

## CONTRIBUIÇÕES DE UM JOGO DIDÁTICO PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ELEMENTARES NO CAMPO DA GEOMETRIA ESFÉRICA E HIPERBÓLICA ANALISADAS SOB A LUZ DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

*GAME DIDACTIC OF CONTRIBUTIONS FOR TEACHING THE PROCESS OF TEACHING AND LEARNING BASIC CONCEPTS IN THE FIELD OF SPHERICAL GEOMETRY AND HYPERBOLIC ANALYZED UNDER THE LIGHT OF THE THEORY OF MEANINGFUL LEARNING*

WANDERLEY PIVATTO BRUM\*  
SANI DE CARVALHO RUTZ DA SILVA\*\*

### RESUMO

Este artigo apresenta os resultados de uma investigação com o objetivo de identificar contribuições de um jogo denominado “LobaRiemann” para o ensino de Geometria. A investigação repousa na Teoria da Aprendizagem Significativa e foi realizada com quinze estudantes do segundo ano do ensino médio de uma escola da rede pública de Tijucas, Santa Catarina. Para a coleta de dados, utilizamos um questionário que foi aplicado antes e após a aplicação do jogo, bem como observação direta. A partir dos resultados obtidos, verificou-se que o jogo “LobaRiemann” se mostrou efetivo no processo de ensino do conteúdo em questão e que contribuiu para a ocorrência de uma aprendizagem significativa, ou seja, a maioria dos estudantes conseguiu assimilar, diferenciar e reconciliar conceitos envolvendo Geometria Esférica e Hiperbólica.

**Palavras-chave:** Jogo Didático; Ensino Médio; Ensino de Geometria Não Euclidiana; Teoria da Aprendizagem Significativa.

### ABSTRACT

*This article presents the results of an investigation with the objective of identification the contributions of a game called “LobaRiemann” for the teaching of Geometry. The research based on the Theory of Meaningful Learning and application of 15 students of the second year of secondary education in a school of public network of Tijucas, Santa Catarina. For the data collection, we used questionnaire e observations, which were applied before and after the application of the game. From the results obtained, the game “LobaRiemann” proved to be effective in the process of teaching the content in question and that contributed to the occurrence of a significant learning, i.e. the majority of the students managed to assimilate, differentiate and reconcile concepts involving Spherical Geometry and Hyperbolic.*

**Keywords:** Game Didactic; Secondary Education; Teaching of Geometry Non-Euclidean; Theory of Meaningful Learning.

---

\* Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática - ufsc2013@yahoo.com.br

\*\* Doutorado em Ciências dos Materiais - sani@utfpr.edu.br

## INTRODUÇÃO

Dentre os inúmeros problemas pelos quais a Matemática tem passado nos últimos anos, um dos que se tem destacado basicamente, na área da Educação Matemática é o seguinte: como melhorar o ensino da Matemática? Isso porque muitas dificuldades são enfrentadas pelos professores e estudantes desta ciência em qualquer nível de ensino. Para Mendes (2001), essa questão pressupõe que o aperfeiçoamento da prática pedagógica dos professores poderá contribuir para solucionar os desafios surgidos durante a produção do conhecimento matemático.

Entre essas dificuldades, encontra-se a superação do modelo tradicional de ensino. Atualmente tornou-se comum encontrar professores de Matemática que fazem uso somente desta prática em suas aulas, sendo ainda mais frequente e evidente nas últimas séries do ensino fundamental e quase todo ensino médio onde são abordados conteúdos de Geometria. No entanto, é consenso entre os pesquisadores da área da educação, como Cabariti (2006), Kalleff (2004), Alves (2008), Carvalho (2011) e Cedrez (2012), que o ensino tradicional pode apresentar muitas desvantagens, com destaque a maneira como ocorre à transmissão do conhecimento que é unidirecional, ou seja, o professor expõe o conteúdo de maneira que o estudante não possa exercer sua criticidade sendo apenas um expectador. Desta forma, Martos (2012) relembra que os estudantes recebem e armazenam as informações de maneira mecânica e memorística e não são capazes de reproduzi-la em uma situação diferente da que lhe foi proposta anteriormente. Sobre este posicionamento unidirecional, a aula:

Gera o desinteresse dos alunos e conseqüentemente um baixo rendimento escolar, o que gera uma ineficiência no ensino. Além deste fator, a autora pontua que as aulas tradicionais também são em sua maioria, dissociadas do cotidiano dos alunos, o que gera uma incompreensão da matéria, pois os estudantes podem não conseguir fazer relação com algo que lhes é comum, e o conteúdo acaba por se tornar abstrato (KRASILCHIK, 2004, p. 341).

Condizente com esta situação, Santana (2008) aponta para vários estudos e pesquisas que mostram que o Ensino de Matemática, em geral, centraliza-se na simples memorização e repetição de nomes, fórmulas e cálculos, o que torna a matéria muitas vezes maçante e monótona fazendo com que os estudantes questionem o motivo pelo qual ela lhes é ensinada. Essa sintomática contribuiu para questionar a postura tradicional de ensino, na qual o estudante é agente passivo no seu processo de aprendizagem. Para Mortimer (2000), o ensino efetivo em sala de aula depende também de um elemento facilitador, representado pelo docente que pode sugerir uma situação problema relacionada com a realidade dos estudantes, com o intuito de fazer com que busquem em sua estrutura cognitiva respostas para tal problema. Este fato permite um maior incentivo na caminhada conjunta entre teoria e prática e, ao mesmo tempo, entre o real e o imaginário, em detrimento ao estilo de ensino unidirecional onde somente o docente transmite o conhecimento aos estudantes.

Ao mesmo tempo, levantaram-se sérias indagações: como encarar o processo educativo a partir disso? O que significa realmente ensinar e aprender? Como ensinar conceitos científicos de modo que os estudantes realmente aprendam? Quais garantias é possível obter após anos de ensino formal quando nossa primeira resposta a um certo problema será baseada em explicações cientificamente aceitas? Seremos capazes de modificar nossos conhecimentos prévios? Quais são os papéis dos estudantes e do professor nesse processo?

Ao responder essas perguntas, busca-se um entendimento da preocupação eminente com o processo de ensino e aprendizagem. A realidade é que, enquanto a linguagem cotidiana é muitas vezes responsável pela disseminação de explicações não científicas, onde o estudante apresenta significado para imagens, símbolos, modelos e representações, permitindo uma compreensão do mundo que o cerca, a prática de ensino em Matemática em todos os níveis ainda privilegia a memorização de termos técnicos, ou seja, um ensino centrado no livro didático e na exposição do docente (CARRASCOSA, PEREZ E VALDÉS, 2005). Como antídoto a esse cenário que se encontra o ensino de Matemática, uma das opções para tornar o aprendizado mais simples e prazeroso é a utilização de metodologias alternativas. As atividades lúdicas, estritamente os jogos, podem assim auxiliar os estudantes na apropriação dos conteúdos e conseqüentemente gerar uma aprendizagem significativa. A partir dessa breve apresentação, esse trabalho buscou responder a seguinte problemática: *Quais contribuições o jogo “LobaRiemann” pode proporcionar aos estudantes para a compreensão da existência da Geometria Esférica e Hiperbólica no espaço em que vivem?*

O objetivo desse artigo é divulgar uma investigação sobre as contribuições de um jogo didático denominado “LobaRiemann” como ferramenta instrucional no processo de aprendizagem de conceitos elementares no campo da Geometria Esférica e Hiperbólica, raramente apresentados no ensino médio. A investigação buscou afirmar o lúdico como estratégia que se encaixa nos pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa e que este instrumento didático também possa proporcionar momentos de descontração e posicionamento crítico em sala de aula. A justificativa tem relevo no número incipiente de publicações que tratam da abordagem de conteúdos de Geometria Esférica e Hiperbólica nos bancos escolares.

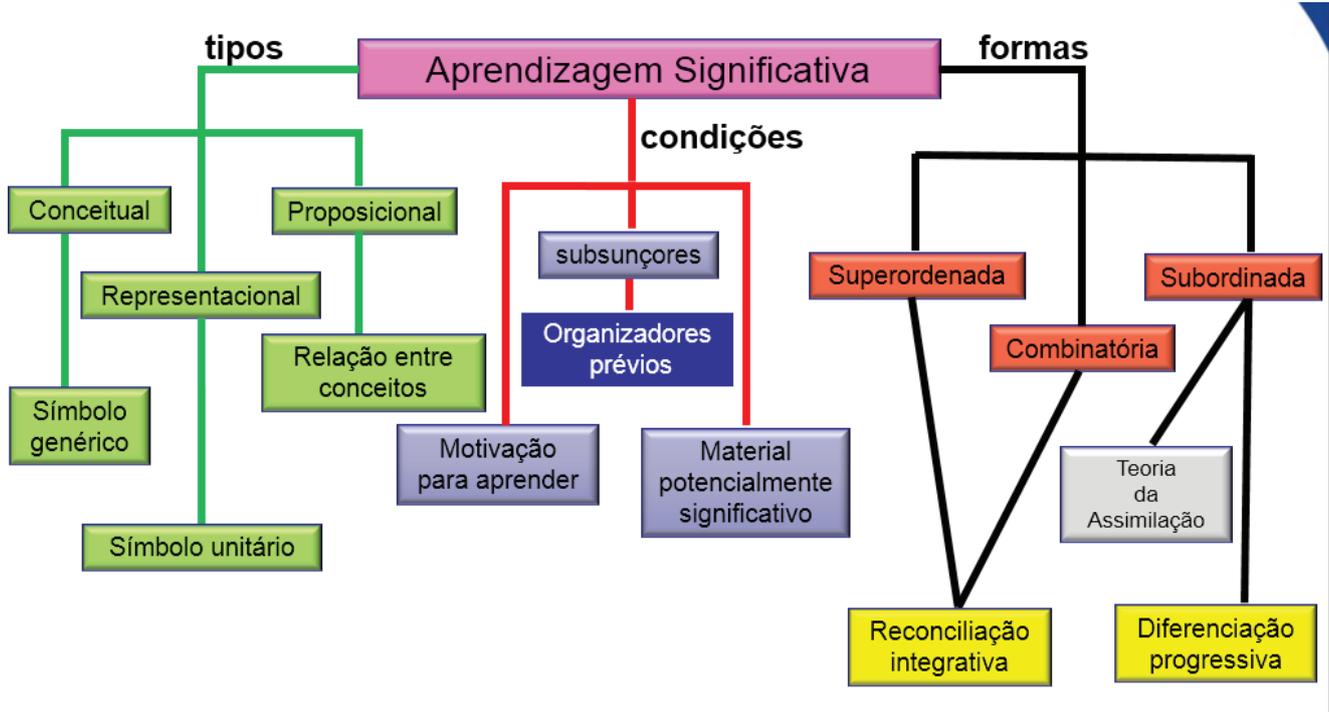
## OS PRESSUPOSTOS DA TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A Teoria da Aprendizagem Significativa foi formulada inicialmente pelo psicólogo norte americano David Paul Ausubel. As ideias de Ausubel, cujas formulações iniciais são dos anos 60, se encontram entre as primeiras propostas psicoeducativas em sua obra *Psicologia Educacional*, recebendo colaborações em 1980 de Joseph Donald Novak e Helen Hanesian, acerca de fatores sociais, cognitivos e afetivos na aprendizagem.

