). A autora, a partir de suas análises, afirma que dentre as dificuldades encontradas pelos estudantes, a maior delas consiste justamente na atividade de conversão em que um dos registros envolvidos é o registro figural. Essa dificuldade é ainda maior quando tal registro é o de chegada. Esta dificuldade pode ser compreendida a partir dos elementos teóricos dos Registros de Representação Semiótica no processo de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica², desenvolvida por Duval (2003), tem sido utilizada, principalmente, em pesquisas que visam à aquisição de conhecimento e à organização de situações de aprendizagem. O autor defende a ideia de que para o aluno aprender Matemática é preciso que ele tenha acesso a ela, e que saiba coordenar as diferentes representações provenientes de distintos registros. Segundo Castro (2001), esta teoria é uma rica contribuição às pesquisas em Educação Matemática, que tratam de aspectos do funcionamento cognitivo relacionados à aquisição de conhecimento.

As Representações Semióticas “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (Duval, 1993 apud Damm, 2012, p. 176). Para o autor, um mesmo objeto matemático pode ser representado de várias formas, ou por meio de vários sistemas. Por exemplo, uma função linear pode ser representada por uma expressão algébrica, por um gráfico, ou mesmo por uma tabela. A comunicação em Matemática ocorre por meio de representações semióticas. Desse modo, é imprescindível que ao aprendê-la, os estudantes não confundam os objetos e suas respectivas representações, pois uma coisa é o objeto matemático, e outra é a sua representação. Por exemplo, os números, as funções, as retas etc, são os objetos matemáticos, sendo suas representações, as escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, as tabelas (DUVAL, 2009, p. 14). As representações são utilizadas como suporte tanto para fins de comunicação como também para o desenvolvimento da própria atividade matemática.

Deste modo, as representações semióticas são fundamentais para que os sujeitos elaborem a construção do seu conhecimento, uma vez que elas possibilitam o desenvolvimento de funções cog-

²A partir de agora utilizaremos para designar Registro de Representação Semiótica somente RRS.

nitivas essenciais ao pensamento humano. A importância primordial das representações semióticas se deve a duas razões fundamentais:

[...] Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático – por exemplo, as operações de cálculo – dependem do sistema de representação utilizado. [...] A seguir, há o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. (DUVAL, 2003, p. 13-14).

A Teoria dos RRS considera a mobilização de uma grande variedade de representações: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, representações gráficas e língua natural. Neste sentido, Duval (2003, p. 14) enfatiza que “[...] a originalidade da atividade Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação”. Damm (2012) complementa que a apreensão conceitual dos objetos matemáticos pelo indivíduo que aprende somente é possível a partir da coordenação de diferentes registros de representação.

A compreensão da grande variedade de registros de representação utilizados em Matemática determina o seu ensino e sua aprendizagem. De acordo com Duval (2009), a aprendizagem de conceitos matemáticos constitui um campo de estudo privilegiado para análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas, e mesmo a compreensão de textos. Essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação que vão além da linguagem natural ou das imagens, ou seja: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógicas que adquirem o *status* de linguagem, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Para analisar a atividade Matemática numa perspectiva de ensino e de aprendizagem, Duval (2003) afirma ser necessária uma abordagem cognitiva sobre os dois tipos de transformações de representações, consideradas fundamentais para esta análise: os tratamentos e as conversões de registros de representações semióticas. Por meio deles é possível analisar as atividades Matemáticas desenvolvidas pelos alunos em uma situação de ensino. Duval (2003, p. 16) define os tratamentos como sendo:

[...] transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. [...] As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados; por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação a sua representação gráfica.

Complementa esta discussão, apontando que:

Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização

simultânea de dois registros é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes. (DUVAL, 2003, p. 21)

Damm (2012, p. 182) contribui ao destacar que a conversão exige do sujeito o estabelecimento da diferença entre o significado e o significante.

No ensino de Matemática, o problema se estabelece, justamente, porque só se levam em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim a coordenação entre esses vários registros de representação.

A compreensão em Matemática, portanto, implica na capacidade de os sujeitos mudarem de RRS. A dificuldade se deve ao fato de que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível. Ou seja, “o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado” (DUVAL, 2003, p. 22). Passar de um registro a outro não é somente mudar o modo de tratamento, é preciso também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Com esta teoria desenvolve-se toda a análise dos dados.

PERCURSO METODOLÓGICO

Na pesquisa desenvolvida, a centralidade foram os argumentos explicitados por estudantes de Engenharia, a partir de situações de ensino, ao conceito de vetor e suas operações, trabalhadas na disciplina GAV. Neste sentido, buscou-se aprofundar o estudo em relação ao processo de aprendizagem do conceito de vetor, objetivando analisar os registros produzidos por estudantes de Engenharia em atividades de tratamento e conversão. Considerou-se, para tanto, o conceito de vetor e suas operações e da Teoria dos RRS de Duval (2003, 2009, 2011), na perspectiva da apreensão conceitual. A problemática da pesquisa foi delimitada a partir das seguintes questões: Considerando a análise de atividades de tratamento e conversão realizadas por estudantes de Engenharia, na disciplina de Geometria Analítica e Vetores, a partir da intervenção de uma professora, o que é possível identificarmos em termos de apreensão conceitual na argumentação dos estudantes em procedimentos utilizados no desenvolvimento de questões envolvendo o conceito de vetor? A partir destes argumentos é possível identificarmos lacunas ou sustentação para a apreensão do conceito?

