

**A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA NO  
JUGYOKENKYU PELAS VOZES DE AUTORES JAPONESES****MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING IN JUGYOKENKYU  
THROUGH THE VOICES OF JAPANESE AUTHORS****RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN JUGYOKENKYU  
A TRAVÉS DE LAS VOCES DE AUTORES JAPONESES****MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA<sup>1</sup>****RESUMO**

Este artigo, de natureza bibliográfica, discute criticamente as perspectivas de autores japoneses sobre a resolução de problemas matemáticos no âmbito do *Jugyokenkyu* - o *modus vivendi* educacional japonês de desenvolvimento profissional docente. Apoiando-se em fontes primárias japonesas, o estudo evidencia que a resolução de problemas não é uma técnica acessória, mas o princípio epistemológico e didático que estrutura e confere sentido a todo o ciclo do *Jugyokenkyu*. A discussão articulada indica que a seleção de um problema único e “rico”, seguido das etapas de *kikan-jyunshi*, *neriage* e *matome*, é fundamental para fomentar o pensamento matemático autônomo e a construção colaborativa do conhecimento. Concluímos que a aprendizagem dos estudantes japoneses está intrinsecamente ligada à sua centralidade na resolução de problemas, alertando-se para o risco de seu esvaziamento quando o *Jugyokenkyu* é transposto acriticamente para outros contextos culturais.

**Palavras-chave:** *Lesson Study*; Formação de professores; Problemas de Matemática; Japão; Planejamento de aulas.

**ABSTRACT**

*This bibliographical article critically discusses the perspectives of Japanese authors on mathematical problem-solving within the framework of Jugyokenkyu - the Japanese educational modus vivendi for teacher professional development. Drawing on Japanese primary sources, the study highlights that problem-solving is not an ancillary technique, but rather the epistemological and didactic principle that structures and gives meaning to the entire Jugyokenkyu cycle. The articulated discussion demonstrates that selecting a single, “rich” problem, followed by the stages of kikan-jyunshi, neriage, and matome, is fundamental to fostering autonomous mathematical thinking and the collaborative construction of knowledge. We conclude that Japanese students’ learning is intrinsically linked to their centrality in problem-solving, warning of the risk of its depletion when Jugyokenkyu is uncritically transposed to other cultural contexts.*

**Keywords:** *Lesson Study*; Teacher training; Math problems; Japan; Lesson planning.

**RESUMEN**

*Este artículo bibliográfico analiza críticamente las perspectivas de autores japoneses sobre la resolución de problemas matemáticos en el marco del Jugyokenkyu - el modus vivendi educativo japonés para el desarrollo profesional docente. Basándose en fuentes primarias japonesas, el estudio destaca que la resolución de problemas no es una técnica auxiliar, sino el principio epistemológico y didáctico que estructura y da sentido a todo el ciclo del Jugyokenkyu. La discusión articulada demuestra que la selección de un único problema “rico”, seguido de las etapas de*

<sup>1</sup> Doutora em Psicologia da Educação Matemática (Unicamp). Professora titular do Instituto Federal do Espírito Santo. E-mail: alicervefs@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2038-813X>

*kikan-jyunshi, neriage y matome, es fundamental para fomentar el pensamiento matemático autónomo y la construcción colaborativa del conocimiento. Concluimos que el aprendizaje del alumnado japonés está intrínsecamente ligado a su centralidad en la resolución de problemas, advirtiendo del riesgo de su agotamiento cuando el Jugyokenkyu se transpone acríticamente a otros contextos culturales.*

**Palabras-clave:** Lesson Study; Formación de profesores; Problemas de matemática; Japón; Planificación de clases.

## INTRODUÇÃO

Se Lesson Study<sup>2</sup> perder a ênfase em aulas centradas em problemas matemáticos e científicos, ele se reduz a uma mera reunião de professores - no Japão, sua força reside precisamente nessa centralidade.

(Ogisu, 2019, tradução livre)

Há muitos anos pesquisadores de todo o mundo se preocupam e investigam a resolução de problemas de matemática, reconhecendo sua importância para construção de objetos matemáticos nos e para os níveis escolar, acadêmico, científico, técnico e profissional. (e.g., Abrão; Allevato, 2025; Allevato; Onuchic, 2021; Doorman *et al.*, 2007; Bailey, 2017; Kilpatrick, 1970; Leal Junior; Onuchic, 2015; Moreno-Armella; Elizondo Ramírez, 2017; Schoenfeld, 1985; Stanic; Kilpatrick, 1989). Embora não seja uma exclusividade desse campo - vez que resolver problemas constitui essência de todas as áreas científicas - na Matemática há especificidades que lhe conferem destaque próprio.

Essas particularidades têm marcado inauguração de espaços, fóruns e documentos orientados para essa temática, a exemplo do *National Council of Teachers of Mathematics* nos Estados Unidos, com *An Agenda for Action* (NCTM, 1980) e em continuidade, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (NCTM, 1989) e *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000), a Associação de Professores de Matemática em Portugal (APM, 1988) e Sociedades Nacionais de Matemática e(ou) Educação Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática (SBM, 1969), Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM, 1988), *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM, 1996), *Southeast Asian Mathematical Society* (SEAMS, 1972), *Japan Society of Mathematical Education* (JSME, 1919) e *Mathematical Society of Japan* (MSJ, 1877). Essa macrotendência mundial se consolidou, portanto, como um movimento amplo e plural, cujas distintas sociedades trabalham, cada qual com agendas próprias, mas todas convergindo para algum objetivo central na área de Matemática, seja de desenvolvimento de pesquisas, seja de cultivo e aprimoramento no ensino e aprendizagem em seus respectivos âmbitos de atuação.

No Japão não foi diferente, embora, notadamente, com origens mais antigas em relação ao restante do mundo e com contornos que não se encerraram nas fronteiras dessas sociedades, alcançando o chão das escolas de Ensino Básico no Japão e, mais tarde, no âmbito internacional. De que modo? O Japão tem exercido significativa influência sobre educadores e formadores de professores em diferentes partes do mundo, sobretudo por meio de seu modo singular de desenvolvimento profissional docente, amplamente reconhecido na literatura internacional como *Lesson Study* e denominado, em seu contexto original, *Jugyokenkyu*. Esse processo, que articula a investigação colaborativa de aulas e a centralidade da aprendizagem de estudantes, consolidou-se como uma contribuição relevante do Japão para a Educação Matemática, tornando-se referência para iniciativas formativas

2 Neste texto, utilizaremos a denominação Lesson Study para nos referirmos à prática de formação de professores em contextos fora do Japão e por não-japoneses. O termo Jugyokenkyu será usado quando se tratar de sua realização no Japão ou por educadores japoneses.

em diversos países (e.g., Fujii, 2014; Kitada, 2022; Kusanagi, 2014; Souza, 2025). Esse *modus vivendi* educacional, no entanto, deve ser tomado por não-japoneses com parcimônia e atenção às idiossincrasias japonesas, afinal, o ato de ensinar é uma atividade cultural (Hargreaves, 1996; Stigler; Hiebert, 1999; Watanabe, 2018). Essa desatenção pode acarretar desvios que fragilizam e esvaziam a essência do *Jugyokenkyu*, podendo comprometer substancialmente os resultados pretendidos pelas ações planejadas nessa seara (Fujii, 2014; Souza, 2025).

É fundamental destacar que, ao transpor o *Jugyokenkyu* para outros contextos culturais, ignorar a centralidade que a resolução de problemas assume no Japão significa correr o risco de descaracterizar ou reduzir o potencial dessa prática. O êxito do *Jugyokenkyu* fora do Japão depende, em grande parte, da forma particular como a resolução de problemas é concebida e implementada no Japão, não podendo ser plenamente compreendido sem essa referência (Fujii, 2018; Isoda; Katagiri, 2012; Ogisu, 2019; Takahashi, 2006). Por isso, perder ênfase em aulas centradas na resolução de problemas, reduz o *Lesson Study* a meras reuniões de professores cuja força deveria estar nessa centralidade (Ogisu, 2019).