[...] é essencial levar-se em consideração as complexidades provenientes da situação de classe de aula, estas por sua vez, incluem a presença de muitos alunos de motivação, prontidão e aptidões desiguais; as dificuldades de comunicação entre professor e aluno; as características particulares de cada disciplina que está sendo ensinada; e as características das idades dos alunos (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 5).

Para os autores, a ideia central de aprendizagem significativa é uma reorganização clara da estrutura cognitiva, isto é, um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante na estrutura do conhecimento do estudante (figura 1). A aprendizagem significativa é uma tentativa de fornecer sentido ou estabelecer relações de modo não arbitrário e substancial (não ao pé da letra) entre os novos conhecimentos e os conceitos existentes no estudante. Em contraponto à aprendizagem significativa, surge a aprendizagem mecânica que para Ausubel, Novak e Hanesian (1980) é o tipo de aprendizagem, diferentemente do processo significativo, ocorrendo quando o estudante é apresentado a um novo conhecimento, e este, por motivos variados, não o relaciona com algum conceito que já exista em sua mente. Simplesmente, incorpora-se na sua estrutura cognitiva de maneira arbitrária e não substantiva.

**Figura 1** - Conceitos pertencentes a teoria ausubeliana.



**Fonte:** Elaborado pelo autor, 2013.

A aprendizagem (significativa ou mecânica) pode ocorrer por meio de recepção, enfatizado por Moreira (2010) como aquela em que todo o conteúdo vai ser aprendido é apresentada ao estudante na forma final ou por descoberta onde os conceitos não são fornecidos, mas deve ser “descoberto” pelo estudante antes que possa ser incorporado significativamente na sua estrutura cognitiva. No entanto, a aprendizagem por descoberta não é necessariamente significativa, nem aprendizagem por recepção é obrigatoriamente mecânica, mas se apresentam como um *continuum*. Para o autor, uma posição mais defensável é de que tanto a aprendizagem receptiva ou por descoberta podem ser mecânicas ou significativas dependendo das condições que ocorre a aprendizagem. Em ambos os casos (recepção ou descoberta), a aprendizagem significativa ocorre quando há um processo de interação no qual os conceitos mais relevantes e inclusivos (subsunçores) integram com o novo conhecimento a ser aprendido. A aprendizagem significativa é caracterizada por uma interação entre os aspectos específicos e relevantes da estrutura cognitiva e as novas informações por meio das quais essas adquirem significado e são integradas a uma estrutura hierárquica altamente organizada de subsunçores de maneira não arbitrária e não literal.

A aprendizagem significativa deve preponderar em relação a aprendizagem de associações arbitrárias, organizacionalmente isoladas, mecânica. Para isso, algumas condições são apontadas por Ausubel, Novak e Hanesian (1980): a existência prévia de conceitos subsunçores, compreendido pelos autores como um conceito já existente na estrutura cognitiva, capaz de servir de ancoradouro a uma nova informação, de modo que esta adquira significado para o estudante; o estudante precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica. A aprendizagem significativa pressupõe que o estudante manifeste uma disposição para a aprendizagem, ou seja, disposição para se relacionar de forma não arbitrária e substantiva ao novo conhecimento; o conteúdo escolar a ser aprendido tem que

ser potencialmente significativo, ou seja, deve estar relacionado à estrutura cognitiva do estudante, portanto, devem estar disponíveis em sua estrutura cognitiva subsunçores adequados.

A partir destas condições, Pozo (1998) e Lessa et al (2009) citam que é preciso entender que existe uma modificação no conhecimento balizado pela manifestação de interesse em aprender por parte do estudante e o material deverá ser potencialmente significativo. A percepção de uma aprendizagem significativa se consolida por meio de um processo que é considerado dinâmico e não unilateral, no qual os estudantes carregados de interconexões mentais e saberes se tornam peça fundamental nesse movimento de construção do conhecimento, contudo, se o estudante deseja simplesmente memorizar o processo de aprendizagem será mecânico e sem significado.

No curso da aprendizagem significativa, Moreira (2010) enfatiza que os conceitos interagem com os novos conteúdos, servindo de base para a atribuição de novos significados que também se modificam. Essa mudança progressiva vai tornando um subsunçor mais elaborado, mais diferenciado, capaz de servir de âncora para a aquisição de novos conhecimentos, processo este que Ausubel chama de diferenciação progressiva. Outro processo que ocorre no encaideamento da aprendizagem significativa é o que Moreira (2010) denomina de estabelecimento de relações entre ideias, que podem ser conceitos, proposições que já se encontram na estrutura cognitiva. A existência de conceitos estáveis e com certo grau de diferenciação são relacionados com outros conceitos, passando a adquirir novos significados levando a uma reorganização da estrutura cognitiva. Essa reorganização de conceitos é conhecida por reconciliação integrativa.

## FORMAS DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Durante o processo da aprendizagem significativa, a nova informação não estabelece uma espécie de elo com os elementos preexistentes da estrutura cognitiva, ao contrário, esses elos só ocorrem na aprendizagem automática. Na aprendizagem significativa, há uma mudança tanto na nova informação como no subsunçores com a qual o novo conhecimento estabelece relação, sendo que o resultado dessa interação é a assimilação de significados. Segundo Moreira e Masini (2001), a assimilação é um processo que ocorre quando um conceito ou proposição potencialmente significativa é assimilado sob um ideia ou conceito mais inclusivo já existente na estrutura cognitiva. A assimilação é compreendida como um relacionamento entre os aspectos relevantes preexistentes da estrutura cognitiva e tanto a nova informação como a preexistente são modificadas no processo. A teoria ausubeliana apresenta três formas de aprendizagem significativa, segundo a teoria da assimilação: a subordinada, superordenada e a combinatória.

### Aprendizagem subordinada

Segundo Ausubel, a maior incidência de aprendizagem significativa é do tipo subordinada, ou seja, a nova ideia aprendida se encontra hierarquicamente subordinada a ideia preexistente. Coll, Marchesi e Palácios (2007) comentam que a estrutura cognitiva do sujeito responde a uma organização hierárquica na qual os conceitos se conectam entre si mediante relações de subordinação, dos mais gerais aos mais específicos.

### Aprendizagem superordenada

Nesta forma de aprendizagem significativa o novo conceito é mais geral e inclusivo que os conceitos subsunçores. Ocorre quando um conceito ou proposição mais geral do que algumas ideias já

estabelecidas na estrutura cognitiva do estudante, é adquirido e passa a ser assimilado. Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a nova aprendizagem será superordenada quando se aprende uma nova proposição inclusiva que condicionará o surgimento de várias ideias, ocorrendo no curso do raciocínio ou quando o material apresentando é organizado indutivamente ou envolve a síntese de ideias compostas.

### Aprendizagem combinatória

A aprendizagem de novas proposições que não apresentam relação subordinada nem superordenada com ideias relevantes já adquiridas anteriormente na estrutura cognitiva do estudante é denominada aprendizagem combinatória. Conforme Pozo (1998), na aprendizagem significativa combinatória, a ideia nova e as ideias já estabelecidas não estão relacionadas hierarquicamente, porém se encontram no mesmo nível, não sendo nem mais específica nem mais inclusiva do que outras ideias. Ao contrário das proposições subordinadas e superordenadas, a combinatória não é relacionável a nenhuma ideia particular da estrutura cognitiva.

## **TIPOS DE APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

A teoria ausubeliana apresenta três tipos de aprendizagem significativa: a aprendizagem representacional, a aprendizagem conceitual (conceitos) e a proposicional. A representacional se refere ao significado dos símbolos unitários, a de conceitos tem sua representação por meio de símbolos, todavia são genéricos ou categóricos, enquanto a proposicional envolve uma relação entre conceitos ou significado de ideias. A aprendizagem representacional é o tipo mais básico de aprendizagem significativa. Portanto, a aquisição de vocabulário dentro de uma determinada língua, onde as primeiras palavras que a criança aprende são representações de objetos ou fatos reais e não categorias.