Os procedimentos metodológicos utilizados são caracterizados como qualitativos e configuram-se como um estudo de caso, a partir da análise de RRS produzidos por um grupo de acadêmicos de cursos de Engenharia. O ambiente natural desta pesquisa são aulas da disciplina de GAV, ministradas por uma professora de Matemática, em uma turma envolvendo os cursos de Engenharia Elétrica, Civil e Mecânica. Os instrumentos analisados neste trabalho são: questões da primeira e última avaliação, a transcrição de questões propostas em monitoria e avaliações, bem como o caderno de um estudante. A partir da análise destes instrumentos delimitaram-se os focos de análise: a conversão entre registros envolvendo o registro figural – apresenta as dificuldades dos estudantes em realizar

conversões envolvendo o registro figural na representação gráfica e geométrica; a geração do vetor – apresenta as dificuldades referentes ao entendimento do conceito de vetor e suas características de formação (módulo, sentido e direção); as operações com vetores – apresenta as dificuldades dos estudantes de Engenharia em relação ao desenvolvimento de operações com vetores, de adição, multiplicação de um escalar por vetor, produto escalar, produto vetorial e produto misto; e as situações de aplicação de vetor – apresenta a falta de entendimento dos estudantes referentes à utilização das operações com vetor em situações que exigem a mobilização das propriedades das operações.

A aula não foi preparada para a pesquisa, ela foi pesquisada, considerando os registros produzidos pelos estudantes a partir do encaminhamento da professora responsável pela disciplina. Os sujeitos que constituíram esta pesquisa são estudantes dos cursos de Engenharia Elétrica, Civil e Mecânica, matriculados na disciplina de GAV. O grupo era constituído por 34 estudantes. Este grupo, constituído pelos 34 estudantes, a partir do pré-teste foram nomeados por E1, E2, E3, E4 até E34. Importante esclarecer que ao utilizar o E1, este indicará sempre o mesmo estudante, nos diferentes instrumentos de análise.

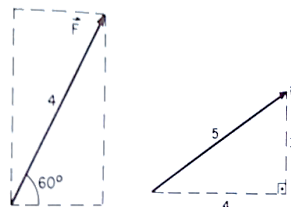
O CONCEITO DE VETOR E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

O conceito de vetor surgiu na Mecânica, em 1586, com o engenheiro Simon Stevin, mais conhecido como Arquimedes Holandês, que apresentou o problema da composição de forças e enunciou uma regra empírica para encontrar a adição de duas forças aplicadas em um mesmo ponto (VENTURI, 1949). Essa regra é conhecida como a Regra do Paralelogramo, a qual continua sustentando o atual processo de ensino. Esta regra é utilizada para desenvolver a representação geométrica da soma ou subtração de vetores quando estes possuem a mesma origem. Ou seja, consiste em colocar as origens de dois vetores coincidentes e representar um paralelogramo. O vetor resultante será dado pela diagonal do paralelogramo, cuja origem coincide com a dos outros vetores.

A seguir apresentamos a definição de vetor a partir de um dos livros da bibliografia básica utilizada na disciplina.

Quadro 1 - Definição de vetor.

Noção Intuitiva – Existem grandezas, chamadas escalares, que são caracterizadas por um número (e a unidade correspondente): 50 dm² de área, 4m de comprimento, 7kg de massa. Outras, no entanto, requerem mais do que isso. Por exemplo, para caracterizarmos uma força ou uma velocidade, precisamos dar a direção, a intensidade e o sentido:



Tais grandezas são chamadas vetoriais. Nos exemplos acima as flechas nos dão ideia exata das grandezas mencionadas. No entanto, vamos adotar o seguinte ponto de vista: duas flechas de mesmo comprimento, mesma direção, (isto é, paralelas) e mesmo sentido definem a mesma grandeza vetorial. Tais flechas são ditas equipolentes.

Formalização do conceito de vetor – Primeiramente, a definição de flecha. Flecha é, intuitivamente, um segmento no qual se fixou uma orientação. E fixar uma orientação é escolher um sentido. No caso da figura, o segmento orientado representado tem orientação de A para B. Na verdade não precisamos da flecha toda para os nossos objetivos. Bastam os pontos A e B e a ordem: primeiro A e depois B. Eis a definição:



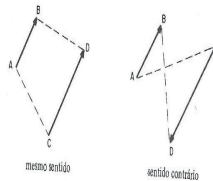
Definição 1 – Um segmento orientado é um par ordenado (A, B) de pontos do espaço. A é dito origem, B extremidade do segmento orientado. Os segmentos orientados da forma (A, A) são ditos nulos. Observe que se $AB, (A, B)$ é diferente de (B, A) .

Definição 2 – Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo comprimento se os segmentos geométricos AB e CD têm o mesmo comprimento.

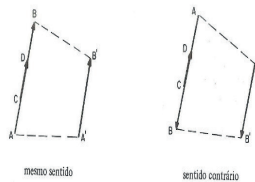
Suponha (A, B) e (C, D) não nulos. Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesma direção se $AB // CD$ (inclui o caso em que as retas suportes coincidem). Nesse caso dizemos que (A, B) e (C, D) são paralelos.

Suponha que (A, B) e (C, D) têm mesma direção.

a) Se as retas AB e CD são distintas, dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido caso os segmentos AC e BD tenham intersecção vazia. Caso $ABCD$, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.



b) Se as retas AB e CD coincidem, tome (A', B') tal que A' não pertença à reta AB e (A', B') tenha mesma direção, e mesmo sentido que (A, B) (como em a). Então dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentido contrário.