Nesse horizonte, o presente artigo se configura como uma investigação de natureza bibliográfica (Gil, 2008; Marconi; Lakatos, 2022), apoiada em conteúdos de livros, capítulos de livros, artigos científicos e documentos, cujo propósito é discutir de forma crítica e articulada perspectivas japonesas acerca da concepção de resolução de problemas no interior do *modus vivendi* educacional do *Jugyokenkyu*. Para tanto, privilegiamos o diálogo com produções de autores japoneses - entendidos como fontes primárias por sua origem epistemológica e cultural com o objeto em voga - e com publicações científicas sem limites temporais que tratem diretamente da temática em questão. Essa opção metodológica busca construir uma reflexão interpretativa (Bogdan; Biklen, 1994) que evidencie como tais concepções emergem, se consolidam e se relacionam à prática da aprendizagem de objetos matemáticos pela resolução de problemas.

Com esse intuito, a seção seguinte traz ao primeiro plano aspectos históricos, conceituais e estruturantes do *Jugyokenkyu*, os quais são indissociáveis de uma perspectiva de ensino e aprendizagem pautada na resolução de problemas. Na sequência, procedemos à articulação dessa temática à luz de algumas resoluções de problemas conduzidas ou propostas por educadores e autores de livros didáticos japoneses, culminando em considerações conclusivas acompanhadas das referências utilizadas.

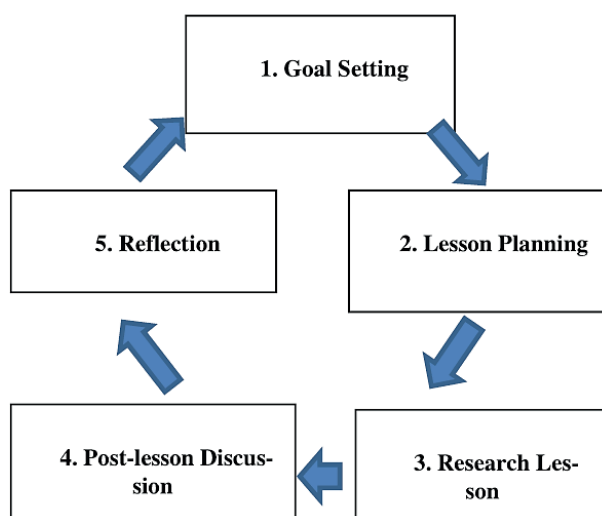
## ENQUADRAMENTO TEÓRICO

*Jugyokenkyu* e o ensino de matemática por meio da resolução de problemas são duas rodas de uma carroça: uma não pode ter sucesso sem o sucesso da outra.  
(Fujii, 2018, p. 2, tradução livre)

O teor desta seção não pretendeu ser exaustivo, mas amplo e profundo bastante a ponto de subsidiar uma discussão sobre a resolução de problemas no seio de um *Jugyokenkyu*, a iniciar pelas concepções básicas e históricas no Japão. O *modus vivendi* educacional japonês constitui um processo de desenvolvimento profissional de educadores japoneses desde a Era Meiji (1868-1912), realizado de forma colaborativa e orientado para a reflexão docente acerca de demandas de ensino e(ou) de aprendizagem vinculadas a determinado conteúdo curricular, bem como sobre sua prática pedagógica (Fernandez; Yoshida, 2004; Fujii, 2014, 2018; Isoda, 2010a, 2010b). Esse processo, ao se

disseminar internacionalmente, passou a ser designado além das fronteiras japonesas como *Lesson Study* e se estrutura em uma perspectiva macro, a partir de etapas gerais que, a depender do autor, podem ser apresentadas em três, quatro ou mais títulos (Figura 1) - estabelecimento de metas (*Goal Setting*) e estudo do currículo, planejamento colaborativo de aulas (*Lesson Planning*, cujo documento em japonês é denominado *gakushushido-an*), aula-pesquisa (*Research Lesson*) acompanhada da observação da aprendizagem dos estudantes, análise e reflexão críticas pós-aula (*Post-lesson discussion; Reflection*) conduzida pelos participantes e sempre centrada no progresso dos estudantes (Fujii, 2018; Shimizu, 1999; Takahashi, 2006, 2016).

**Figura 1 - Ciclo do *Jugyokenkyu***



Fonte: Fujii (2014, p. 113).

Destacamos, entretanto, que essa macrovisão representa apenas uma síntese do que seja *Jugyokenkyu*. É como enxergar um *iceberg* acima da linha do mar (Souza; Powell, 2023), pois o processo envolve complexidade muito maior em seu desenvolvimento e abrange elementos essenciais e indissociáveis, como o papel da resolução de problemas matemáticos, ou seja, enxergar o *iceberg* abaixo da linha do mar - nosso interesse aqui. O ensino de matemática por meio da resolução de problemas constitui duas dimensões inseparáveis e comparáveis a duas rodas de uma mesma carroça: ambas se sustentam mutuamente, como preconiza Fujii (2018). *Jugyokenkyu* sem a resolução de problemas perde sua razão pedagógica, enquanto a resolução de problemas sem o *Jugyokenkyu* carece de um ambiente de desenvolvimento profissional capaz de oferecer consolidação no cotidiano escolar (Fujii, 2018).

Assim sendo, a resolução de problemas é marcada como um núcleo para ensino de matemática. Diferentemente de abordagens singularmente centradas em procedimentos e respostas pré-estabelecidas, educadores japoneses entendem que os estudantes devem enfrentar problemas que promovam autonomia de pensamento e que mobilizem conhecimentos prévios, seguido de socialização que fomenta diferentes estratégias que sejam comparadas, discutidas e conectadas pelo professor que desempenha papel de “orquestrador” para construção coletiva do conhecimento pelos estudantes. A ideia é a de favorecer a criatividade, o pensamento crítico e a compreensão conceitual preparando



os estudantes para aplicações futuras em novos contextos.

A propulsão do *Jugyokenkyu* se manifesta, fundamentalmente, na articulação intrínseca do ensino por meio da resolução de problemas (aspecto invisível e conceitual), e não primariamente na mera observância e execução das etapas metodológicas que o compõe (aspecto visível e procedimental). Contrariando uma interpretação superficial ou externa, frequentemente observada entre não-japoneses, a verdadeira riqueza desse processo não se encontra na simples consecução das etapas mencionadas. Pelo contrário, é exigida compreensão mais profunda, na qual a resolução de problemas atua como o princípio epistemológico e didático que integra e informa cada uma das etapas do processo. Como isso ocorre?

Nas etapas da Figura 1, a *Goal Setting* (Definição de Metas) estabelece as necessidades de aprendizagem dos estudantes, exigindo que os educadores identifiquem lacunas entre essas metas elevadas e a realidade, o que direciona a investigação para como a metodologia de ensino por resolução de problemas pode ser utilizada para desenvolver o pensamento matemático. Em seguida, o *Lesson Planning* (Planejamento da Aula) utiliza a resolução de problemas como seu pré-requisito fundamental, exigindo a antecipação de múltiplas soluções para o problema proposto. Na *Research Lesson* (Aula-Pesquisa), o método é executado ao solicitar que os estudantes trabalhem de forma autônoma para solucionar o problema, enquanto o professor pratica o monitoramento intencional (*Kikan-jyunshi*). A *Post-Lesson Discussion* (Discussão Pós-Aula) mira na análise das resoluções dos estudantes e na eficácia do processo de debate (*neriage*). Por fim, a *Reflection* (Reflexão) consolida o aprendizado, analisando como a resolução do problema e a construção de ideias pelos estudantes podem ser aprimoradas para ciclos futuros<sup>3</sup> (Fujii, 2016, 2018; Isoda, 2010a, 2010b, 2011; Isoda; Olfos, 2009, 2021; Mimura; Watanabe, 2021; Takahashi, 2006).

Essa é a concepção mais recente sobre o papel da resolução de problemas em um *Jugyokenkyu*, mas não foi sempre assim. Embora a resolução de problemas sempre tenha ocupado um papel estruturante em aulas japonesas de matemática, essa centralidade passou por fases na história do Japão, cada qual associada a uma ideologia educacional dominante à época e em constante evolução (Fujii, 2018; Yamazaki; Soya, 2001). Nas décadas de 1940 a 1950 a resolução de problemas foi amplamente praticada e concebida na espontaneidade e experiência da criança (Yamazaki; Soya, 2001). A resolução de problemas surge quando aplicado a lições de experiência de vida. No Ensino Básico, isso se traduziu em participações em festivais escolares, exploração de espaços comuns, aprendizagem de tarefas domésticas e culinárias como fazer pão (Fujii, 2018). Essa concepção foi criticada como um “empirismo rastejante” e nocivo às habilidades escolares básicas (Yamazaki; Soya, 2001, p. 139).