A aprendizagem representacional significa aprender o que um determinado padrão de estimulação (como, por exemplo, um padrão diferenciado de sons ou símbolos “cachorro” ou mesmo um símbolo gráfico, como um desenho ou um croqui) representa e com isso significa aproximadamente a mesma coisa (uma imagem de cachorro) significa (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 44).

Por exemplo, uma criança que aprende pela primeira vez o significado da palavra “cachorro”, o objetivo é que o som represente, ou seja, equivalente a um objeto (cachorro) que está em observação naquele momento, e, portanto, significando a mesma imagem propriamente dita. A criança relacionará de forma não arbitrária e substantiva esta proposição ao conteúdo relevante de sua estrutura cognitiva. Após o término do processo de aprendizagem significativa, a palavra cachorro será capaz de provocar o aparecimento de uma imagem composta de vários cachorros em sua experiência. Um indivíduo num estágio primitivo de desenvolvimento, o que um determinado símbolo significa é inicialmente algo completamente desconhecido para ele, é algo que ele tem que aprender, tal processo de aprendizagem é denominado representacional (AUSUBEL, NOVAK E HANESIAN, 1980). Assim, aprender a palavra “cachorro” para uma criança de um ano significa apenas a imagem de seu próprio cachorro, contudo, para uma criança pré-escolar significa os atributos essenciais e não particulares de uma imagem genérica de cachorro.

Para os autores, o passo principal para a aprendizagem representacional é dado geralmente próximo ao fim do primeiro ano de vida quando a criança adquire a compreensão geral de que, é

possível usar o símbolo para representar qualquer significado. Aprender o significado de uma palavra exige conhecimento prévio da palavra propriamente dita, do que outras formas de aprendizagem representacional, uma vez que, aprender a palavra conceito difere essencialmente da aprendizagem do significado das palavras que não representam conceitos. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) enfatizam que se um conceito é adquirido de maneira mecânica, sem que seus atributos sejam relacionados de maneira não arbitrária e substantiva à sua estrutura cognitiva, este terá pouca validade e será esquecido rapidamente. Com relação a não arbitrariedade, os autores lembram que o material em questão proporcione um caráter de não aleatoriedade, ou seja, nele deve transitar uma base adequada e quase auto evidente, de modo a ser possível relacionar ideias relevantes que os estudantes são capazes de elaborar. Por outro lado, a relação substantiva prioriza que o material de aprendizagem deve permitir que símbolo ou grupo de símbolos equivalentes se relacione à estrutura cognitiva sem alteração no significado do conceito.

Ausubel, Novak e Hanesian (1980) definem conceito como objetos, eventos, situações que possuam atributos essenciais comuns que são designados por algum símbolo. Existem dois métodos de aprendizagem de conceitos: primeiramente a formação de conceitos, ocorrida a partir da abstração indutiva de experiências reais por meio de descoberta, levado à estágios sucessivos de formulação de hipóteses e generalização. As crianças aprendem o conceito de “cachorro” por meio de encontros sucessivos com cachorros. Nesse caso, o símbolo “cachorro” é aprendido antes do conceito. Uma segunda maneira de aprendizagem de conceitos é a assimilação no qual consiste em relacionar os novos conceitos com os anteriormente formados ou assimilados já existentes na estrutura cognitiva da criança, isto é, à medida que ela cresce e entra na escola e passa a receber instrução formal, o vocabulário da criança aumenta e novos conceitos são adquiridos por meio do processo de assimilação (AUSUBEL, NOVAK E HANESIAN, 1980). Enquanto na formação de conceitos o significado é consequência da abstração da própria realidade, na assimilação de conceitos é extraído de uma interação da nova informação com conceitos previamente adquiridos. A tarefa de aprendizagem significativa não consiste em aprender o que as palavras representam individualmente ou combinadas, mas antes aprender o significado de novas ideias expressas a partir de frases ou orações compostas de dois ou mais conceitos. O somatório dos significados de conceitos que compõem a proposição não terá o mesmo significado da proposição.

Para Novak e Gowin (1996), as proposições consistem em dois ou mais termos conceituais ligados a uma unidade semântica. Pensando em uma metáfora, as proposições são “moléculas” a qual se constroem significados e os conceitos são os “átomos” do significado. Esse tipo de aprendizagem supõe que o estudante já tenha em sua estrutura cognitiva o significado dos conceitos que compõem a proposição, entendendo que, a partir da idade escolar, ocorrerá o processo fundamental da aprendizagem ou aquisição de significados.

A busca de indícios para a ocorrência de uma aprendizagem significativa não é uma tarefa simples. Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), verificar se uma aprendizagem ocorreu simplesmente perguntando ao estudante os atributos de um conceito ou proposição é arriscado, haja vista a possibilidade da utilização de respostas mecanicamente memorizadas. Os autores entendem que é necessária uma compreensão no domínio dos significados que se apresentam de forma clara, precisa, diferenciados e transferíveis. Uma sugestão apresentada por Ausubel e defendida por Moreira e Masini (2001), com objetivo de evitar uma simulação da aprendizagem significativa, é utilizar situações que sejam novas e não familiares, exigindo máxima transformação do conhecimento existente. Há diversas alternativas para verificação da ocorrência da aprendizagem significativa, como tarefas de aprendizagem sequencialmente vinculadas servindo de apoio a etapas posteriores da atividade, resolução de problemas, bem como, mapas conceituais.

Na busca de indícios de uma possível aprendizagem significativa, um importante aspecto é partir dos conhecimentos que os estudantes trazem para dentro da sala de aula. “Se tivéssemos que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio diríamos que o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe, descubra isso e baseie-se nisso seus ensinamentos” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p. 137). Nesta vertente, o projeto educativo do educador deve está direcionado para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, priorizando os conhecimentos prévios, reconhecido que raramente vem marcado por estudos avançados, servindo assim de ancoragem para as novas ideias e conceitos, constituindo a base fundamental para do processo de aprendizagem.

Recentemente vários pesquisadores, como Amancio e Salvi (2008), Cabrera (2007), Freitas e Salvi (2008) e Gamarra-Rojas e Coll (2003), Monteiro (2007), entre outros vem demonstrando que a aprendizagem significativa pode ser alcançada através do lúdico. De acordo com Watanabe e Recena (2008), as atividades lúdicas podem ser atreladas a um planejamento que busque a aprendizagem significativa. Da mesma forma, Cabrera (2007) explica que o lúdico pode ser utilizado como estratégia instrucional eficaz, pois encaixa-se nos pressupostos da aprendizagem significativa, estimulando no estudante uma predisposição para aprender, além de favorecer a imaginação e o simbolismo como criação de significados que facilitam a aprendizagem. Dessa forma, justifica-se a utilização do lúdico nos diversos níveis de ensino para promover uma aprendizagem de qualidade.

## **UM POUCO SOBRE A GEOMETRIA ESFÉRICA E HIPERBÓLICA**

O surgimento das Geometrias Não-Euclidianas no século XIX foi um marco histórico no rumo da Matemática, tendo como precursor, lembra Boyer (2009), Karl Friedrich Gauss (1777-1855) (STRUIK, 1997). Este gênio seria considerado um dos maiores matemáticos com profunda influência em muitas áreas da Matemática. Gauss suspeitava que o 5º postulado pudesse ser um teorema e entre 1813 a 1816, finalmente, confirmou sua hipótese, resultado tanto aguardado desde Euclides. No entanto, não revelou seus estudos para a comunidade científica, comenta Coutinho (2001) e não era a igreja seu maior temor, mas os filósofos, com destaque a Immanuel Kant que viera a morrer em 1804.

Embora Gauss não tivesse revelado suas descobertas, dois outros matemáticos conhecidos por ele fizeram, concomitantemente, descobertas sobre a geometria não euclidiana: o húngaro Johann (Janos) Bolyai, e o russo Nicolai Lobachevsky. Os trabalhos de Lobachevsky colocaram em dúvida a Geometria de Euclides. Mlodinow (2010) conta que, em 1867, os artigos desses dois matemáticos foram incluídos no livro *Elementos de Matemática* de Heinrich Richard Baltzer (1818-1887) e se tornou referência entre os que trabalham com geometrias alternativas. Para encerrar a busca da prova para o 5º postulado, o matemático italiano Eugênio Beltrami (1835-1900) demonstrou que se a Geometria de Euclides forma uma estrutura consistente, então o mesmo deve ocorrer com os espaços não euclidianos.

Os avanços da Geometria Esférica, segundo Mlodinow (2010), Eves (2008), Boyer (2009) se devem aos trabalhos do alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann. Na tentativa de demonstrar o 5º postulado de Euclides, Riemann abriu um universo para novos estudos afirmando que se a infinitude de retas fosse descartada, então com alguns ajustes nos demais postulados outra Geometria se desenvolveria, a Esférica. De acordo com Mlodinow (2010), Riemann considerava que o plano é equivalente a superfície de uma esfera e as retas são as circunferências máximas nesse comparativo.

Neste tipo de espaço, Riemann aponta situações diferentes com relação a Geometria Euclidiana. Entre as situações, Mlodinow (2010) e Boyer (2009) citam que a soma dos ângulos de um triângulo construído sobre a superfície esférica é maior do que dois retos e que neste sistema geométrico

não existem retas paralelas. Segundo Courant e Robbins (2000), Riemann observou os postulados como asserções que poderiam ser mudadas. Seus trabalhos mudaram o estatuto epistemológico da geometria (como um todo), de modo que a geometria euclidiana deixou de ser uma verdade absoluta. Se Riemann não tivesse incluído a Geometria Esférica na sua lista de interesses, o instrumento matemático que Einstein precisou para explicar a teoria da relatividade possivelmente não teria existido. O tímido e frágil gênio ao contrair pleurisia, morreu de tuberculose antes de completar 40 anos, na cidade de Selsca, na Itália em 1859.