Verifique que (A, B) e (B, A) têm mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário, sendo AB .

Definição 3 – Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equipolentes, e indica-se $(A, B) \sim (C, D)$, se um dos casos seguintes ocorrer:

- a) Ambos são nulos;
 - b) Nenhum é nulo, e têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.
- Decorre da definição que “equipolente a um segmento nulo, só outro segmento nulo”.

Proposição 1: A relação de equipolência goza das seguintes propriedades:

- a) $(A, B) \sim (A, B)$ (reflexiva)
- b) $(A, B) \sim (C, D) \rightarrow (C, D) \sim (A, B)$ (simétrica)
- c) $(AB) \sim (CD)$ e $(C, D) \sim (E, F) \rightarrow (A, B) \sim (E, F)$ (transitiva³)

Considere agora um segmento orientado (A, B) fixado. Chama-se classe de equipolência de (A, B) ao conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a (A, B) (e, portanto, equipolentes entre si, pela propriedade transitiva). O próprio (A, B) é um deles, pela propriedade reflexiva. (A, B) se diz um representante da classe. Note que se (C, D) pertence à classe de equipolência de (A, B) então (A, B) pertence à classe de equipolência de (C, D) (devido à propriedade simétrica) e na verdade essas duas classes coincidem, pois quem for equipolente a (C, D) o será a (A, B) e vice-versa (propriedade transitiva). Em outras palavras, qualquer segmento orientado pertence a uma classe de equipolência e pode ser considerado seu representante, e cada segmento orientado é representante de uma única classe de equipolência.

³ Uma relação que goza das propriedades a), b) e c) se chama relação de equivalência.

Definição 4

Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados de E^3 . Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor correspondente (ou seja, o vetor cujo representante é (A, B)) será indicado por \vec{AB} . Usam-se também letras latinas minúsculas encimadas por uma seta (\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , etc), não se fazendo desse modo referência ao representante. É claro que para citarmos um vetor basta citar (ou desenhar) um qualquer de seus representantes, e pronto: o vetor estará bem determinado. O conjunto de todos os vetores será indicado por V^3 . Chamaremos vetor nulo ao vetor cujo representante é um segmento orientado nulo. Já comentamos que equipolente a um segmento nulo, só outro segmento nulo; segue-se que todos os representantes do vetor nulo são segmentos com origem e extremidade coincidentes. Indica-se o vetor nulo por $\vec{0}$.

Os vetores \vec{x} e \vec{y} não-nulos são paralelos (indica-se $\vec{x} // \vec{y}$) se um representante de \vec{x} é paralelo a um representante de \vec{y} (e portanto a todos). $\vec{x} // \vec{y}$ e \vec{x} e \vec{y} têm mesmo sentido (resp. sentido contrário) se um representante de \vec{x} e um representante de \vec{y} têm mesmo sentido (resp. sentido contrário). Consideraremos o vetor nulo paralelo a qualquer vetor.

Chamaremos norma (ou módulo, ou comprimento) de um vetor ao comprimento de qualquer um de seus representantes; indica-se a norma de x por $|\vec{x}|$. Se $|\vec{x}|=1$ dizemos que o vetor x é unitário.

Observação – De modo geral, conceitos geométricos como paralelismo, perpendicularismo, comprimento, ângulos, etc., envolvendo vetores são definidos “pondo-se a culpa nos representantes”, como foi feito acima.

O vetor (\vec{BA}) é chamado vetor oposto do vetor (\vec{AB}) . (\vec{AB}) e (\vec{BA}) só diferem no sentido (se $A \neq B$), já que seus representantes (A, B) e (B, A) têm mesma direção, mesmo comprimento e sentido contrário. O vetor oposto do vetor (\vec{AB}) é indicado também por $-(\vec{AB})$; o vetor oposto de um vetor \vec{x} é indicado por $-\vec{x}$.

Fonte: (BOULOS, 2003, p.4-6).

Existem dois tipos de grandezas, as grandezas escalares, que são aquelas grandezas definidas por um número real, como por exemplo, temperatura, massa, densidade, volume, área e comprimento, e as grandezas vetoriais, que não ficam definidas apenas por um número real. Para que essas grandezas possam ser determinadas precisamos conhecer seu módulo, ou seja, comprimento e intensidade, sua direção e seu sentido. **São exemplos de grandezas vetoriais, a velocidade, a aceleração e a força.** Ou seja, uma grandeza vetorial é um segmento de reta orientado que possui três características importantes, módulo (comprimento, tamanho do vetor), sentido (da origem para a extremidade, por exemplo, de A para B) e direção (ângulo de inclinação que o vetor forma com uma base horizontal). Essa diferença, ou melhor, suas características, são estruturantes para o entendimento do estudante quanto à compreensão do conceito de vetor.

A definição apresentada por Boulos (2003), das grandezas se organiza a partir de uma maneira bastante sucinta, apesar da importância do entendimento dessas grandezas no momento em que o estudante precisa aplicar o conceito de vetor ou uma grandeza vetorial. Existem muitas possibilidades de explorar essa diferença entre as grandezas escalares e vetoriais, que podem auxiliar o entendimento do estudante. Uma delas seria apresentar diferentes contextos que necessitam de mais de um elemento, ou seja, que explorem sentido, direção e módulo.