No fim da década de 1950, houve fortalecimento da sistematização do currículo e a aprendizagem por resolução de problemas verbais ficou reduzida ao nível curricular com a reforma educacional de 1958. Anos mais tarde, em meados de 1989, uma nova revisão curricular trouxe retorno à ênfase no interesse, motivação de aprendizagem e atitude dos estudantes como origem para os problemas. Dez anos mais tarde, a Resolução de Problemas foi, e ainda é, encarada como um método fundamental para implementação de estudos que cultivem a capacidade de viver, incluindo adaptação e pensamento independente. Esse método incentiva os estudantes a identificar problemas, buscar soluções e exercitar o pensamento científico (Yamazaki; Soya, 2001). Embora não-japoneses tenham tentado sistematizar a resolução de problemas por educadores japoneses em certa quantidade de

3 Embora os autores japoneses concebiam a retomada das etapas como um ciclo, entendemos que a melhor denominação ou representação seja como uma espiral, considerando que “rodadas” subsequentes ocorrerão com maior grau de maturidade sobre o problema praticado.

componentes, na verdade o que, de fato, é levado em consideração nessas aulas são quatro etapas contadas por Fujii (2018, p. 4, tradução livre) e corroboradas por outros autores (e.g., Takahashi, 2006; Isoda; Olfos, 2009):

1. Professor apresenta o problema para o dia. Estudantes entendem o problema;
2. Estudantes trabalham para resolver o problema;
3. Professor facilita a comparação e discussão das soluções dos estudantes (isso é chamado de *neriage* em japonês);
4. Professor resume a aula (isso é chamado de *matome* em japonês).

A apresentação do problema, no contexto do *Jugyokenkyu*, não envolve explicações ou exemplos de como resolvê-lo, o que poderia ser uma expectativa para não-japoneses. Pelo contrário, o objetivo é que os estudantes compreendam o cenário e as condições matemáticas inerentes à tarefa. A resolução é uma jornada exclusiva do estudante. Torna-se relevante, portanto, que o único problema da aula seja criteriosamente escolhido: ele é a chave para estimular novas compreensões matemáticas na discussão coletiva e, assim, abrigar todos os propósitos da aula. E o que está envolvido nessa seleção? Os membros do *Jugyokenkyu* devem ter em mente se o que se quer é: uma abordagem direta de um conceito; desenvolvimento de processos matemáticos; uma opção que reflita um alinhamento preciso com o que foi ensinado e o que será abordado; ou uma abordagem de concepção comumente equivocada (Doig; Groves; Fujii, 2011).

Em seguida, os estudantes se esforçam para resolver o problema sozinhos. Nesse momento, o professor e os membros do *Jugyokenkyu* visitam as carteiras dos estudantes tomando notas sobre suas produções corretas ou incorretas (*kikan-shido*; Shimizu, 1999). Como eles estão resolvendo? Esse material será matéria-prima para que o professor possa conduzir a discussão coletiva e promover a comparação das diversas abordagens de solução (*neriage*; Takahashi, 2006). Essa matéria-prima se junta ao que os membros do *Jugyokenkyu* se anteciparam quando do planejamento a respeito de possíveis dúvidas, reações, questionamentos, limitações etc. (*kikan-jyunshi*; Fujii, 2018). O educador japonês deve se esforçar para ver a matemática com os olhos dos estudantes e se revestir de meios para facilitar suas compreensões e construções de conceitos ou habilidades subjacentes.

Mais especificamente, o *neriage* (Takahashi, 2006) é outro aspecto invisível em um *Jugyokenkyu*. Ele visa à comparação e análise das diferentes estratégias para resoluções apresentadas pelos estudantes, corretas ou não. O professor organiza essas resoluções na lousa (*bansho*; Takahashi, 2006) que nunca é apagada durante a aula para que todos apreendam as diferentes estratégias geradas pelos estudantes. Seu objetivo principal é fomentar o pensamento matemático e a aprendizagem independente, concentrando-se no processo de raciocínio. O *neriage* funciona como um discurso reflexivo que busca impulsionar o estudante além de seu nível atual de compreensão. É uma fase complexa, embora pareça trivial, exigindo que o professor consiga extrair, contrastar e clarificar as diferenças e semelhanças conceituais entre os processos eleitos pelos estudantes e, assim, ampliar e aprofundar seus pensamentos matemáticos.

Por fim, ao final da aula, o professor deve resumir-la (*matome*; Fujii; Kumagai; Shimizu; Sugiyama, 1998) fazendo refletir o sistema de valores do professor. O que isso significa? Se o professor concluir uma aula como mera revisão do procedimento matemático, os estudantes podem interpretar que o conhecimento processual é o que mais importa. Ao contrário, se o resumo valorizar como as ideias foram construídas, deixa a mensagem de que como eles pensam é o que mais

importa. Em poucas palavras, durante o *matome*, o professor deve revisar não apenas o conteúdo, mas muito mais o processo.

Os conceitos trazidos até agora trouxeram relevo aos pontos que impactam mais diretamente na resolução de problemas de matemática em um *Jugyokenkyu*. Contudo, outros elementos são igualmente essenciais e vão além do escopo deste trabalho. Ao desenvolvermos um *Jugyokenkyu*, devemos considerar o *kyozaikenkyu* (estudo do material didático), a função do *koshi* (orientador ou perito externo), a não hierarquização da equipe, o espírito de colaboração (que difere do sentido de coletividade ou de mero compartilhamento), as metas de longo prazo, o *hatsumon* (estímulos do professor por meio de questionamentos), o lugar e tratamento do erro como oportunidade de ampliação dos debates e o *gakushushido-an* (antecipação de reações e dúvidas que minimizam imprevisibilidades e aparelham o professor sobre como atender os estudantes em suas especificidades), entre muitos outros conceitos que compõem essa complexa abordagem de ensino no Japão.

Os conceitos que subjazem ao *Jugyokenkyu* devem ser usados em conjunto. A parcialidade é nociva - ou mesmo o uso singular de todos os grandes títulos do ciclo do *Jugyokenkyu* - e pode acarretar frustração de adeptos que não alcancem os mesmos resultados de aprendizagem de estudantes japoneses. Não basta apresentar o problema aos estudantes, solicitar elaboração de uma solução e sua subsequente exposição ao grupo, para que as propostas sejam, então, finalizadas e consolidadas pelo docente. Há conceitos importantes nessas entrelinhas que levarão ao diferencial nos resultados. A teoria é útil, mas só a prática converterá esse potencial em êxito. Não defendemos que o *Jugyokenkyu* seja a única via para o êxito na resolução de problemas de matemática, visto que outras concepções ao redor do mundo também alcançam esse sucesso. Nossa intenção é destacar que, no âmbito do *Jugyokenkyu*, a chave para o sucesso reside na convergência desse conjunto específico de concepções.

*Jugyokenkyu* parece ser uma ideia fácil, mas é um processo complexo que exige esforço e investimento de diferentes dimensões. E como a resolução de problemas matemáticos opera na prática de um *Jugyokenkyu*? Para contextualizar, a seção seguinte apresenta e discute um breve apanhado desses conceitos no âmago da resolução de três problemas.

## A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA PRÁTICA EDUCACIONAL JAPONESA

A abordagem por resolução de problemas torna-se a abordagem de ensino reconhecida e recomendada para desenvolver o pensamento matemático a partir da década de 1960.