Os avanços da Geometria Hiperbólica se devem a Nicolai Ivanovich Lobachevsky. Ele se tornou professor na Universidade de Kazan, cargo que ocupou até ao fim da vida. Em meados do século XIX, Lobachevsky publicou o artigo à Sociedade de Física e Matemática na cidade de Kazan intitulado “Princípios de Geometria” sem nenhuma aceitação. Concomitantemente aos trabalhos de Lobachevsky, Janos Bolyai envia uma carta ao seu pai, Farkas Bolyai, no qual relata as descobertas maravilhosas de um universo criado por ele, deixando mais de 2000 páginas de manuscritos sobre Matemática.

Bolyai não demonstrou nenhuma indecisão nas suas afirmações, mas não aprofundou suas ideias como fez o russo Lobachevsky em suas publicações, e por isso, a geometria de Lobachevsky é conhecida por Geometria Hiperbólica (COUTINHO, 2001). O que é a Geometria Hiperbólica? Segundo Mlodinow (2010), é o espaço resultante da substituição do postulado das paralelas de Euclides pela suposição de que, para qualquer reta existe apenas uma paralela que passa por um ponto, as demais são hiperparalelas a partir de qualquer ponto. Em sua obra intitulada Pangeometria de 1855, Lobachevsky apresenta dois pontos importantes acerca da Geometria Hiperbólica. O primeiro, trata da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser menor do que  $180^\circ$  e o segundo, é que triângulos semelhantes não existem neste tipo de superfície. Na geometria euclidiana e esférica dois triângulos podem ser semelhantes e não serem congruentes. Isso é impossível na geometria hiperbólica, onde triângulos semelhantes são rigorosamente iguais.

## METODOLOGIA

Para o desenvolvimento da investigação, optamos pelo caráter participante com abordagem qualitativa. Segundo Bogdan e Biklen (2010), a pesquisa participante é uma pesquisa qualitativa e apresenta o pesquisador como seu principal instrumento para a coleta dos dados. Estes dados, quando coletados, são predominantemente descritivos e está contida em uma das metodologias da pesquisa social. É uma linha de pesquisa associada a várias formas coletivas de colaboração, com o objetivo de se pensar possíveis soluções para dificuldades e problemas que ocorrem em determinados campos de atuação, neste caso, o docente e os seus estudantes (ESTEBAN, 2010).

O investigador em uma pesquisa participante possui dois papéis, o de membro do grupo e o de pesquisador. Como membro do grupo, atua normalmente e como pesquisador ele observa. O pesquisador não interfere no que o grupo faz ou deixa de fazer, isto é, não sugere ações ao grupo, porque essas ações mostrarão situações que deseja pesquisar. O pesquisador coleta dados, participa do grupo que está sendo investigado, observa as pessoas e seus comportamentos em situações de aprendizagem. Esteban (2010) cita que, na pesquisa participante, o docente buscar entender como os estudantes compreendem suas próprias situações e como constroem suas realidades, combinando ao mesmo tempo, a participação ativa dos estudantes, as conversas informais e as análises das atividades desenvolvidas.

Esta pesquisa aconteceu em uma turma de segunda série do Ensino Médio do turno matutino, em uma escola pública da rede estadual de ensino da cidade de Tijucas (SC), no período de 05/11 a

15/11 do ano letivo de 2013. Os estudantes, por motivos éticos, foram nomeados por números (E1, E2, ..., E14, E15).

Para a coleta de dados, utilizamos questionário, observações, registros, buscando descrições detalhadas das situações ocorridas durante as atividades e acontecimentos em sala de aula. O questionário (Anexo) é do tipo fechado e continha as mesmas questões, sendo um aplicado previamente ao jogo e o outro após a intervenção. O questionário tem a função de permitir a análise comparativa entre as informações anteriores e posteriores à aplicação do jogo, dando subsídios para verificarmos a assimilação feita pelos estudantes. A pesquisa empregou também a metodologia de observação direta, que segundo Gil (2010), busca identificar principalmente os comportamentos e acontecimentos decorridos ao longo do processo de aplicação do jogo, ou seja, a dinâmica do processo.

### **SOBRE O JOGO “LOBARIEMANN”**

O jogo intitulado de “LobaRiemann” é um jogo de tabuleiro que comporta de quatro a oito participantes. Por ser um material didático com caráter de ineditismo, foi elaborado e embasado teoricamente nos livros didáticos utilizados pelo público alvo da pesquisa. Desta forma, o conteúdo do jogo se encontrava adequado ao nível cognitivo dos estudantes.

O “LobaRiemann” (figura 2) é composto por um tabuleiro nas dimensões 40cm x 40 cm, 01 dado, 04 pinos coloridos, 01 baralho com 40 cartas verdes chamadas de “Cartas-Desafio”, 01 baralho com 40 cartas brancas chamadas “Cartas-Você Sabia”, 01 baralho com 30 cartas roxas chamadas de “Cartas-Esféricas”, 01 baralho com 30 cartas azuis chamadas de “Cartas-Hiperbólicas” e 01 manual de instruções.

**Figura 2 - Jogo LobaRiemann**



**Fonte:** Foto do acervo do autor, 2013.

O objetivo do jogo é conquistar o máximo de “Cartas-Esféricas” e “Cartas-Hiperbólicas” possíveis no período estipulado. Para que isso ocorra, o jogador percorre o tabuleiro, sempre que possível, arrecadando as cartas por meio de desafios e perguntas referentes a conceitos elementares de Geometria Esférica e Hiperbólica. A metodologia proposta pelo jogo objetiva aprimorar o conhecimento dos estudantes sobre a temática geometria, abordando conteúdos como: modelos geométricos, noção de reta, menor distância entre dois pontos, retas paralelas, retas perpendiculares, geodésica, dentre outros conteúdos do campo da Geometria. Deste modo, esperávamos que com este instrumento lúdico os estudantes aprendessem outros modelos geométricos além do euclidiano, ainda fortemente apresentado pelos docentes, bem como, estimulasse sua predisposição para aprender mais sobre o tema, visando estimular sua motivação para o ensino da Geometria.

A observação teve caráter sociológico e buscou investigar a realidade social em que aprendizagem se constituía ao longo da intervenção, atentando aos fatos observáveis e às suas relações com a temática analisada. Os procedimentos da aplicação do jogo envolveram três etapas consecutivas e interdependentes. As atividades foram realizadas em sala de aula, nos horários das aulas de Matemática com a presença do docente/pesquisador.

A primeira etapa consistiu em identificar, através da aplicação do questionário, os subsunçores (conhecimentos prévios) ou as ideias iniciais dos estudantes sobre o tema abordado, ou seja, seus conhecimentos sobre Geometria Esférica e Hiperbólica. Essa primeira etapa teve a duração de 45 minutos. A segunda etapa foi a aplicação do jogo “LobaRiemann” em que houve a explicação das regras do jogo, seguida da separação dos estudantes em duplas que posteriormente se reuniram em grupos de cinco estudantes para poderem iniciar o jogo. Por fim, a terceira e última etapa consistiu na aplicação do questionário pós-intervenção. A análise dos resultados ocorreu separadamente, ou seja, por cada etapa ocorrida.

## RESULTADOS E ANÁLISE

*Referente aos conhecimentos prévios:* a aplicação do questionário (pré-teste), buscou identificar se os estudantes possuíam conhecimentos prévios (subsunçores) sobre conceitos elementares de Geometria Esférica e Hiperbólica. Das opções escolhidas, foi possível organizar os dados em uma tabela de referência para análise (tabela 1).

**Tabela 1** - Resultados obtidos no questionário pré-teste.

Questão	Números de estudantes que optaram pela alternativa correta/Percentual de acerto
1	4 (26,66%)
2	3 (20,00%)
3	5 (33,33%)
4	2 (13,33%)
5	2 (13,33%)
6	6 (40,00%)

A tabulação das respostas do questionário evidenciou que os estudantes já apresentavam algum conhecimento sobre o assunto, visto que provavelmente já tinham discutido em outras aulas ou

lido sobre o tema, obtendo assim índice médio de 24,44% de respostas corretas. A identificação dos conhecimentos prévios é de extrema importância, uma vez que é através destes que as novas informações expostas pelo jogo irão se ancorar, adquirindo assim significado para o estudante. Segundo Moreira (2010), a aprendizagem significativa ocorre quando novas ideias ou conceitos ancoram-se a conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva do indivíduo, ou seja, quando ancoram-se a subsunçores adequados.

Em geral a análise do pré-teste levou a inferir que os estudantes possuem alguns conhecimentos prévios (subsunçores relevantes) presentes em sua estrutura cognitiva acerca de conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica, como a ideia de reta, segmento de reta, circunferência, triângulo, que servirão de ancoragem para novos conteúdos no campo da Geometria. Os estudantes utilizaram seus conhecimentos de Geometria Euclidiana com o objetivo de resolver os problemas e apresentaram algumas dificuldades de aprendizagem conceitual, representacional e proposicional relativo ao tema Geometria. Assim, a utilização de textos, vídeos ou jogos educativos ganham importância na apresentação do novo conteúdo, pois, de acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), caso isso não ocorra, as novas informações possivelmente não serão aprendidas de maneira significativa. A intenção principal foi criar uma ligação sólida entre aquilo que se conhece e o que se pretende aprender. Nessa mesma direção, os conhecimentos prévios apresentados pelos estudantes, como por exemplo, “a circunferência é uma curva fechada” ou “um triângulo pode ter lados com mesma medida” também facilitaram a explicação das regras do jogo, bem como ajudaram na sua dinâmica, pois foram poucas as dúvidas durante a realização da atividade.