Outro aspecto a ser marcado da definição apresentada é em relação aos registros envolvidos. A maior parte é apresentada considerando o registro da língua natural. Os registro figural e o registro simbólico são utilizados em menor quantidade. O autor não apresenta a expressão analítica de um vetor, também fundamental para o entendimento do estudante. A expressão analítica de um vetor faz parte do tratamento do registro simbólico, muito utilizado pelos estudantes de Engenharia no desenvolvimento de atividades, pois envolve as representações das n-uplas e das combinações lineares.

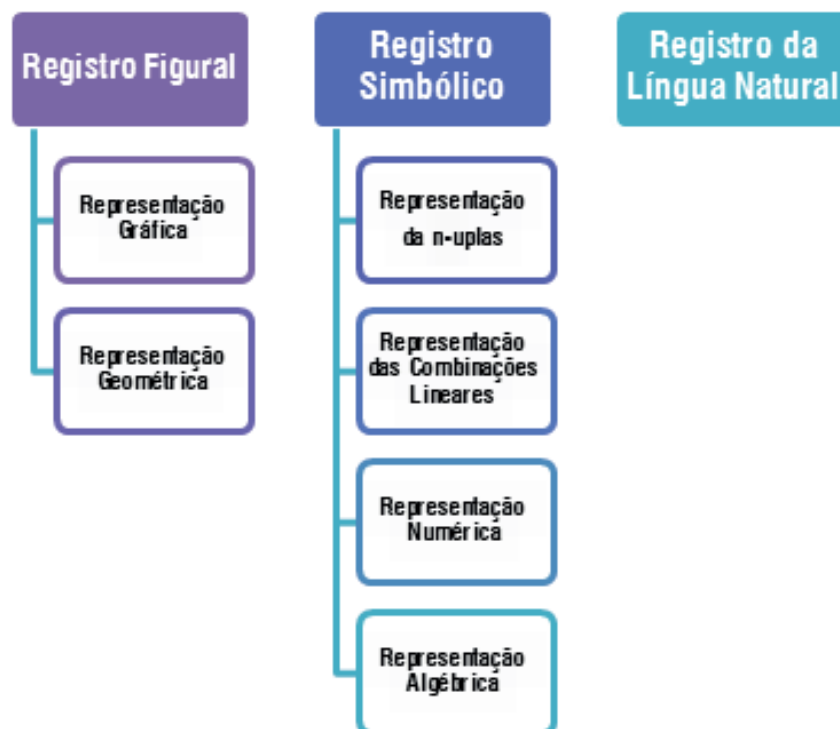
Castro (2001, p. 12), apoiada em Duval (1995), destaca que, em Matemática,

[...] as representações semióticas não são indispensáveis apenas para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da própria atividade matemática.

De fato, a possibilidade de realizar tratamentos nos objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Os tratamentos matemáticos não podem ser efetuados independentemente de um sistema semiótico de representação. [...] A utilização de representações semióticas parece primordial para a atividade matemática e parece ser intrínseca a ela.

Deste modo, dada a natureza dos objetos matemáticos, os registros de representação semiótica possibilitam o acesso a esses objetos. Duval (2003) aponta para três tipos de registros de representação semiótica: o registro figural, o simbólico e o da língua natural, cujas representações apresentam dois aspectos: a forma (representante) e o conteúdo (representado). Com base em Castro (2001) e Duval (2003), apresentam-se os registros de representação utilizados nesta pesquisa. A representação do vetor pode ser realizada de diferentes maneiras, isto é, no plano e no espaço, mas sempre por meio dos registros de representação semiótica.

Gráfico 1 - Tipos de RRS do vetor.



Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 64.

O registro de representação figural considera as representações gráficas cartesianas (ou no plano cartesiano) e a sua representação geométrica. O registro de representação simbólica possui as seguintes representações: a representação da n-uplas – expressa na forma de par ordenado e ternas; a representação das combinações lineares – expressa a partir da adição entre os vetores unitários da base canônica; a representação algébrica – expressa na forma de expressão e/ou equação algébrica, ou ainda, na forma de identificação de um vetor, como por exemplo, $(\vec{AB}), \vec{x}, \vec{u}, \vec{v}$; e a representação nu-

mérica – expressa na forma de valores numéricos. O RRS da língua natural é utilizado para descrever situações matemáticas na forma de definição, argumentação, associações verbais ou enunciados. Este tipo de registro é encontrado em livros, tanto nas definições, na descrição da resolução de questões, em teoremas, propriedades de conceitos, como nos enunciados de questões – situações-problema.

ANÁLISE DOS DADOS

Com o intuito de responder a nossa problemática de pesquisa a partir dos instrumentos de dados e do referencial teórico, delimitamos os focos de análise: a conversão entre os registros envolvendo o registro figural; a geração do vetor; as operações com vetores e situações de aplicação de vetor. Estes focos de análise foram identificados a partir da análise do pré-teste, pós-teste, listas de exercícios, registros escritos nos cadernos e atividade de monitoria.

A conversão entre os registros envolvendo o registro figural

As análises realizadas tendo como base as listas de exercícios propostos pela professora apontaram que: estes privilegiam o registro da língua natural e o simbólico. Dos 109 exercícios propostos nas listas apenas sete deles envolvem atividade de conversão com o registro figural, número não significativo se comparado à quantidade de exercícios que envolveram a conversão entre o registro da língua natural e o simbólico – 102 exercícios. A análise se efetivou a partir da identificação dos RRS de partir (enunciado do exercício) e o RRS necessário para sua resolução (Registro de Chegada). A síntese está indicada no quadro 2 a seguir.