(Isoda; Katagiri, 2012, p. 42-43, tradução livre)

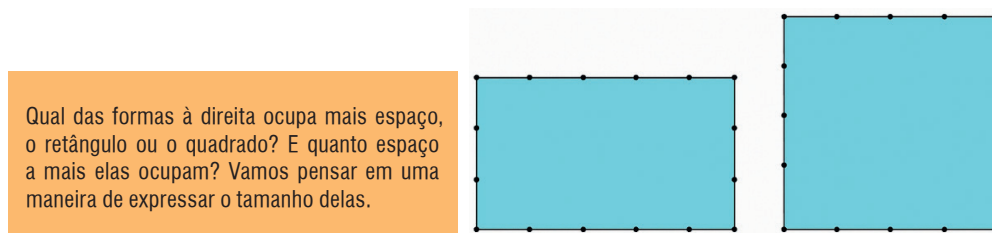
Nesta seção apresentaremos e discutiremos três problemas matemáticos trabalhados por educadores japoneses à luz da essência conceitual dentro do *modus vivendi* de um *Jugyokenkyu*. Relembramos que cada aula de matemática japonesa é elaborada em torno da resolução de um único problema para atingir todos os objetivos planejados para uma aula. O primeiro problema foi emerso das páginas dos livros didáticos de primeiro e de quarta anos do Ensino Básico japonês publicados pela *Tokyo Shoseki* e discutido por Takahashi (2006) em um artigo científico. O segundo foi extraído de *Study with Your Friends - Mathematics for Elementary School*, uma série de livros didáticos publicados pela *Gakkohtosho* em 2011 nas versões japonesa e inglesa. Esta série é a segunda mais amplamente adotada em escolas do Ensino Básico japonês. O terceiro foi transcrito de um

planejamento de uma unidade curricular sobre divisão com restos para o terceiro ano do Ensino Básico no Japão. Esse documento previa dez aulas de uma unidade curricular e uma delas foi acompanhada e registrada em videoaula por professores de diferentes regiões no Japão (*Research Lesson*).

#### Problema sobre área de figuras básicas

Takahashi (2006) conta que, com o intuito de desenvolver conceitos e habilidades relacionados à determinação da área de figuras geométricas elementares, o livro didático japonês introduziu no primeiro ano do Ensino Fundamental, uma atividade inicial voltada à exploração dessas ideias. A proposta foi elaborada para favorecer a compreensão de três formas de comparação - direta, indireta e por meio de uma unidade arbitrária. A partir dessa introdução, o livro do quarto ano apresentou uma unidade voltada à generalização do conceito, conduzindo à utilização de fórmulas multiplicativas para o cálculo da área de retângulos e quadrados. O estudo foi iniciado com um problema contextualizado no universo dos estudantes, no qual foram convidados a comparar as dimensões de um retângulo e de um quadrado, identificando qual figura possuía maior área. A Figura 2 apresenta uma reprodução do referido problema, uma vez que o material original não possuía qualidade visual para uma leitura nítida. Além disso, a tradução dos trechos correspondentes foi realizada de forma livre.

**Figura 2** - Problema das áreas no primeiro ano do Ensino Básico.



Fonte: Takahashi (2006, p. 4, tradução livre).

Os tamanhos das duas figuras foram definidos de forma intencional e criteriosa, de modo que, embora os perímetros das figuras fossem idênticos, suas áreas diferissem pela medida da área de um quadrado de lado igual a 1 cm. Essa opção visou a explorar um equívoco recorrente entre os estudantes - a suposição equivocada de que figuras com mesmo perímetro necessariamente possuem áreas iguais. Assim, ao propor duas figuras com perímetros iguais (16 cm), mas áreas distintas (retângulo com 15 cm<sup>2</sup> e quadrado com 16 cm<sup>2</sup>), os autores do livro didático criaram uma situação didática planejada para que os estudantes pudessem identificar, problematizar e superar essa concepção equivocada.

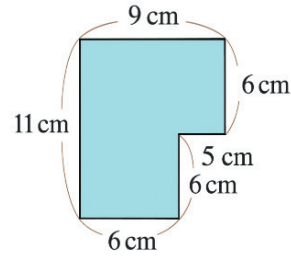
Esse problema buscou mobilizar conhecimentos prévios dos estudantes para comparação das áreas do retângulo e do quadrado, utilizando, inicialmente, a área de um quadrado de 1 cm de lado como unidade arbitrária. A partir dessa noção foi introduzida progressivamente a noção de medida padronizada, apresentando o centímetro quadrado (1 cm<sup>2</sup>) como unidade de medida de área. Takahashi (2006) acrescenta que essa unidade contempla também atividades de resolução de problemas voltadas ao aprimoramento da capacidade de aplicar as fórmulas de área em figuras geométricas irregulares (Figura 3). Essa atividade foi cuidadosamente planejada com o propósito de oferecer uma oportunidade de resgate de conhecimentos previamente adquiridos em anos escolares anteriores para a nova experiência como um elo, em um novo e mais complexo contexto de aprendizagem.



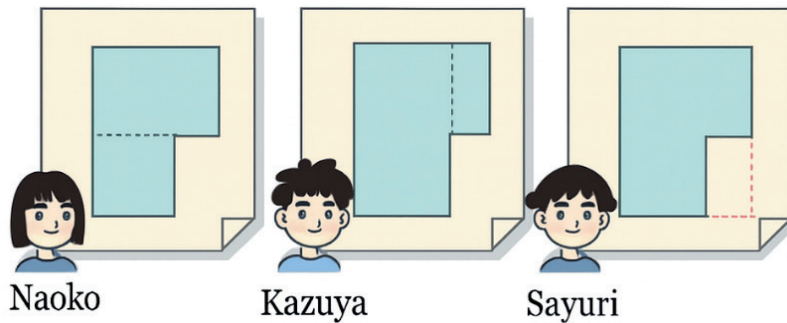
**Figura 3** - Problema das áreas no quarto ano do Ensino Básico<sup>4</sup>.

**Ideias para encontrar a área**

Vamos pensar em uma maneira de encontrar a área da forma à direita.



Vamos explicar a maneira de pensar de cada amigo.



Vamos encontrar a área usando cada método.

Fonte: Takahashi (2006, p. 5, tradução livre).

Essa experiência constituiu a base conceitual para o desenvolvimento posterior das ideias e fórmulas destinadas ao cálculo da área de outras figuras planas elementares, abordadas no quinto ano do ensino fundamental. A partir dos conhecimentos construídos no quarto ano, os estudantes passaram a desenvolver as expressões matemáticas que permitem determinar a área de paralelogramos, triângulos, trapézios, losangos, polígonos regulares e círculos. Ao longo do quinto ano, educadores japoneses esperam que esse processo se consolide por meio de atividades práticas, nas quais os estudantes recortam e reorganizam figuras em papel quadriculado, explorando relações entre formas e medidas. A sequência dos problemas e das tarefas propostas em cada unidade é intencionalmente estruturada de modo a favorecer a construção progressiva dos conceitos e habilidades matemáticas, afinal, as metas devem ser de longo prazo.

Nos livros didáticos japoneses de matemática, uma unidade curricular é concebida não como um agrupamento de exercícios e atividades isoladas, mas como uma sucessão cuidadosamente encadeada de problemas e experiências de aprendizagem que se articulam para promover o desenvolvimento conceitual dos estudantes (Takahashi, 2006). Os conceitos devem ser constituídos tal como uma história com começo, meio e fim, dentro de cada aula, ao longo da escolaridade e com metas de longo prazo (Fujita, 1999).

Nesse sentido, o professor retoma o trabalho do primeiro ano (Figura 2) e avança apresentando o problema no quarto ano (Figura 3). Os estudantes trabalham para atender ao convite de pensar uma

<sup>4</sup> A primeira imagem da Figura 3 apresenta um erro de impressão. O segmento maior à esquerda mede 11 e, como o lado direito é paralelo a esse segmento, uma parte mede 6 e a outra 5. Em outras palavras, há equívoco da indicação de 6 do lado direito da imagem quando deveria ter somente 5.

maneira de encontrar a área da primeira imagem e seguir explicando como Naoko, Kasuya e Sayuri procederam esse cálculo. Essa estratégia visa a ampliar o pensamento matemático pelos modos diversificados de ver e entender o mesmo problema e, possivelmente, a partir daí, os estudantes criarem suas próprias estratégias.