*Referente a aplicação do jogo:* desde o início da atividade os estudantes manifestaram certa motivação, pois se tratava de uma atividade nova, diferente da aula tradicional, permitindo que fosse despertada nos estudantes uma predisposição para o aprendizado. Carrascosa, Perez e Valdés (2005) defendem que a motivação é tanto um efeito como causa de aprendizagem. Diante disso, não há necessidade de se esperar para que a motivação esteja desenvolvida para iniciar as atividades de ensino. O objetivo de uma determinada tarefa de aprendizagem deve sempre ser tornado o mais explícito e específico possível. É importante utilizar dos interesses e motivações dos estudantes, porém, sem deixar limitar por eles. “O professor pode somente apresentar ideias de modo tão significativo quanto possível. A tarefa de organizar novas ideias num quadro de referência pessoal só pode ser realizada pelo estudante” (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980, p.335).

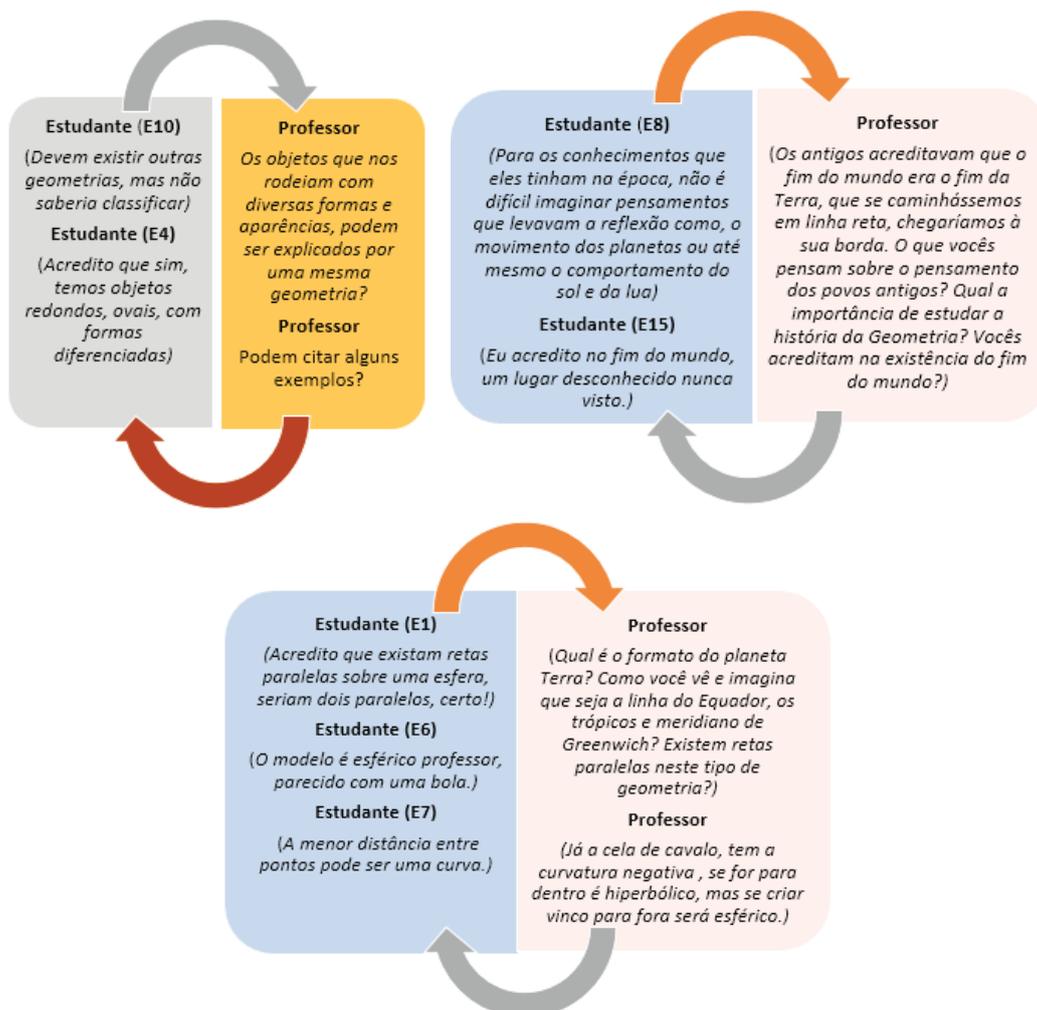
Durante a realização da atividade com o jogo “LobaRiemann”, o professor sempre que solicitado explicava e orientava os estudantes, tirando dúvidas e apresentando contraexemplos que pudessem contribuir para o pensamento crítico por parte dos estudantes. Para Lessa et al. (2009), o docente exerce papel fundamental como mediador frente às confrontações na construção dos conhecimentos. No entanto, muitos subsunçores são bastante resistentes às mudanças, por exemplo, “que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos” ou “duas retas paralelas não possuem intersecção”. Portanto, um rápido contato com o conhecimento por meio de explicações técnicas pode não ser suficiente para a reestruturação e transformação destes conhecimentos. Um conceito não se aprende numa única vez, mas vai sendo refinado progressivamente através do tempo, como por exemplo, a ideia de que a menor distância entre dois pontos possa não ser necessariamente um segmento de reta.

Geralmente, o que acontece é uma adaptação de tal forma que uma nova estrutura acaba se integrando ao conhecimento existente e não se trata, portanto, de trabalhar contra ou com os subsunçores, mas sim ambas ao mesmo tempo (AUSUBEL, 2003). O professor, como mediador, deve apresentar um novo conceito de forma inteligível a seus estudantes, saber lançar desafios e propiciar

a evolução das ideias. A aula será um local de debates, discussões, especulações e não de buscas de certezas. É preciso uma compreensão que a abordagem de um conceito científico requer o seu domínio histórico e epistemológico, bem como a explicitação da sua importância para a compreensão da vida cotidiana dos estudantes no mundo atual e, principalmente, de suas perspectivas futuras já que a educação visa à formação do cidadão, (LESSA et al., 2009).

Durante a execução do jogo “LobaRiemann”, alguns estudantes dialogaram com o professor sobre determinados temas elementares da Geometria Esférica e Hiperbólica (noção de reta, distância entre dois pontos, soma dos ângulos internos de um triângulo) (figura 3), criando assim um ambiente favorável à troca de informações, estímulo ao pensamento crítico, atenção e a curiosidade sobre o tema estudado. A ideia, lembram Gil-Pérez, Carrascosa e Cachapuz (2010), é um processo educativo em constante evolução permeada pela negociação contínua entre os estudantes e o seu professor, tendo-se, no conhecimento científico, não somente as respostas imediatas, mas sim elementos de interação com as situações problemas que deverão colocar “em xeque” os conhecimentos prévios e sua posterior transformação.

**Figura 3** - Alguns diálogos entre estudantes e o professor durante a atividade com o jogo “LobaRiemann”.



Fonte: Acervo do autor, 2013.

Durante a aplicação do jogo, os estudantes foram capazes de relacionar os conceitos e proposições contidas nas cartas com o conhecimento que já apresentavam. Por exemplo, lembraram que dependendo da geometria abordada, a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser maior, igual ou inferior a dois retos, ou ainda, que na Geometria Esférica não existem retas paralelas, e desta maneira puderam reestruturar seu conhecimento. Tal fato foi possível ser observado nos discursos dos estudantes durante o jogo e através dos questionários. A atividade também proporcionou interação entre as duplas, bem como promoveu uma competição saudável entre as equipes, tornando a participação dos estudantes prazerosa e divertida.

Este momento se tornou interessante para o docente/pesquisador, por permitir a construção de um canal dialógico com os estudantes, elemento fundamental para o processo de ensino e de aprendizagem, bem como para grupo ao poder apresentar compreensões acerca da problemática. O jogo propiciou o reconhecimento de objetos esféricos e hiperbólicos a partir das cartas que apresentaram a estratégia de associar um objeto ao tipo de geometria por meio de vincos que a folha sulfite criava encima do artefato observado, mostrando a criatividade utilizada por alguns estudantes na identificação da geometria que pertencia determinado artefato. Sob a luz da aprendizagem significativa Ausubel, Novak e Hanesian (1980) lembram que a solução para um problema requer outras capacidades e qualidades, como poder de raciocínio, flexibilidade, improvisação e astúcia.

No andamento do jogo, algumas declarações se mostraram bastante interessantes como: (E9) *Os piratas não conheciam sobre Física, não sabiam nem mesmo a forma geométrica da Terra;* (E11) *Eles tinham medo do desconhecido, medo de chegar ao horizonte e cair.* Essas colocações demonstraram que os estudantes identificaram nas cartas, situações que proporcionassem discussões acerca de conceitos relacionados à Geometria Euclidiana e não Euclidiana como: plano, modelo geométrico da Terra, esfera, retas e até mesmo, sobre ceticismo ou crenças que as pessoas tinham naquela época. Foi identificada, durante o jogo, a relação que estes atribuíam aos conceitos geométricos e aos conceitos na área da Física, como por exemplo, a citação do termo “temperatura”, ou “queda livre de um objeto”. Essa relação cruzada de conceitos demonstra que os estudantes usaram de criatividade, o que denota a existência de uma possível estrutura cognitiva rica. Por relacionar de maneira não arbitrária os conceitos de áreas distintas, os estudantes além de atribuírem significado aos conceitos, apresentaram uma organização do pensamento, levando a pensar em uma possivelmente ocorrência de aprendizagem significativa.