Quadro 2 - Síntese dos registros de partida e chegada explorados nas listas de exercícios.

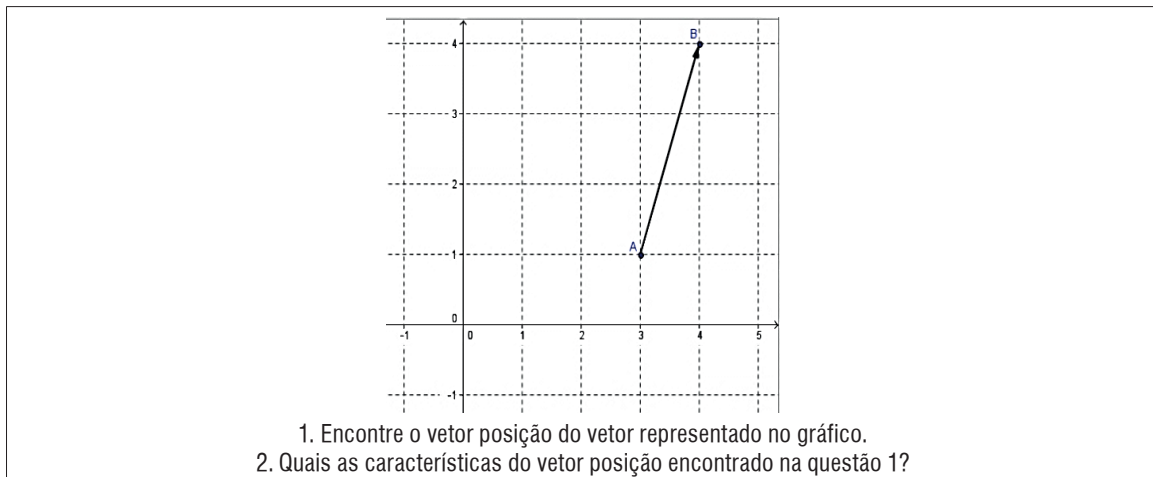
Registro de partida	Registro de chegada	Lista 1	Lista 2	Lista 3	Lista 4	Lista 5	Lista 6	Total
Língua natural e simbólico	Simbólico		27	17	17	11	28	100
Língua natural e simbólico	Língua natural				1		1	2
Língua natural, figural e simbólico	Língua natural						1	1
Língua natural, figural e simbólico	Simbólico			1				1
Língua natural, figural e simbólico	Figural	1						1
Língua natural, figural e simbólico	Língua natural	1						1
Língua natural, figural e simbólico	Simbólico	1						1
Língua natural e simbólico	Figural	2						2
Total		5	27	18	18	11	30	109

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p.98.

Considerando as análises em relação aos registros realizados pelos estudantes estes apontaram que: os estudantes não conseguiram realizar de forma satisfatória a conversão do RRS simbólico para o gráfico. Essa dificuldade apresentada pelos estudantes pode ter relação com o trabalho

desenvolvido em sala de aula, no qual a ênfase privilegiava os RRS da língua natural e o simbólico. O Quadro 4, logo abaixo, apresenta os argumentos do E3, em uma atividade de monitoria, em relação ao exercício 2 da última avaliação (Quadro 3), e aponta a dificuldade do estudante ao realizar o processo de conversão.

Quadro 3 - Questão 2 da última avaliação.



Quadro 4 - Argumentos do E3 em relação ao exercício 2 da última avaliação.

Pesquisadora: *Porque você não resolveu esta questão?*

E3: *É que tenho dificuldade para representar.*

Pesquisadora: *Mas e as características de formação de um vetor você também não sabe?*

E3: *Essas eu sei, mas não sei representar.*

Pesquisadora: *Então quais são essas características?*

E3: *Módulo, direção e sentido.*

Pesquisadora: *Isso, essas são as características de formação de um vetor, muito bom. Então porque você não apresentou essas características?*

E3: *Porque pede pra representar graficamente e isso eu não sabia fazer daí não respondi essa eu ia errar mesmo.*

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 110.

Ao analisar a argumentação do estudante que preferiu não desenvolver a questão, pois “*ia errar do mesmo jeito*”, ficou evidente a dificuldade que possui em relação ao desenvolvimento de questões que envolvem o registro figural. De acordo com a teoria dos RRS, a compreensão apenas ocorre quando o estudante for capaz de mudar de registro. Os exercícios propostos nas listas exigiam do estudante, na maioria das vezes, a conversão entre os registros da língua natural e o simbólico, sendo que o registro figural foi exigido apenas em sete dos 109 exercícios propostos. Contudo, se o estudante possui dificuldade em realizar a conversão envolvendo o registro figural, isso significa que não se apropriou do conceito. Deste modo,