Ao apresentar problemas sem indicar procedimentos, é natural que surjam múltiplas estratégias por parte dos estudantes, razão pela qual os livros didáticos incluem exemplos de abordagens típicas. Naoko e Kazuya dividiram a figura em dois retângulos de modos diversos. Sayuri completou a figura até que se configurasse como um único retângulo. As áreas de retângulos foram objeto de estudo do primeiro ano e resgatados no quarto. Os estudantes tinham, portanto, uma bagagem que se conectava à nova ação. Nenhum algoritmo foi oferecido, mas ideias sutilmente apresentadas para que eles próprios interpretassem e explicassem as ideias de Naoko, Kazuya e Sayuri.

Durante esse trabalho dos estudantes, o professor capta a produção discente visitando suas carteiras e tomando notas que alimentarão a próxima ação - o *neriage*. Para isso, o docente deve possuir um plano de discussão bem definido, que já tenha antecipado soluções eficientes e decorrentes de equívocos dos estudantes, sendo essa antecipação um elemento essencial do planejamento no *Jugyokenkyu*. No *neriage*, o professor organiza a convergência das diferentes estratégias, convidando os estudantes para apresentarem suas ideias, comparações e conexões. Como a maneira de entender a área por Naoko se conecta com a ideia de Kasuya e Sayuri? Como você pensou obter a área? Que outra ideia você tem, para além das que Naoko, Kasuya e Sayuri apresentaram?

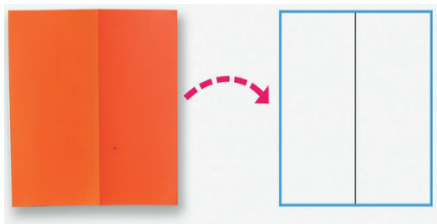
Depois disso, no *matome*, o professor resume os principais aprendizados e promove a reflexão dos estudantes sobre o que foi aprendido, a partir do que ficou registrado na lousa de suas próprias produções de conhecimento. O registro na lousa deve ajudar os estudantes a comparar, contrastar, discutir e organizar as ideias da aula, o pensamento dos estudantes e a promover habilidades por meio dessa boa organização (Yoshida, 2005). A reflexão do problema no primeiro ano, progredindo para o problema do quarto ano serão ingredientes para o trabalho no quinto ano - desenvolvimento das fórmulas de áreas de outras formas geométricas.

## PROBLEMA SOBRE FRAÇÕES

O ensino de frações é iniciado no segundo ano do Ensino Básico japonês. Os autores da série de livros didáticos publicados pela Gakkohtosho optaram por introduzir o assunto por meio de origamis. O origami (do japonês *oru* - dobrar, e *kami* - papel) é uma herança de arte tradicional japonesa que, por dobraduras, representa objetos ou formas geométricas utilizando exclusivamente a dobra de uma folha de papel geralmente quadrada. No contexto cultural japonês, o origami é visto como veículo para desenvolvimento de habilidades motoras, raciocínio espacial e concentração.

A primeira ação sugerida pelos autores pede que o estudante “Dobre um pedaço de papel de origami em duas partes de mesmo tamanho.” O texto continuou dizendo que “Existem várias maneiras de dobrar o papel de origami. Vamos desenhar linhas retas para dobrar.” (Isoda; Murata, 2011, p. 83) Essa introdução foi seguida de um exemplo (Figura 4) e de um convite para dobrar o pedaço de papel de outras maneiras. Esse convite não foi aleatório, mas guardou a intenção de os estudantes entenderem mais à frente que uma dessas partes iguais será denominada de , independentemente de como foi repartida em duas partes iguais.

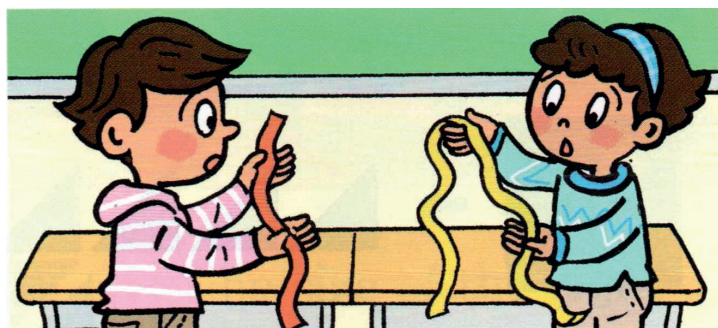
**Figura 4** - Dobrar o pedaço de papel em duas partes de mesmo tamanho.



Fonte: Isoda e Murata (2011, p. 83).

Em seguida, os autores anunciaram que “uma parte de uma coisa repartida em duas partes iguais é chamada um meio e é escrita como  $\frac{1}{2}$ . Logo após, pede que realizem mais uma dobra sugerindo duas maneiras para fazê-lo. Do mesmo modo, anunciaram que uma dessas quatro partes é chamada de e dizem que números como  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{2}{4}$  são chamados de frações. Essa lógica rapidamente se estendeu até a dobradura de  $\frac{1}{8}$ , quando o planejamento alcançou o que mais se queria - a apresentação do problema: “Masato e Emi encontraram fitas em suas casas. Cortaram metade do comprimento total de cada fita. No dia seguinte, na escola, decidiram trocar as fitas. Então ficaram confusos. O que os deixou confusos? Vamos discutir o que eles precisam fazer.” (Isoda; Murata, 2011, p. 86, tradução livre) A Figura 5 é apresentada ao lado do convite para discussão.

**Figura 5** - O problema das fitas cortadas pela metade e com comprimentos diferentes.



Fonte: Isoda e Murata (2011, p. 86).

Observe o leitor que o problema é propositalmente amplo para que os estudantes possam chegar a discutir diferentes fatos a exemplo de: (1) ambas as fitas foram cortadas pela metade e, por isso, representam  $\frac{1}{2}$ , mas não têm o mesmo comprimento; (2) O mesmo acontecerá se ambos cortarem as fitas novamente ao meio - representam  $\frac{1}{4}$ , mas não têm o mesmo comprimento; (3) se Emi cortar a fita pela metade mais uma vez, é possível que o  $\frac{1}{4}$  da fita de Emi seja maior que a metade da fita de Masato, logo, existe a possibilidade de  $\frac{1}{4}$  ser maior do que  $\frac{1}{2}$ . Todas essas possibilidades devem ser antecipadas no planejamento efetuado pelo grupo de *Jugyokenkyu*. Mais do que isso, o planejamento deve prever como lidar com dúvidas, questionamentos, equívocos, reações de seus estudantes e alimentar a próxima etapa da aula - o *neriage* - quando os estudantes apresentarão suas reflexões acerca do problema posto e registrado na lousa cada diferente estratégia (*bansho*).

Ao final do *neriage*, e inspirado na produção discente e no planejamento da aula, o professor sintetiza pontos importantes que devem ser realçados de todo o trabalho, tal como uma história: contexto das frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{8}$  e apresentação do problema (início da história), seguido do trabalho solo dos estudantes e de suas apresentações do que pensaram (meio da história), culminando com a síntese da aula (fim da história).

Esse trabalho seminal será objeto de retomada no terceiro ano do Ensino Básico, justamente com as frações e , mas avançando em duas frentes: frações com outras unidades de medida e em outros contextos de medição e de parte-todo, com apelos discretizados e contínuos. Depois disso, há continuidade nos anos subsequentes.

## PROBLEMA SOBRE DIVISÃO COM RESTOS

Um relatório de 2012 do Instituto Nacional de Pesquisa de Políticas Educacionais do Japão sobre a Avaliação Nacional de Capacidade Acadêmica (2007-2010) indicou um bom domínio da fluência computacional de estudantes japoneses, com uma taxa média de sucesso de 89,3% em questões de multiplicação e divisão de números inteiros. No entanto, o estudo também apontou a dificuldade de compreensão do significado dos restos na divisão e na aplicação dessa ideia em situações cotidianas. Isso sugere que os estudantes são capazes de executar procedimentos matemáticos por meio da aplicação direta de algoritmos, ainda que apresentem pouca ou nenhuma compreensão conceitual. Entretanto, revelam dificuldades em mobilizar essas mesmas operações em diferentes situações, especialmente naquelas que exigem a captação e interpretação de dados em um enunciado e a opção adequada da operação a ser empregada. Nasceu, daí, uma demanda que justificou desenvolvimento de um planejamento minucioso no âmbito de um *Jugyokenkyu*. Esse planejamento está minuciosamente descrito e documentado em 11 páginas de um documento disponibilizado para os que acompanharam a aula.