Em uma das cartas-desafio, o estudante (E7) levantou a hipótese de que o resultado para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico deveria ser maior do que  $180^\circ$ . O docente solicitou ao grupo para medir os ângulos com o uso do transferidor um triângulo construído sobre o globo terrestre. Inicialmente, ficaram com dúvidas de como iriam utilizar este instrumento, tendo em vista que o triângulo formado não era reconhecido comumente por eles. Os estudantes (E2), (E4), (E7), (E9), (E11), (E12) e (E13) utilizaram a régua como estratégia criativa para formar os lados do triângulo e constataram que a soma não poderia ser igual a dois ângulos retos (figura 4). Sobre os estudantes, sujeitos ativos do processo de ensino e aprendizagem, concordamos com Ausubel, Novak e Hanesian (1980) quando afirmam que é essencial eles relacionarem o material de aprendizagem com sua estrutura de conhecimento. Os conhecimentos prévios foram essenciais, juntamente com a motivação para uma compreensão conceitual do material apresentado. A motivação é fundamental no processo de aprendizagem significativa. É nesse momento que o estudante manifesta um esforço e disposição para relacionar de maneira não arbitrária o novo material potencialmente significativo à sua estrutura cognitiva (NOVAK; GOWIN, 1996).

**Figura 4** - Estudantes durante o jogo experimentando uma carta-desafio.



**Fonte:** Acervo do autor, 2013.

Os diversos discursos apresentados pelos estudantes durante a execução do jogo “LobaRiemann” mostraram o reconhecimento adequado do modelo geométrico utilizado para representar a Terra, no entanto, não comentaram sobre o achatamento nos pólos, o que caracteriza o planeta como um elipsoide ou geoide. Também foi constatado nas transcrições de alguns estudantes, que dois meridianos não se cruzariam sobre a esfera, contestado por alguns colegas do grupo, afirmando que meridianos se intersectam nos pólos Norte e Sul, mas que não ocorreria com os paralelos. Esse pensamento evidencia certa organização conceitual sobre alguns elementos geométricos, como por exemplo, “reta” e “circunferência”, uma aprendizagem mesmo que frágil, mas representacional, diferenciando entes geométricos sobre superfícies distintas, como por exemplo, “esfera” e “plano”. Ainda existiu uma pequena confusão conceitual sobre o significado da palavra “paralelo” demonstrando a cristalização de conceitos geométricos euclidianos.

Em um dos momentos do jogo, um dos estudantes “caiu” sobre a casa “pergunta ao professor”. O estudante (E5) mostrou dificuldade de compreensão na relação entre a distância em graus e quilômetros entre os paralelos e meridianos, o que precisou de explicação do professor para o andamento da atividade. Coll et al. (2012) enfatizam que um fator importante que deve estar dentro do leque de preocupações de um professor durante uma atividade, é se o estudante possui ou não pré-requisitos para execução do problema proposto. Na opinião de Mendes (2001) apoiado em Perrenoud (2002), existem escolas com grande número de estudantes apresentando dificuldades em conceitos básicos de Matemática, com falta de hábito de leitura e problemas em relacionar o conteúdo com outras áreas do conhecimento, sem contar com os inadequados métodos de ensino.

Durante o jogo, (E10) ficou com dúvida sobre uma carta-hiperbólica e não soube identificar qual era o início da garrafa de Klein, *“parece que ela não tem início e fim professor”*, apresentando mesmo de maneira inconsciente, uma propriedade da garrafa: sua não orientabilidade. O estudante (E7) comentou que no início do jogo aprendeu algumas ideias sobre Geometria Hiperbólica e comparou a garrafa com um vaso que se encontra na escola, cuja curvatura é negativa. O professor aproveitou o momento e questionou: (P) Como você sabe que o vaso tem curvatura negativa? O estudante (E7) aproveitou e argumentou da utilização de folhas para o preenchimento da superfície com o surgimento de vincos. Nesse momento, o professor pediu a atenção dos estudantes que desenvolviam a atividade e explicou: (P) *“A noção de curvatura negativa é devido ao fato que em qualquer ponto dessa superfície, linhas se intersectam com curvaturas em sentidos opostos, porém a técnica para descobrir qual sistema geométrico pertence um determinado objeto pode ser da utilização de folhas*

e a observação de vincos”. No fim do jogo, os estudantes (E10), (E6), (E4), (E7) e (E11) solicitaram ao professor um resumo sobre a Geometria Hiperbólica e Esférica, prontamente atendida.

A análise evidenciou que, quando o professor trabalha com materiais potencialmente significativos, proporciona segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), uma motivação para a aprendizagem e não uma passividade promovida por problemas do tipo siga o modelo. Em geral, o jogo conseguiu despertar a motivação tão necessária nos estudantes para sua realização, bem como comparações com outros sistemas geométricos (Esférico e Euclidiano). No que diz respeito às limitações para a execução da atividade com o jogo “LobaRiemann”, há um reconhecimento que, em função dos objetivos propostos pelo professor-pesquisador, houve necessidade de alguns acertos com relação ao tempo de duração, recortes, ajustes e mudanças, como por exemplo, a continuidade da atividade na aula de Física, mas isto não atrapalhou o processo de ensino e aprendizagem sobre o tema Geometria Esférica e Hiperbólica.

*Referente aos conhecimentos científicos após a execução do jogo “LobaRiemann”:* Após o término do jogo, o professor comentou sobre a realização do pós-teste como último momento da investigação. O objetivo foi identificar na estrutura cognitiva do estudante, possíveis mudanças conceituais e indícios de aprendizagem significativa. A seguir, apresentamos a análise comparativa (tabela 2) dos questionários prévio e de pós-intervenção ao jogo, sendo que as respostas dos estudantes foram agrupadas segundo os critérios de avaliação em respostas corretas e respostas incorretas.

**Tabela 2** - Análise comparativa entre o questionário pré-teste e pós-teste.

Questão	Números de estudantes que optaram pela alternativa correta/Percentual de acerto (Pré-teste)	Números de estudantes que optaram pela alternativa correta/Percentual de acerto (Pós-teste)
1	4 (26,66%)	12 (80,00%)
2	3 (20,00%)	11(73,33%)
3	5 (33,33%)	14 (93,33%)
4	2 (13,33%)	10 (66,67%)
5	2 (13,33%)	12 (80,00%)
6	6 (40,00%)	14 (93,33%)

Para a questão 1, os resultados mostraram que 12 estudantes, (80%) da turma, entenderam que a linha do Equador, os trópicos e o meridiano de Greenwich são elipses, ou seja, compreenderam que dependendo da geometria abordada, esses elementos podem ser curvas ou retas. Na comparação com o pré-teste, os resultados mostram uma considerável mudança por esta alternativa, indicando uma mudança conceitual e representacional sobre o modelo geométrico dos objetos citados na questão. A passagem de um conceito cristalizado advindo do senso comum para um conceito científico, evidencia uma possível assimilação de conceitos por parte dos estudantes. Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), a assimilação de conceitos ou proposições possivelmente possui um efeito facilitador na retenção dos significados. A justificativa para que as novas informações fossem assimiladas, deve-se ao fato de que, durante um período de tempo variável, estas informações permanecem dissociáveis de seus subsunçores, isto é, das ideias mais inclusas, mais generalizadas na estrutura cognitiva. Nessa direção, Novak e Gowin (1996) entendem que o valor educativo está no reconhecer e valorizar a mudança no significado da experiência humana. A escolha pela opção cor-

reta, provavelmente, foi influenciada pela realização do jogo didático “LobaRiemann”, em que foram oportunizadas, durante o jogo, comparações entre os modelos geométricos. Isto implica em uma melhora significativa, contudo, é preciso reconhecer, ainda, uma confusão conceitual por parte dos estudantes sobre circunferência e elipse, identificada pelo aumento da alternativa (c).

Para a questão 2, os resultados mostraram que 11 estudantes, (73,33%) da turma, optaram pela alternativa correta (c), que seria um triângulo e a soma terá valor maior do que  $180^\circ$ . Na comparação com o pré-teste, os resultados evidenciam uma considerável melhora no índice de respostas corretas, firmando a capacidade do jogo no ensino de conceitos elementares de Geometria Esférica. O fortalecimento do conceito de triângulo esférico foi possível graças às cartas-desafio e cartas-esférica do jogo “LobaRiemann”, que apresentavam ideias elementares da Geometria Esférica. Além disso, pelo fato das cartas-desafios estarem envolvidas em todas as jogadas da brincadeira, conseguiram que o conceito fosse ancorado aos conhecimentos prévios relevantes dos estudantes, passando a ser retidos significativamente em sua estrutura cognitiva e, desta forma, ainda puderam funcionar como um ponto de ancoragem para as informações, assim como as das questões seguintes.

Para a questão 3, os resultados mostraram que 14 estudantes, (93,33%) da turma, optaram pela alternativa correta (c), que a soma dos ângulos internos será menor do que  $180^\circ$ . Na comparação com o pré-teste, os resultados evidenciam uma considerável melhora no índice de respostas corretas, firmando a capacidade do jogo no ensino de conceitos elementares de Geometria Hiperbólica. Essa mudança aponta para a ocorrência de uma reconciliação integrativa que, de acordo com Moreira (2010), à medida que a nova informação é apresentada, começando-se por conceitos mais inclusivos, é possível diferenciar conceitos por meio de ocorrência da aprendizagem subordinada. Possivelmente o conceito “Geometria” foi modificado e reorganizado na estrutura cognitiva dos estudantes.