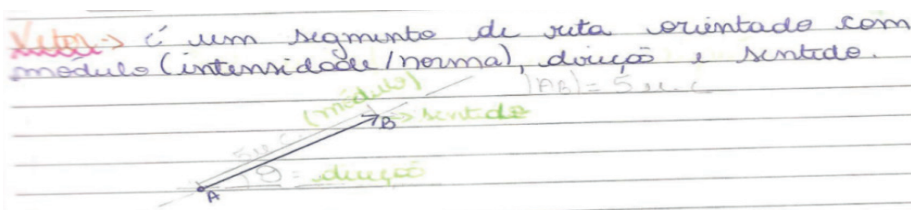
[...] as representações semióticas – ou, mais exatamente, a diversidade dos registros de representação – têm um papel central na compreensão. A compreensão requer a coordenação dos diferentes registros. Ora, uma tal coordenação não se opera espontaneamente e não é consequência de nenhuma “conceitualização” a-semiótica. A maioria dos alunos, ao longo de seu currículo, permanece aquém dessa compreensão. Daí as dificuldades recorrentes e as limitações bastante “estreitas” em suas capacidades de aprendizagem matemática. Os únicos acertos que lhes são possíveis se dão em monorregistros (registros monofuncionais), muitas vezes privados de “significado” e inutilizáveis fora do contexto de suas aprendizagens (DUVAL, 2003, p. 29).

A teoria de Duval (2003) tem como pressuposto que a apreensão conceitual ocorre quando o aluno adquire a capacidade de mudar de RRS e, além disso, consegue diferenciar um objeto de sua representação. Na conversão é normal que o estudante encontre dificuldade, pois é nesse momento que ele precisa decidir entre as representações, e escolher a que melhor se adapta à situação – em termos de tratamento – e, então, fazer a transformação para o RRS requerido no enunciado da questão.

Geração do vetor

As análises realizadas a partir do caderno do estudante, E37, indicaram que: a anotação feita pelo estudante do conceito de vetor é resumida. Não foi possível identificar uma anotação que apresente o vetor como uma grandeza, conseqüentemente não faz a distinção entre as grandezas escalares e vetoriais. A anotação do estudante não traz a noção de reta orientada, de segmento orientado, tampouco a ideia de equipolência é considerada. Essas relações são estruturantes para a compreensão conceitual do estudante.

Figura 1 - Imagem do conceito de vetor registrado pelo E37.



Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 101.

A definição das características do vetor – módulo, sentido e direção não são registradas no caderno, de forma a explicitar seus significados. As análises em relação aos argumentos dos estudantes em procedimentos realizados nos exercícios propostos em avaliações e em monitoria apontaram: a falta de sentido atribuído às características elementares de formação de um vetor. Os estudantes usam as palavras dos três elementos de formação de vetor: sentido, direção e módulo, entretanto, apresentam dificuldades em relação ao significado de cada um dos elementos, principalmente no sentido e na direção de um vetor, como podemos observar nos Quadros 5 e 6 a seguir.

Quadro 5 - Argumentos do E37 em relação ao exercício 2 da última avaliação.

Pesquisadora: *E que é o sentido de um vetor?*

E37: *Horizontal e vertical.*

Pesquisadora: *Não. Vamos olhar para o vetor que está representado aqui (aponta para a representação na questão da prova). Qual é o sentido deste vetor?*

E37: *Aluno pensando.*

Pesquisadora: *Se eu sair daqui da Universidade e for para o centro, onde está a “origem” e a “extremidade” nesta situação?*

E37: *A origem aqui na universidade e a extremidade o centro onde você quer ir.*

Pesquisadora: *Isso, muito bom. Então qual é o sentido?*

E37: *Da origem para a extremidade? Daí ficaria da universidade para o centro, é isso?*

Pesquisadora: *Isso, da origem para a extremidade.*

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p.111.

Quadro 6 - Argumentos do E3 em relação ao exercício 2 da última avaliação.

Pesquisadora: *O que significa cada uma dessas características? O módulo?*

E3: *Estudante pensando...*

Pesquisadora: *O que é o módulo de um vetor?*

E3: *Não é um ponto né?*

Pesquisadora: *Não, vamos olhar para esse vetor que está representado aqui (apontando para o vetor AB representado na questão), qual é o módulo dele?*

E3: *Estudante pensando...*

Pesquisadora: *O vetor possui três características de formação, módulo, sentido e direção. Como você mesmo respondeu antes, mas o que são esses elementos? Vamos analisar este aqui (apontando novamente para o vetor AB representado na questão). O que ele possui? A origem aqui no ponto A. A extremidade aqui no ponto B...*

E3: *Tá! Acho que sei. É o tamanho, é isso né?*

Pesquisadora: *Isso, é o tamanho, o módulo de um vetor é o tamanho dele. E o sentido?*

E3: *Deve ser o ponto B, aqui da flecha, é isso?*

Pesquisadora: *Não, sentido não é isso, mas possui relação com a flecha, sim, o sentido de um vetor é dado pelo sentido da flecha, e é indicado da origem para a extremidade.*

E3: *Eu me lembro disso, acho que fiz isso em algum exercício das listas.*

Pesquisadora: *E direção de um vetor, o que é?*

E3: *Não sei, eu sei que o vetor tem três características, mas não sei o que é a direção.*

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 113-114.

O estudante não conseguiu definir, de forma correta, por exemplo, o que é a direção de um vetor. As dificuldades apresentadas pelos estudantes podem ter relação com o conceito de vetor como um segmento de reta orientado com módulo, sentido e direção. Não apresenta, contudo, a definição desses elementos de formação, apenas os trazem indicados em uma representação geométrica do vetor.

Operações com vetores

As análises referentes a este foco, o qual marca as dificuldades dos estudantes de Engenharia em relação ao desenvolvimento de operações com vetores, de adição, multiplicação de um escalar por vetor, produto escalar, produto vetorial e produto misto, apontaram que: não houve utilização do registro figural na representação geométrica na adição de vetores, conforme observamos na Figura 2 a seguir.