O documento apresenta o contexto desse ensino e como o conteúdo se localiza na escolaridade. Ele explica que a divisão é introduzida no terceiro ano como uma operação distinta da multiplicação, embora matematicamente seja sua inversa. Nessa etapa, o ensino privilegia situações concretas que permitam compreender a ideia de dividir quantidades em duas interpretações: a divisão quotitiva, que determina quantos grupos de determinado tamanho podem ser formados (por exemplo, 12 itens distribuídos em grupos de 3 formam 4 grupos), e a divisão partitiva, em que se reparte uma quantidade igualmente entre certo número de partes (12 itens divididos entre 3 pessoas resultam em 4 para cada uma). O significado da divisão permanece o mesmo tanto para divisões exatas (sem resto) quanto para divisões com resto, pois em ambos os casos o processo envolve formar grupos iguais.

Depois de discorrer sobre a matemática envolvida nesse processo de divisão com e sem restos, o documento anuncia que o ensino dessa unidade (dez aulas) buscará que os estudantes compreendam os significados de “tamanho do grupo”, “número de grupos” e “resto”, distinguindo-os por meio de atividades práticas e conectando essas experiências às expressões e equações matemáticas. A divisão com resto será apresentada como uma ampliação da divisão estudada anteriormente, sendo o caso sem resto apenas uma situação particular em que o resto é zero. Nesse ínterim serão propostos problemas que desafiem os estudantes a interpretar o significado do resto conforme o contexto, reconhecendo quando ele deve ser considerado ou desconsiderado, de modo a consolidar a compreensão conceitual da divisão.



Com esse propósito, o documento definiu quatro objetivos para a unidade: (1) com base no conhecimento prévio da divisão sem resto, compreender o significado da divisão com resto e formas de cálculo utilizando a relação entre as operações de multiplicação e divisão e os processos de formação de grupos iguais; (2) compreender a divisão integrando a divisão sem resto e a divisão com resto, podendo ser por objetos concretos, diagramas, expressões ou equações matemáticas (pensamento matemático); (3) calcular a divisão com resto; determinar quocientes e restos (habilidades matemáticas); e (4) aprofundar a compreensão da divisão ao conhecer o significado do resto e a relação entre o resto e o divisor (aprofundar o conhecimento e a compreensão do tema). Em seguida, detalhou textualmente e teoricamente como cada um desses objetivos seria alcançado durante as dez aulas, progredindo para uma seção com o detalhamento das ações práticas em cada aula. O detalhamento foi apresentado em uma tabela de três colunas, que descrevia: a meta de cada uma das dez aulas, as atividades a serem desenvolvidas e a forma de avaliação da aprendizagem com base nos objetivos da unidade.

Em uma dessas aulas, o problema dos quatro jogos foi apresentado. A ideia era propor algo que não usasse palavras ou termos que são frequentemente associados à divisão como “compartilhar”, “quantas vezes”, “quantos grupos”. Os estudantes deveriam identificar padrões no problema e representá-los em uma tabela. Para isso, um cartaz foi fixado à lousa pela professora (Figura 6).

**Figura 6** - (a) cartaz fixado pela professora; (b) tradução livre do japonês para o inglês.



Fonte: arquivo pessoal da autora (Souza, 2013).

Cada quadrante apresentava o nome de um jogo bem conhecido pelos estudantes: *Dodge bee*, *Keidro*, *Dodge ball* e *Kohri*. *Recreation* (Recreação) na elipse central era indicativo dos quatro jogos, tal como um título. A professora disse para os estudantes considerarem os quatro jogos devendo ser jogados um único a cada semana. *Dodge bee* na semana 1, *Keidro* na semana 2, *Dodge ball* na semana 3, *Kohri* na semana 4, *Dodge bee* na semana 5, e assim sucessivamente. Depois, a professora anunciou o problema: a questão é determinar qual jogo será jogado na semana 26. Antes de solicitar que os estudantes pensassem individualmente uma solução ou expressão que resolvesse para quaisquer semana, ela construiu em conjunto com os alunos uma simulação começando por *Dodge bee*. Ela apontou para o quadrante de *Dodge bee* e disse “1”, apontou para *Keidro* e disse “2”, e assim seguiu até o 4. Continuou com mais uma rodada pelos quadrantes: “5, 6, 7, 8”. A turma a acompanhou em voz alta em toda a simulação. A professora interrompeu a certa altura numérica e solicitou uma solução para os estudantes.

O planejamento dizia haver expectativa de que alguns estudantes contassem os jogos um a um até alcançar a 26ª semana. Mas, em seguida, ela perguntaria como seria se a quantidade de semanas fosse grande. Nessa seara, o documento previa que os estudantes percebessem o incremento de 4 em 4 semanas e que talvez a tabuada de 4 fosse um recurso lembrado. Logo, havia a expectativa de que os estudantes atribuíssem ao *Kohri* as semanas 4, 8, 12,..., ou seja, a tabuada do 4. Daí, eles avançariam para  $4 \times 6 = 24$  e, portanto, a semana 26 seria a vez do jogo *Keidro*. Ao alcançarem essa compreensão, eles seriam incentivados a representar a ideia  $26 = 4 \times 6 + 2$ .

Além disso, havia expectativa de que os estudantes percebessem que essa equação é a mesma usada em problemas de divisão e que essas conclusões levassem à pergunta: “Podemos usar a divisão com resto?” Mais além, os números da semana do jogo *Kohri* serão os números que podem ser divididos igualmente por 4. Os números da semana do jogo *Dodge bee* terão resto 1 quando divididos por 4. Os números da semana para o jogo *Keidro*, terão resto 2 e os números da semana para o jogo *Dodge ball* terão resto 3.

O documento ainda apresentava expectativas de que para gerar o conjunto de questionamentos, os estudantes teriam tempo para ouvir e compreender as ideias dos colegas. A ideia era a de obtenção da maior quantidade de estratégias emersas dos estudantes na etapa de comparação e discussão de resoluções. Em outras palavras, ao fazer com que expliquem suas ideias ou discutam as características de suas estratégias, eles poderão se apropriar das diferenças entre seus próprios métodos de solução e identificar vantagens de uma sobre outras e usá-las em empreendimentos futuros.

O fluxo dessa aula foi minuciosamente detalhado em outra tabela com três colunas: (1) tempo destinado para cada ação; (2) conteúdo e tarefas; (3) considerações instrucionais e relação com o tema de pesquisa (*Research Lesson*). Depois, a próxima seção apresenta quatro pontos de avaliação da aprendizagem dos estudantes a serem respondidos pelos observadores da aula e, possivelmente, pelo *Koshi*, se algum foi convidado a atuar nessa função (pessoa experiente no tema).

Observe o leitor que o planejamento da aula sobre divisão com restos ultrapassou as etapas visíveis preconizadas por Fujii (2018) - a apresentação do problema pelo professor, a elaboração das soluções pelos estudantes, a comparação e discussão dessas soluções e o resumo final da aula. Para além dessa estrutura observável, o processo de planejamento envolveu um cuidadoso exame do que se pode chamar de dimensões “invisíveis” da aula: a investigação das razões pelas quais os estudantes, embora soubessem realizar cálculos de divisão, apresentavam dificuldades em aplicá-los em situações-problema, e a constatação de que ainda não haviam se apropriado plenamente dos conceitos de divisão com resto. Nesse contexto, foram delineados objetivos pedagógicos alinhados às necessidades reais dos estudantes, indo além do mero domínio procedimental do conteúdo. O planejamento contemplou o desenvolvimento do interesse, do entusiasmo e da atitude investigativa, bem como o fortalecimento do pensamento e das habilidades matemáticas. Incluiu a preocupação com as perguntas que poderiam emergir dos próprios estudantes, as possíveis reações diante das estratégias adotadas e as limitações manifestadas, por exemplo, na contagem semana a semana de quantidades envolvidas no problema.

Houve, ainda, a intenção de favorecer a construção de representações e registros que auxiliassem na organização do raciocínio - como o uso de tabelas ou outros instrumentos de sistematização -, promovendo a ampliação do pensamento ao lidar com uma grande quantidade de semanas no “jogo da semana” e ao refletir sobre quais jogos assumiriam o papel de resto na divisão por quatro.