Para a questão 4, os resultados mostraram que 10 estudantes, (66,67%) da turma, optaram pela alternativa correta (c), em que continuará sua viagem afirmando a existência de mais água. Em comparação com o pré-teste, evidencia-se uma melhora na compreensão conceitual sobre a problemática. Buscamos os conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao assunto e obtivemos 13,33% de acertos no questionário prévio e 86,67% de erros. Verificamos com o questionário pós-intervenção que houve um aumento significativo de respostas consideradas corretas, obtendo um índice de 66,67% de acerto na questão, reduzindo o número de respostas incorretas para apenas 33,33%.

Para a questão 5, os resultados mostraram que 12 estudantes, (80%) da turma, optaram pela alternativa correta (c), onde ele fará uma trajetória curvilínea, pois a menor distância entre dois pontos é a medida de um arco de curva. Percebemos, também, que a utilização do globo terrestre, enquanto material de ensino durante o jogo “LobaRiemann”, foi bastante importante para a produção de significados acerca dos conceitos de “curvatura”, “plano” e “superfície esférica”. Concordamos com Ausubel, Novak e Hanesian (1980), quando afirmam que é no curso da aprendizagem significativa que o significado lógico do material apresentado ao estudante passa a ter significado psicológico e, portanto, não basta que o material a ser apresentado ao estudante seja significativo, mas é necessária a existência de subsunçores para servirem de ancoragem aos novos conceitos aprendidos. Buscamos os conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao assunto e obtivemos 13,33% de acertos no questionário prévio e 86,67% de erros. Verificamos com o questionário pós-intervenção que houve um aumento significativo de respostas consideradas corretas, obtendo um índice de 80% de acerto na questão, reduzindo o número de respostas incorretas para apenas 20%.

Para a questão 6, os resultados mostraram que 13 estudantes (86,67%) da turma optaram pela alternativa correta (c), pois a Terra sendo quase esférica, a trajetória do caçador não será retilínea, mas curvilínea. Os estudantes demonstraram pouco conhecimento prévio a respeito da trajetória sobre a esfera, uma vez que em uma aula expositiva, dificilmente são feitas relações sobre diferença de modelos geométricos, curvatura e segmento de reta. Assim, os estudantes acabam com a concepção errônea de que a menor distância entre dois pontos será a medida do segmento de reta no modelo euclidiano. Antes da aplicação do jogo, 60% dos estudantes responderam incorretamente a esta questão, já no questionário pós-intervenção obtivemos uma eficiência do lúdico, já que 93,33% dos estudantes responderam corretamente a questão. Foi visível que os estudantes fizeram a correta relação de que existe uma diferença entre o modelo que representa a menor distância entre dois pontos, devendo-se à carta do jogo denominada de “Você-sabia” que representava os modelos geométricos e a representação da menor distância entre dois pontos fixos. Esta carta possibilitava aos estudantes evidenciar a diferença entre os modelos geométricos, assim, ao fim do jogo, os estudantes sabiam que o segmento de reta e o segmento de uma circunferência eram diferentes entre si e possuíam tamanhos e representações distintas.

Em geral, percebe-se que a média de respostas corretas antes da aplicação do jogo que era de 24,44 % passou a ser 81,11%. Concordamos que este instrumento lúdico atendeu as condições para ocorrência de uma aprendizagem significativa, conforme os pressupostos da Teoria de Aprendizagem em questão. Sobre a exposição de um material potencialmente significativo ao estudante, a extensa literatura enfatiza que:

o estudante deve ser exposto a um conteúdo escolar potencialmente significativo, ou seja, que tenha sentido lógico, sendo que as novas informações possam se relacionar com ideias básicas relevantes já construídas e disponíveis na estrutura cognitiva dos estudantes. A aprendizagem significativa não deve ser interpretada simplesmente pela qualidade e uso de determinado material, pois, se o material utilizado for significativo e já satisfeitas as duas primeiras condições para a ocorrência da aprendizagem significativa, o objetivo em aprender já se completa antes mesmo de qualquer tentativa de ensinar determinado conteúdo (AUSUBEL, 2003, p. 134).

Logo, o jogo pode ser considerado um material potencialmente significativo, pois se encaixa nas especificações citadas por Ausubel (2003), já que possibilitou aos estudantes incorporarem de maneira não arbitrária e não literal o conhecimento científico, ou seja, permitiu que as novas informações fornecidas pelo lúdico fossem relacionadas com os subsunçores dos estudantes e incorporadas à estrutura cognitiva. Isto ficou evidente quando observamos o aumento no número de respostas corretas no questionário aplicado após a utilização do jogo. O jogo, por sua vez, criou um ambiente descontraído que exerceu uma função ascendente na aprendizagem dos estudantes, permitindo que utilizassem seus conhecimentos prévios e integrasse-os às novas informações de forma natural e divertida, favorecendo o processo de assimilação de forma gradativa. Ferreira (2011) afirma que a aprendizagem significativa de conhecimentos se torna mais simples quando os assuntos tratados em sala de aula são abordados através de atividade lúdica, já que os estudantes ficam entusiasmados a aprender de uma forma mais interativa e divertida.

Em síntese, o jogo “LobaRiemann” foi uma atividade que promoveu grande entusiasmo, exigiu uma compreensão do conteúdo e um raciocínio comparativo rápido, estimulando a inteligência e o

pensamento lógico, mostrando ser um material educacional que se enquadra como estratégia instrucional significativa na promoção da aprendizagem em Geometria no ensino médio, pois está envolvido com o desenvolvimento cognitivo, físico e social dos estudantes.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O enfoque dessa investigação referiu-se a abordagem de conceitos elementares de Geometria Esférica e Hiperbólica no ensino de Matemática. Esta investigação foi orientada pela seguinte questão: *Quais contribuições, o jogo “LobaRiemann” pode proporcionar aos estudantes para a compreensão da existência da Geometria Esférica e Hiperbólica no espaço em que vivem?*

Com o intuito de responder à questão, estabeleceu-se como objetivo principal analisar o desenvolvimento de um jogo didático intitulado “LobaRiemann” e suas possíveis contribuições para a aprendizagem de conceitos elementares de Geometria Esférica e Hiperbólica junto aos estudantes do Ensino Médio. A partir dos resultados obtidos nesta investigação com a utilização do jogo “LobaRiemann”, podemos inferir que o mesmo se apresentou como um instrumento eficaz na promoção da aprendizagem significativa, uma vez que se encaixa nos requisitos básicos desta teoria, por ser um material potencialmente significativo, que possibilitou a aproximação do conteúdo “geometria” do cotidiano dos estudantes e por manifestar no estudante uma predisposição para aprender. Além disso, gerou momentos de alegria e prazer em sala de aula.

As questões utilizadas no questionário referentes a conteúdos de Geometria Euclidiana, Esférica e Hiperbólica foram fundamentais para identificar o que os estudantes possuíam em sua estrutura cognitiva. Os resultados do pré-teste evidenciaram confusões conceituais, fragilidades acerca de aprendizagem conceitual e representacional. Percebeu-se que o jogo didático contribuiu para que os estudantes desenvolvessem de maneira satisfatória a construção de conceitos elementares de Geometria Esférica e Hiperbólica. Observamos que as cartas-desafio, as cartas você-sabia, as cartas-esférica e hiperbólica, colaboraram para que os resultados do pós-teste apresentasse maior porcentagem na qualidade de acertos, se comparado com as questões do pré-teste.

Sobre o jogo “LobaRiemann”, esse também sanou algumas dificuldades encontradas no ensino de Geometria como a superação do modelo tradicional. Dessa forma, a transmissão do conhecimento deixou de ser unidirecional e os estudantes passaram a receber e armazenar as informações de modo ativo e com significado. Os aspectos lúdico e cognitivo presentes no jogo foram importantes estratégias para o ensino e a aprendizagem de conceitos no campo da Geometria, favorecendo a motivação intrínseca do estudante, o raciocínio, a argumentação e a interação entre os pares. Assim, o lúdico do jogo “LobaRiemann” participou do processo de cognição e permitiu que o estudante construísse ou reconstruísse seu conhecimento.

A Teoria da Aprendizagem Significativa nos auxiliou na compreensão dos processos de aprendizagem, dos conceitos científicos e principalmente na relação entre professor e estudante em sala de aula. Foram identificados durante a aplicação do jogo momentos de ocorrência de aprendizagem significativa do tipo representacional, conceitual e proposicional, bem como indícios de aprendizagem superordenada e subordinada por parte dos estudantes na atividade proposta, contribuindo para que o professor compreendesse como os conceitos foram assimilados pela estrutura cognitiva e de que maneira estes se encontram organizados.

Em resposta à questão que norteou esta pesquisa, quais contribuições o jogo didático “LobaRiemann” pode proporcionar aos estudantes da existência da Geometria Esférica e

Hiperbólica no espaço em que vivem, acreditamos que o jogo apresentou contribuições no campo motivacional, na possibilidade de discussões entre os estudantes e na formação do pensamento crítico e investigativo. Embora ainda pouco utilizado em sala de aula, o jogo didático mereça ter espaço na prática pedagógica dos professores. Portanto, esperamos que este trabalho contribua para a produção científica de trabalhos relacionados com o lúdico também nas séries finais do Ensino Fundamental, bem como sirva de auxílio e inspiração para o professor de Matemática que queira tornar suas aulas mais descontraídas, dinâmicas e prazerosas,

Nesta perspectiva, essa investigação mais do que resultados, sinaliza a necessidade de aprofundar novas questões desencadeadas no processo de ensino e de aprendizagem das Geometrias Esférica e Hiperbólica. Significa a aceitação do caráter de provisoriade que impulsiona professores curiosos a qualificar suas ações educativas. Seria importante ressaltar que esse trabalho de forma alguma está terminado, uma vez que o material abordado mereça maior exploração. Além dos resultados obtidos por esta investigação, seria interessante conhecer os processos de construção conceitual por estudantes que estão inseridos em cenários muito diferentes daquele esboçado neste trabalho, realidades com acesso intenso aos bens culturais, como teatro, cinema, internet disponível e museu de ciência e tecnologia. Por isso, destaca-se a importância e a relevância de outras pesquisas buscarem solidificar o ensino de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio.