Figura 2 - Imagem da definição da operação da adição de vetores registrada pelo E37.

Soma de Vetores - na adição de dois vetores podemos utilizar os seguintes procedimentos:
* Posicionar a origem na extremidade do outro (regra do triângulo)
* Posicionar as origens dos vetores (regra do paralelogramo)

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 103.

As definições anotadas pelo estudante E37 são breves e não exploram o RRS figural, podendo desencadear dificuldade conceitual, pois não apresentam uma definição para a operação e não trazem a representação geométrica, fundamental para a sua compreensão. A operação de multiplicação de um escalar por vetor é considerada multiplicação de vetores, o que é um equívoco, já que esta operação é a multiplicação de um número real por vetor, conforme a Figura 3 a seguir.

Figura 3 - Imagem da definição de multiplicação de um escalar por vetor registrada pelo E37.

Multiplicação de Vetores - se $a \in \mathbb{R}$ então $a \cdot v$ irá transformar o vetor v de seguinte forma:
* se $a > 0$ -> mantém a direção e sentido e altera o módulo
* se $a < 0$ -> mantém direção e altera o sentido e o módulo

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 103.

A definição da operação é anotada, marcando a sua alteração no módulo e no sentido do vetor. Como se pode observar na Figura 3, a nomenclatura dada a esta operação parece ser equivocada, dado que esta operação envolve a multiplicação de um número real por um vetor. Na operação de produto misto, o RRS figural na interpretação geométrica da operação não é utilizado.

Considerando as análises realizadas nos procedimentos e argumentos dos estudantes, identificamos que: os estudantes não conseguiram identificar a operação de produto misto durante a argumentação, o que marca a falta de significado que esta operação representa ao estudante, tanto do produto misto quanto do produto vetorial. O Quadro 7 a seguir apresenta os argumentos em relação ao exercício 2 proposto em monitoria aos estudantes E3 e E12.

Quadro 7 - Argumentos do E3 e E12 em relação ao exercício 2 proposto em monitoria.

Pesquisadora: Ok. Letra c, se o produto vetorial de u por v for o vetor nulo, então um dos vetores é nulo, ou os vetores são colineares, verdadeiro ou falso?

E3: Verdadeiro.

E12: Eu acho que é falso.

Pesquisadora: Por que E3? O que você acha que é verdadeiro?

E3: Estudante pensando...

Pesquisadora: E você E12. Porque você acha que é falso?

E12: Estudante pensando...

Pesquisadora: O que é produto vetorial gente? (Estudante pensando) O que o produto vetorial gera? (Estudantes pensando) O que significa esse resultado? (Estudante pensando) Gera um número ou um vetor?

E3: Como é mesmo o produto vetorial, é aquele que tem o i, j, k?

E12: Que faz o determinante?

Pesquisadora: Sim é aquele que utiliza o i, j e o k. O que ele gera?

E3: É um vetor ne?

E12: Acho que não, não é um número?

E3: Agora não sei mais, porque tem um que calcula o determinante e que da um número.

Pesquisadora: Gente o produto vetorial é desse formato aqui. (pesquisadora escreve no quadro e coloca a forma geral do produto vetorial). O que ele gera?

E3: Um vetor. Eu disse que gerava um vetor.

Pesquisadora: Gera um vetor. E o que esse vetor significa? (Estudantes pensando) Porque eu uso produto vetorial? Para calcular o que?

E12: Módulo.

E3: Não.

Pesquisadora: Para que então?

E3 e E12: (Pensando).

Pesquisadora: Para que eu calcule o produto vetorial?

E3: Para achar um vetor.

Pesquisadora: Sim eu vou encontrar um vetor. E qual a relação deste vetor com os vetores dados? O que vocês utilizariam para calcular? (Estudantes pensando) Quando eu uso produto vetorial?

E3 e E12: (Pensando).

Pesquisadora: O produto vetorial é utilizado para o cálculo da área de um paralelogramo, e para o que mais? (Estudantes pensando) Para encontrar um vetor simultaneamente ortogonal a u e v. O que isso significa então? Se eu pegar esse vetor resultante e fizer o produto interno com u ou v, esse produto da quanto?

E12: Zero.

Pesquisadora: Isso. Precisa dar zero. Então, voltando à letra c, esta é verdadeira ou falsa?

E3: Verdadeira.

Fonte: RONCAGLIO, 2015, p. 116.

Na argumentação indicada no quadro 7 acima, os estudantes tiveram dificuldades em compreender o resultado do produto vetorial. A pesquisadora acabou, em muitos momentos, respondendo ao próprio questionamento realizado, pois os estudantes não apresentavam reação diante das questões levantadas. As dificuldades apresentadas pelos estudantes indicam que há falta de apreensão dos conceitos, assim como há falta de sentido nas argumentações realizadas. Isso pode estar diretamente relacionado com a forma como os conceitos e definições foram trabalhados em sala de aula e a não utilização de argumentos pelos estudantes no processo de ensino e aprendizagem.