O planejamento também incluiu a condução criteriosa do *neriage* (momento de discussão coletiva), o controle do tempo didático, o delineamento do fluxo das ações em sala e a definição dos focos

de observação para os professores participantes. Em síntese, tratou-se de um documento extenso, com 11 páginas, que explorou de forma mais detalhada possível cada etapa da aula e evidenciou a complexidade e a intencionalidade subjacentes ao ensino da divisão com restos.

## À GUIA DE CONCLUSÃO

Para os professores japoneses, *Jugyokenkyu* é parte integrante do ensino, “como o ar”, [...] e, assim como com o ar, tem sido difícil ver do que realmente é feito o *Jugyokenkyu*. (Takahashi; McDougal, 2016, p. 514)

Este artigo se propôs a discutir de forma crítica e articulada as perspectivas japonesas acerca da resolução de problemas matemáticos no interior do *Jugyokenkyu*, trazendo ao primeiro plano como essa prática educacional transcende meras práticas procedimentais e pautadas em resultados para se constituir em um *modus vivendi* pedagógico. As argumentações permitiram compreender que a resolução de problemas não é um componente acessório na seara educacional japonesa da matemática, mas o eixo central em torno do qual gravitam o planejamento, a implementação, a observação e a reflexão das aulas.

Essa relação profunda se manifesta na propulsão do processo, que reside no aspecto invisível e conceitual do ensino por meio da resolução de problemas. Essa interdependência e indissociabilidade é que atuam como um equilíbrio (tal como as duas rodas da carroça ditas por Fujii (2018)) que integram e informam cada uma das etapas do ciclo do *Jugyokenkyu*, desde a definição de metas (*Goal Setting*), que direciona a investigação para o desenvolvimento do pensamento matemático, até a discussão pós-aula (*Post-Lesson Discussion*), que consolida a aprendizagem e visa ao aprimoramento em futuros investimentos. Nesse ínterim há o planejamento da aula (*Lesson Planning*) quando o problema é cuidadosamente selecionado para atender os objetivos de toda a aula e que seja capaz de inspirar em ações futuras e interdependentes do mesmo conteúdo curricular. Esse plano é levado a cabo em uma aula-pesquisa (*Research Lesson*) tendo os estudantes trabalhado autonomamente, enquanto o professor e os membros do *Jugyokenkyu* os monitora em termos de aprendizagem.

A articulação entre os aspectos conceituais e procedimentais do *Jugyokenkyu* - desde a definição de metas de longo prazo até a reflexão pós-aula - revela que a resolução de problemas opera como princípio epistemológico e didático que orienta toda a ação docente no Japão. A seleção criteriosa de um único problema, a antecipação de estratégias discentes, a condução intencional *kikan-jyunshi*, a promoção do diálogo reflexivo amplo no *neriage* e a síntese conceitual no *matome* são etapas que, integradas, conferem profundidade e intencionalidade ao processo de aprendizagem. Como discutido nos problemas analisados - desde a comparação de áreas até a introdução de frações por meio do origami e a divisão com resto -, a abordagem japonesa valoriza muito mais o percurso intelectual e a produção do estudante em detrimento do resultado puro e simples, incentivando a criatividade, a autonomia e a construção colaborativa do conhecimento.

No problema da área, a comparação de um retângulo e um quadrado, com perímetros idênticos, mas áreas distintas, foi planejada para explorar e superar um equívoco recorrente dos estudantes. Perímetros iguais levam necessariamente a áreas iguais? Essa ideia trabalhada no primeiro ano do Ensino Básico foi continuada no quarto ano. A esse respeito, a sequência de atividades nos livros didáticos japoneses é estruturada como uma sucessão cuidadosamente encadeada de problemas

e experiências de aprendizagem, tal como uma história com começo, meio e fim, para promover o desenvolvimento progressivo dos conceitos.

O problema das frações, por sua vez, estimulou reflexões sobre como a proposição de uma situação ampla pode permitir que os estudantes cheguem a discutir fatos cruciais, como a relatividade de comprimentos expressos por frações. E o que subjaz a essas ações docentes estimuladoras? A força dessa concepção reside em fomentar o pensamento matemático e a aprendizagem independente, muito mais do que o resultado de um problema.

O problema da divisão com restos contou com um planejamento de dez aulas materializado em um processo intencional e minucioso, voltado não apenas à execução das etapas tradicionais de uma aula - apresentação do problema, resolução, discussão e síntese -, mas, sobretudo, à promoção de aprendizagens mais profundas. O documento destacou a preocupação em compreender por que os estudantes, embora dominassem o cálculo, apresentavam dificuldades em aplicar a divisão em situações-problema e em atribuir significado ao resto. As ações planejadas favoreceram o desenvolvimento do pensamento matemático, da atitude investigativa e da capacidade de representar e organizar ideias por meio de tabelas e estratégias próprias. Durante o processo, os estudantes ampliaram sua compreensão sobre o papel do resto, passando a reconhecer suas implicações nos contextos propostos, e avançaram na articulação entre cálculo, representação e interpretação. Assim, a aprendizagem emergiu não apenas como domínio técnico da operação, mas como construção conceitual sustentada pela reflexão, argumentação e sistematização coletiva.

Em suma, a resolução de problemas, no contexto do *Jugyokenkyu*, é um meio sofisticado de aprendizagem de conteúdos matemáticos que vai além do mero exercício prático, configurando-se como um modo fundamental para cultivar a capacidade de viver o pensamento independente e criativo. A adoção bem-sucedida do *Jugyokenkyu* exige, portanto, uma compreensão profunda desse princípio, reconhecendo que a sua riqueza está na articulação intrínseca de uma filosofia de ensino que coloca o estudante no centro da construção do conhecimento, a partir da superação de desafios matemáticos cuidadosamente planejados.

Ressaltamos, como dissemos, que o sucesso educacional do *Jugyokenkyu* está intrinsecamente vinculado a seu contexto cultural. A tentativa de transposição acrítica para outros ambientes, desconsiderando a centralidade da resolução de problemas e a lógica colaborativa que sustenta essa prática, pode resultar em esvaziamento de seu potencial formativo. Como alertam autores como Stigler e Hiebert (1999) e Watanabe (2018), o ensino é uma atividade culturalmente situada, e a apropriação do *Jugyokenkyu* exige, portanto, um olhar atento às suas premissas fundamentais.

Por fim, a experiência japonesa demonstra que a resolução de problemas, quando concebida como núcleo do processo educativo e articulada a um ciclo contínuo de estudo, prática e reflexão coletiva e colaborativa, pode promover um ensino matemático mais alinhado às demandas da sociedade. Que esta reflexão inspire educadores e formuladores de políticas a valorizar não apenas a estrutura do *Jugyokenkyu*, mas sobretudo a essência pedagógica que o sustenta, tal como o ar que respiramos: a crença no poder da investigação, da colaboração e do pensamento matemático autêntico.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (Fapes) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro à autora para desenvolvimento de pesquisas científicas.