## REFERÊNCIAS

AMANCIO, R.S.; SALVI, R.F. **A utilização da Informática Educativa no Ensino de Geografia**. Portal Educacional do Estado do Paraná. Curitiba, Brasil, 2008. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/94-4.pdf>>. Acesso em: 20 out. 2013.

AUSUBEL, D.P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Editora Plátano, 2003.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

ALVES, S. Geometria Não Euclidiana. São Paulo: IME-USP: material para oficina; **Semana da Licenciatura**, 2008.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. 2ª. ed. Porto: Porto Editora, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª. ed. São Paulo: Blücher, 2009.

CABARITI, E. **A geometria hiperbólica na formação docente**: possibilidades de uma proposta com o auxílio do cabri-géomètre. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, São Paulo, 2006.

CABRERA, W.B. **A ludicidade para o ensino médio na disciplina de biologia**: Contribuições ao processo de aprendizagem em conformidade com os pressupostos teóricos da Aprendizagem Significativa. 158 f. 2007. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil. Disponível em: <[http://www.dominiopublico.gov.br/?select\\_action=&co\\_obra=45338](http://www.dominiopublico.gov.br/?select_action=&co_obra=45338)>. Acesso em: 12 nov. 2013.

CARRASCOSA, J., PEREZ, D.; VALDÉS, P. **Como ativar a aprendizagem significativa conceitos e teorias?** Santiago: OREALC / UNESCO, 2005.

- CARVALHO, M. O ensino de geometria não euclidiana na educação básica. In: **XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.
- CEDREZ, A.J.P. Construcción, necesidad e intuición de essência em geometria. **Scientia & Studia**. São Paulo, v. 7, n. 4, p. 595-617, 2012.
- COLL, C., et al. **O Construtivismo na Sala de Aula**. São Paulo: Ática, 2003.
- COLL, C.; MARCHESI, A.; PALÁCIOS, J. **Desenvolvimento psicológico e educação: psicologia da educação escolar**. 2ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não Euclidianas**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- ESTEBAN, M. P. S. **Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições**. Porto Alegre: Artmed, 2010.
- EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. São Paulo: Unicamp, 2008.
- FERREIRA, L. **Construção de atividades para o ensino de geometria hiperbólica**. **Anais...Encontro de Produção Científica e Tecnológica**. São Paulo, 2011.
- FREITAS, E.S.; SALVI, R.F. **A Ludicidade no ensino de geografia: perspectiva para uma aprendizagem significativa**. **Anais...II Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa**. Canela, Brasil, 2008. Disponível em: <<http://www.ioc.fiocruz.br/eiasenas2010/atas-2.ENAS.pdf>>. Acesso em: 07 nov. 2013.
- GAMARRA-ROJAS, C.F.L.; COLL, S.C. **Jogo educativo: instrumento interativo na aprendizagem sobre plantas**. **Anais... Congresso Brasileiro de Extensão Universitária**. João Pessoa, Brasil, 2003. Disponível em: <[http://www.prac.ufpb.br/anais/Icbeu\\_anais/anais/jogoeducativo.pdf](http://www.prac.ufpb.br/anais/Icbeu_anais/anais/jogoeducativo.pdf)>. Acesso em: 01 jun. 2013.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2010.
- GIL-PÉREZ, D.; CARRASCOSA, J.; CACHAPUZ, A. **Superação das visões deformadas da ciência e da tecnologia: um requisito essencial para a renovação da educação científica**. Em: Cachapuz, A.; Gil-Pérez, D.; Carvalho, A. M. P. C.; Praia, J. e Vilches, A. (Org.), *A Necessária Renovação do Ensino de Ciências*. (pp. 37-70). São Paulo: Cortez, 2010.
- KALEFF, A.M. **Desenvolvimento de Atividades Introdutórias ao Estudo das Geometrias não Euclidianas: Atividades Interdisciplinares para Sala de Aula e Museus Interativos**. In: Congresso Brasileiro de Extensão Universitária, n. 2, Belo Horizonte, 2004.
- KRASILCHIK, M. **Prática de ensino de biologia**. 4. ed. São Paulo: Universidade de São Paulo, 195 p, 2004.
- LESSA, D. B. et al. **Como se “pega” gripe? Um estudo das ideias prévias de estudantes sobre sistema imunológico**. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO DE QUÍMICA, 14. 2009, Curitiba. 2009. **Anais...** Curitiba: UFPR/DQ, Disponível em <<http://www.quimica.ufpr.br/0676-1.pdf>> Acesso em 20 out. 2013.

MARTOS, Z.G. **Geometrias não euclidianas**: uma proposta metodológica para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental. Rio Claro, 143f. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -Instituto de Geociências e Ciências exatas, Universidade Estadual Paulista.

MENDES, I. A. **O uso da história da matemática**: reflexões teóricas e experiências. Belém- EDUEPA, 2001.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides**: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração, 2010.

MONTEIRO, J.L. **Jogo, interatividade e tecnologia**: uma análise pedagógica. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil. 2007. Disponível em: <<http://www.ufscar.br/~pedagogia/novo/files/tcc/237167.pdf>>. Acesso em: 20 set. 2013.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. São Paulo: Centauro, 2010.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa**: A teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

MORTIMER, E. F. Pressupostos epistemológicos para uma metodologia de ensino de química: mudança conceitual e perfil epistemológico. **Química Nova**, v. 15, n. 3, p. 242-249, 2000.

NOVAK, J.D.; GOWIN, B. D. **Aprender a aprender**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1996.

PERRENOUD, P. **As Competências para Ensinar no Século XXI**: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POZO, J. I. **Teorias cognitivas da aprendizagem**. 3<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Artes Medicas, 1998.

SANTANA, E. M. **Influência de atividades lúdicas na aprendizagem de conceitos geométricos**. **Anais...Seminário Nacional de Educação profissional e tecnologia**. Belo Horizonte, Brasil. 2008. Disponível em: <<http://www.senept.cefetmg.br/galerias/Tema1Artigo4.pdf>>. Acesso em: 12 set. 2013.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. São Paulo: Gradiva, 1997.

## ANEXO

**1) Como você vê e imagina que seja a linha do Equador, os trópicos e o meridiano de Greenwich? Desenhe a alternativa escolhida.**

- a) Uma linha.
- b) São linhas verticais e horizontais.
- c) São circunferências.
- d) São elipses.

**2) Ao realizar uma viagem do “Brasil” para “Austrália” e logo em seguida para “Islândia” e retornar ao Brasil, que figura é formada e qual é será a soma dos seus ângulos internos? Desenhe a opção que você escolheu.**

- a) Quadrado e a soma será  $360^\circ$ .
- b) Triângulo e a soma será igual a  $180^\circ$ .
- c) Triângulo e a soma será maior do que  $180^\circ$ .
- d) Triângulo e a soma será menor do que  $180^\circ$ .

**3) A sela é uma estrutura de suporte amarrada ao dorso de um animal de montaria como, por exemplo, cavalos e camelos. Ao construir um triângulo sobre esta estrutura: Desenhe a alternativa escolhida.**

- a) A soma dos ângulos internos será igual a  $180^\circ$ .
- b) Não é possível construir um triângulo.
- c) A soma dos ângulos internos será menor do que  $180^\circ$ .
- d) Os seus lados serão segmentos de reta.

**4) Você está olhando de uma praia para a linha divisória entre o céu e o mar, nesse momento um navio chega a esse ponto. Portanto:**

- a) Despenará, pois a Terra é plana.
  - b) Despenará pelo universo numa grande cachoeira.
  - c) Continuará sua viagem afirmando que existe mais mar.
  - d) Continuará, pois o mar é um grande lago plano infinito.
- Desenhe a alternativa escolhida.

**5) Fernando de Noronha é um arquipélago pertencente ao estado brasileiro de Pernambuco, formado por 21 ilhas, ocupando uma área de  $26 \text{ km}^2$ , situado no Oceano Atlântico, a nordeste da capital pernambucana, Recife. Constitui um Distrito estadual de Pernambuco desde 1988, quando deixou de ser um território federal, cuja sigla era FN, e a capital era Vila dos Remédios. Um certo navegador, ao partir do Recife, tem seu destino já programado que será a ilha de Fernando de Noronha. Para isso, de acordo com a imagem:**

- a) ele fará uma trajetória retilínea, pois a menor distância entre dois pontos é uma reta.
- b) ele fará uma trajetória retilínea, pois a menor distância entre dois pontos é uma curva.
- c) ele fará uma trajetória curvilínea, pois a menor distância entre dois pontos é uma curva.
- d) é impossível ele chegar ao destino, pois é preciso muita gasolina e horas de voo, devido as frentes de ar que se deslocam no atlântico.



**6) Um caçador saiu de sua casa e caminhou 10 Km ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou mais 10 Km. Então virou e caminhou novamente por mais 10 Km ao norte. Ficou surpreso, pois descobriu que voltara novamente a sua casa. De acordo com a situação acima é possível que o caçador volte ao ponto de partida?**

- a) Sim, pois como a Terra é plana, basta retornar por uma trajetória formada por um triângulo plano.
- b) Não é possível voltar, pois a Terra é plana.
- c) Sim, pois a Terra sendo quase esférica, a trajetória do caçador não será uma retilínea, mas curvilínea.
- d) Não é possível voltar, ao menos que ele faça meia volta.

---

RECEBIDO EM: 01.08.2014  
CONCLUÍDO EM: 17.10.2014