Situações de aplicação de vetor

Este foco de análise a partir da análise dos exercícios propostos e das avaliações foi praticamente inexistente. Não foi possível identificarmos a proposição de aplicações do conceito de vetor em situações da Engenharia nos diferentes exercícios trabalhados em aula e nas provas. Os exercícios e problemas propostos foram basicamente situações de matemática, não mudando o contexto, o que pode gerar a falta de apreensão conceitual para o estudo de vetor ao profissional da engenharia.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base na pesquisa desenvolvida podemos considerar que, em relação ao primeiro foco de análise – a conversão entre registros envolvendo o registro figural, este é predominantemente estabelecido utilizando os registros de representação gráfica e geométrica. É possível detectar uma falta de exploração de registros figurais, o que pode acarretar dificuldades aos estudantes, conforme apontado na pesquisa de Castro (2001). A razão é que a atividade de conversão envolvendo o registro figural exige do estudante maior complexidade de análise e de conhecimento dos conceitos envolvidos, sendo que a maioria dos exercícios propostos envolveu a conversão entre os registros da língua natural e simbólica. Nesse caso, os estudantes deixam clara essa dificuldade durante a argumentação, sendo que alguns preferem não resolver os exercícios pelo simples fato de exigir um registro figural.

Em relação ao segundo foco de análise – a geração do vetor – este marca a forma reduzida do registro no caderno do estudante da apresentação do conceito de vetor, marcando apenas que é um segmento de reta orientado com sentido, módulo e direção. Não são identificadas explorações das características de formação, apenas o registro figural. Além disso, não se identifica atividades que diferenciam a grandeza escalar de uma grandeza vetorial, e não são identificadas noções básicas que poderiam auxiliar no entendimento do conceito, tais como: segmento de reta, reta orientada e segmentos equipolentes. Este foco marca, ainda, a dificuldade dos estudantes em significar os elementos de formação do vetor, módulo, sentido e direção. Para muitos deles, esses elementos não fazem sentido e revelam de forma clara a sua falta de compreensão do conceito.

Em relação ao terceiro foco de análise – as operações com vetores – marca a falta do registro figural na definição das operações com vetores, de acordo com o registro realizado pelo estudante E37⁴, bem como a falta de alguns procedimentos em determinadas operações, como por exemplo, na de adição de vetores. Isso pode levar o estudante a ter dificuldades na aplicação da operação. Marca, também, a falta de entendimento dos estudantes das propriedades de algumas operações, levando ao desenvolvimento de equívocos nos cálculos, como por exemplo, utilizar o produto misto para o cálculo da área de um paralelogramo, quando se utilizaria o produto vetorial.

E, finalmente, em relação ao quarto e último foco de análise – as situações de aplicação do vetor – este é marcado pela inexistência de situações de aplicação. Os exercícios propostos de aplicação são apenas para ensinar ou utilizar as ferramentas matemáticas dentro do respectivo contexto

⁴A pesquisa (RONCAGLIO, 2015) apresenta outros argumentos de estudantes, não somente o E37, trazido neste artigo. Além disso, são apresentadas outras análises com os demais instrumentos.

e não de aplicação na Engenharia, o que marca a fragilidade do processo de aprendizagem na perspectiva de produção de sentido e significado para a futura profissão.

Para que o estudante compreenda o conceito, ele precisa diferenciar as grandezas escalares e vetoriais, de modo que os elementos que estruturam o vetor sejam trabalhados a partir do que efetivamente os estudantes já conhecem. Os dados da pesquisa indicam que, afirmar para o estudante o que é módulo, sentido e direção, não garante mobilizar este entendimento. De modo geral, pode-se afirmar que, apesar da importância do entendimento do conceito de vetor, assim como de suas operações pelos estudantes de Engenharia, grande parte destes, que cursam a disciplina não conseguiram apreender, ou seja, se apropriar do entendimento dos elementos de formação do vetor, conseqüentemente, não conseguem aplicar o seu conceito. Além disso, considerando os exercícios propostos nos instrumentos analisados, poucos deles exploraram o registro figural, desencadeando dificuldade nos procedimentos realizados por parte dos estudantes. Como observado nas argumentações, ao se depararem com o registro figural, alguns abandonam o desenvolvimento do exercício. Assim, considera-se necessário novas pesquisas no campo enfocando principalmente atividades que exploram aplicações em contexto de engenharia, desencadeando o processo de ensino.

REFERÊNCIAS

- BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2003.
- CASTRO, Samira Choukri de. **Os Vetores do Plano e do Espaço e os Registros de Representação**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2001.
- DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Educação Matemática: Uma (nova) Introdução**. 3. ed. – São Paulo: EDUC, 2012.
- DUVAL, Raymond. **Ver e Ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo Matemático de pensar – os registros de representação semióticas**. Tradução: Marlene Alves Dias – São Paulo: PROEM, 2011.
- DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registro Semiótico e Aprendizagens Intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas – São Paulo: Papirus, 2003.
- FRANÇA, Michele Viana Debus de. **Conceitos Fundamentais de Álgebra Linear: Uma Abordagem Integrando Geometria Dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2007.
- KARRER, Monica. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: Um Estudo sobre as Transformações Lineares na Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – 2006.

RONCAGLIO, Viviane. **Registros de Representação Semiótica – Atividades de Conversão e Tratamento em Vetores e suas Operações a partir da Argumentação de Estudantes de Engenharia**. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – 2015.

VENTURI, Jacir. Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. 1949. 9. ed. Curitiba. Disponível em: <<http://www.geometriaanalitica.com.br/livros/av.pdf>> Acessado em 02/11/2014.

RECEBIDO EM: 14 jul. 2015

CONCLUÍDO EM: 30 set. 2015