## REFERÊNCIAS

- ABRÃO, F. V.; ALLEVATO, N. S. G. Estudo de Aula e Resolução de Problemas na Formação de Professores do 5º Ano: desafios e experiências no contexto da covid-19. **Educação Matemática em Revista**, [S. l.], v. 3, n. 26, p. 129, 2025.
- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática. Por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. *et al.* (Org.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-57.
- APM (ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA). [Site institucional] Lisboa: APM, 1988. Disponível em: <https://www.apm.pt/>. Acesso em: 3 out. 2025.
- BAILEY, J. Embedding problem-solving in a primary mathematics programme. **Waikato Journal of Education**, [S. l.], v. 22, n. 4, p. 19-31. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.15663/WJE.V22I4.555>. Acesso em: 05 out. 2025.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.
- DOIG, B.; GROVES, S.; FUJII, T. The critical role of task development in lesson study. In: HART, L. C.; ALSTON, A. S.; MURATA, A. (Eds.). **Lesson study research and practice in mathematics education**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 181-199.
- DOORMAN, M.; DRIJVERS, P.; DEKKER, T.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; DE LANGE, J.; WIJERS, M. Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. **ZDM Mathematics Education**, [S. l.], v. 39, n. 5, p. 405-418, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/S11858-007-0043-2>. Acesso em: 05 out. 2025.
- FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. **Lesson Study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning**. Autores Associados, 2004.
- FUJII, T. Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of lesson study. **ZDM Mathematics Education**, [S. l.], v. 48, p. 411-423, 2016.
- FUJII, T. Implementing Japanese lesson study in foreign countries: misconceptions reveied. **Mathematics Teacher Education and Development**, [S. l.], v. 16, n. 1, p. 65-83, 2014.
- FUJII, T. Lesson study and teaching mathematics through problem solving: the two wheels of a cart. In: **Mathematics lesson study around the world**, ICME13 Monographs, Springer, 2018. doi:10.1007/978-3-319-75696-7\_1
- FUJII, T.; KUMAGAI, K.; SHIMIZU, Y.; SUGIYAMA, Y. A cross-cultural study of classroom practices based on a common topic. **Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics**, [S. l.], v. 17, p. 185-194, 1998.
- FUJITA, H. A narrative approach to teaching. **Journal of Mathematics Education**, Califórnia, v. 22, n. 1, p. 1-12, 1999.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HARGREAVES, A. **Changing teachers, changing times:** teachers' work and culture in the postmodern age. Cassell, 1996.

ISODA, M. Lesson Study: Japanese problem-solving approaches. *In: Conference on reapplying exemplary practices in Mathematics Education*. Koh Samui, 2010a.

ISODA, M. Lesson Study: problem solving approaches in Mathematics Education as a Japanese experience. **Procedia Social and Behavioral Sciences**, [S. l.], v. 8, p. 17-27, 2010b.

ISODA, M. Problem solving approaches in Mathematics Education as a product of Japanese Lesson Study. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, Penang, v. 34, n. 1, p. 2-25, 2011.

ISODA, M. Capítulo introdutório "Problem Solving Approach to Develop Mathematical Thinking". *In: ISODA, M.; KATAGIRI, S. (eds.). Mathematical Thinking: how to develop it in the classroom* (Monographs on Lesson Study for Teaching Mathematics and Sciences, Vol. 1). Singapura: World Scientific, 2012. p. 1-28. DOI: 10.1142/8163.

ISODA, M.; MURATA, A. Tokyo: Tokyo Shoseki. *In: ISODA, M.; MURATA, A. (Ed.). Study with your friends: Mathematics for elementary school. 2<sup>nd</sup> grade, v. 2, English version*. Tokyo: Tokyo Shoseki, 2011.

ISODA, M.; OLFOS, R. **El Enfoque de Resolución de Problemas:** en la enseñanza de la matemática a partir del Estudio de Clases. Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009.

ISODA, M.; OLFOS, R. **Teaching multiplication with Lesson Study:** Japanese and Ibero-American theories for international Mathematics Education. Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-28561-6.

JSME (JAPAN SOCIETY OF MATHEMATICAL EDUCATION). *[Site institucional]*. Tóquio: JSME, 1919. Disponível em: <https://www.sme.or.jp/en/>. Acesso em: 3 out. 2025.

KILPATRICK, J. Problem-solving and the Structure of Mathematics. **The Journal of Research in Mathematics Education**, [S. l.], v. 1, n. 2, p. 122-137, 1970.

KITADA, Y. Teacher agency in the modification of Japanese lesson study in the United States. **Educational Studies in Japan: International Yearbook**, [S. l.], v. 16, p. 45-57, 2022.

KUSANAGI, K. N. The Bureaucratising of Lesson Study: A Javanese Case. **Mathematics Teacher Education and Development**, [S. l.], v. 16, n. 1, p. 65-83, 2014.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 955-978, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1590/1980-4415V29N53A09>. Acesso em: 5 out. 2025.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2022.

MIMURA, K.; WATANABE, Y. **Developing an evaluation framework in lesson study on active learning methods**. [S. l.: s.n.], 2021. Disponível em: [https://www.google.com/search?q=https://members.aect.org/pdf/Proceedings2020/43th\\_AECT\\_Abstract\\_Book\\_FINAL.pdf](https://www.google.com/search?q=https://members.aect.org/pdf/Proceedings2020/43th_AECT_Abstract_Book_FINAL.pdf). Acesso em: 5 out. 2025.

MORENO-ARMELLA, L.; ELIZONDO RAMÍREZ, R. La Geometría al encuentro del aprendizaje. **Educación Matemática**, Ciudad de México, v. 29, n. 1, p. 9-36, abr. 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.24844/EM2901.01>. Acesso em: 5 out. 2025.

MSJ (MATHEMATICAL SOCIETY OF JAPAN). *[Site institucional]*. Tóquio: MSJ, 1877. Disponível em: <https://www.mathsoc.jp/en/>. Acesso em: 3 out. 2025.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **An agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s**. Reston, VA: The Council, 1980.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: The Council, 1989.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: The Council, 2000.

OGISU, T. Global Expansion and Circulation of Lesson Study Examining Changes in Japanese Discourses on Jugyo-kenkyu. *In: Working Paper Series in Study of "Knowledge Diplomacy" and Internationalization of Higher Education in Asia Project No. 5*. Tokyo: Center for Advanced School Education and Evidence-Based Research, Graduate School of Education, The University of Tokyo, 2019. Disponível em: <https://www.schoolexcellence.p.u-tokyo.ac.jp/wp-content/uploads/2020/04/44b4666d3dc7d002b2d54c8ebc1d60ff-1.pdf>. Acesso em: 5 out. 2025.

SBEM (SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA). *[Site institucional]*. *[S. l.]*: SBEM, 1988. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/a-sociedade>. Acesso em: 3 out. 2025.

SBM (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA). *[Site institucional]*. Rio de Janeiro: SBM, 1969. Disponível em: <https://sbm.org.br>. Acesso em: 3 out. 2025.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. New York: Academic Press, 1985.

SEAMS (SOUTHEAST ASIAN MATHEMATICAL SOCIETY). *[Site institucional]*. Singapore: SEAMS, 1972. Disponível em: <https://www.seams-math.org/>. Acesso em: 3 out. 2025.

SEIEM (SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA). *[Site institucional]*. Madrid: SEIEM, 1996. Disponível em: <https://seiem.es/>. Acesso em: 3 out. 2025.

SHIMIZU, Y. Aspects of mathematics teacher education in Japan: focusing on teachers' roles. **Journal of Mathematics Teacher Education**, *[S. l.]*, v. 2, p. 107-116, 1999.

SOUZA, M. A. V. F. de. Lesson Study por não-japoneses: jugyokenkyu é possível fora do Japão? **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 14, n. 34, p. 01-25, 2025.

SOUZA, M. A. V. F. de. **Vídeo sobre uma aula de divisão com restos**. [arquivo pessoal]. Kōfu - Província de Yamanashi, 2013.

SOUZA, M. A. V. F. de; POWELL, A. B. Kyozaikenkyu: essential lesson planning in japanese lesson study. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, *[S. l.]*, v. 13, p. 01-24, 2023.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **Teaching and Assessing Mathematical Problem Solving**. Reston, VA: NCTM, 1989. p. 1-22.

STIGLER, J.; HIEBERT, J. **The teaching gap**: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. Free Press, 1999.

TAKAHASHI, A. C. Characteristics of Japanese mathematics lessons. **Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics**, [S. l.], v. 25, p. 37-44, 2006.

TAKAHASHI, A.; McDOUGAL, T. Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. **ZDM Mathematics Education**, [S. l.], v. 48, p. 513-526, 2016.

WATANABE, T. Japanese Lesson Study in the United States. **Journal of the International Society for Design and Development in Education**, [S. l.], v. 3, n. 11. 2018.

YAMAZAKI, T.; SOYA, T. A study on a method of teaching analysis in a problem-solving learning class: suggestion for the integrated studies in elementary Schools. In: *PROCEEDINGS OF THE 34TH ANNUAL MEETING OF JAPAN SOCIETY FOR CURRICULUM STUDIES*. 34., 2001. Tokyo.

YOSHIDA, M. Using lesson study to develop effective blackboard practice. In: Wang-Iverson, P.; Yoshida, M. (Eds.). **Building our understanding of lesson study**, Philadelphia: Research for Better Schools, 2005. p. 93-100.