VIDYA

VIDYA, v. 45, n. 2, p. 551-573, jul./dez. - Santa Maria, 2025.
Recebido em: 15.07.2025. Aprovado em: 08.01.2026.
ISSN 2176-4603 | DOI: doi.org/10.37781/vidya.v45i2.5477

A APRENDIZAGEM DAS CÔNICAS E A DEDUÇÃO DE SUAS EQUAÇÕES ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO CONTEXTO DO ENSINO MÉDIO

THE LEARNING OF CONIC SECTIONS AND THE DEDUCTION OF THEIR EQUATIONS THROUGH PROBLEM SOLVING IN THE CONTEXT OF HIGH SCHOOL

EL APRENDIZAJE DE LAS CÓNICAS Y LA DEDUCCIÓN DE SUS ECUACIONES A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ENEL CONTEXTO DE LA ESCUELA SECUNDARIA

MÁRIO BARBOSA DA SILVA[1]
ERICA MARLUCIA LEITE PAGANI[2]
GRACE ZAGGIA UTIMURA[3]

RESUMO

Atividades fundamentadas na resolução de problemas têm se destacado nas orientações dos documentos oficiais e nas pesquisas em Educação Matemática por favorecerem a aprendizagem dos estudantes. Este artigo tem por objetivo analisar como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, contribuiu na construção dos conceitos de circunferência e parábola, bem como para a dedução de suas equações. Trata-se de uma pesquisa empírica, de abordagem qualitativa, desenvolvida com duas turmas da 3ª série do curso Técnico em Mecânica Integrado ao Ensino Médio, de uma escola pública da região metropolitana de São Paulo. Os resultados indicam que a metodologia adotada favoreceu a compreensão dos conceitos e o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. O uso do *GeoGebra* potencializou a aprendizagem, permitindo reflexões críticas durante a resolução dos problemas. Ademais, o processo avaliativo se constituiu no decurso das resoluções, permitindo orientar os estudantes e promover a aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Argumentação e Prova; Ensino Médio Profissionalizante; Circunferência e Parábola; *GeoGebra*.

ABSTRACT

Problem-solving activities have been highlighted prominence in official documents and research in Mathematics Education for fostering students' learning. This article aims to analyse how the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving contributed to the construction of the concepts of circumference and parabola, as well as to the deduction of their equations. This is an empirical study with a qualitative approach, carried out with two classes from the third year of the Technical Course in Mechanics integrated with Upper Secondary Education at a public school in the metropolitan region of São Paulo. The results indicate that the adopted methodology favoured the understanding of the concepts and the development of students' mathematical thinking. The use of GeoGebra enhanced learning by enabling critical reflections during problem solving. Furthermore, the assessment process was built throughout the problem-solving activities, guiding students and promoting mathematical learning.

Keywords: *Problem Solving; Argumentation and Proof; Vocational High School; Circumference and Parabola; GeoGebra.*

1 Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul. Professor de Matemática do Instituto Federal de São Paulo - IFSP, Campus Itaquaquecetuba. E-mail: prof.mariodasilva@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6660-6756

2 Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul. Professora do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET-MG. E-mail: leitepagani@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9025-3420

3 Pós-doutorado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul. Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul - UNICSUL. E-mail: mnutimura@gmail.com. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9157-2359

RESUMEN

Las actividades basadas en la resolución de problemas han destacado en las orientaciones de los documentos oficiales y en las investigaciones en Educación Matemática, ya que favorecen el aprendizaje de los estudiantes. Este artículo tiene como objetivo analizar cómo la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de Matemáticas a través de la Resolución de Problemas contribuyó a la construcción de los conceptos de circunferencia y parábola, así como a la deducción de sus ecuaciones. Se trata de una investigación empírica, de enfoque cualitativo, desarrollada con dos clases del tercer año del Curso Técnico en Mecánica Integrado a la Educación Media de una escuela pública de la región metropolitana de São Paulo. Los resultados indican que la metodología adoptada favoreció la comprensión de los conceptos y el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. El uso de GeoGebra potenció el aprendizaje, permitiendo reflexiones críticas durante la resolución de problemas. Además, el proceso de evaluación se constituyó a lo largo de las resoluciones, permitiendo orientar a los estudiantes y promover el aprendizaje matemático.

Palabras-clave: *Resolución de Problemas; Argumetación y Prueba; Educación Media Técnica; Circunferencia y Parábola; GeoGebra.*

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento e as transformações da sociedade contemporânea nas últimas décadas têm exigido cada vez mais dos indivíduos uma formação integral, que os permita desenvolver habilidades que favoreçam o pensamento crítico, a capacidade de resolução de problemas, além de prepará-los para uma adaptação rápida diante das novas situações. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018, p. 14), especifica que “[...] a Educação Básica deve visar à formação e o desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento [...]”.

Nesse contexto, o ensino de Matemática assume uma posição relevante para a formação do cidadão crítico, com elevado nível de conhecimento para compreender a complexidade, além de auxiliá-lo na resolução de problemas em diversos contextos, promovendo tanto o seu próprio desenvolvimento quanto o da sociedade na qual está inserido.

Documentos que orientam currículos (Austrália, 2022; Brasil, 2018; Inglaterra, 2014; Singapura, 2020) e *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) destacam que um dos principais objetivos da disciplina de Matemática é o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes. Além disso, pesquisas como as de Emmel e Costa (2019), Jesus, Barrosa e Moura (2016), dentre outras, evidenciam que os processos de ensino e de aprendizagem baseados na repetição e memorização, tem contribuído pouco para promover a compreensão de conceitos e conteúdos, bem como, para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Concordamos com os pesquisadores portugueses Ponte, Mata-Pereira e Henrique (2012, p. 356) quando afirmam que, para promover a capacidade de raciocinar matematicamente, é necessário “[...] trabalhar em tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro lado, estimulam o raciocínio. Só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte dos alunos”.

Desse modo, consideramos que atividades centradas na resolução de problemas podem ser uma estratégia de ensino promissora, por promoverem a compreensão de conceitos e conteúdos, além de desenvolver diversas habilidades cognitivas nos estudantes - fundamentais para proporcionar o raciocínio matemático, para novas aprendizagens e para vida. Esses aspectos estão alinhados tanto com as recomendações de pesquisas em Educação Matemática e com as orientações curriculares supracitadas.

Vale (2017) compartilha de ideias semelhantes, ao enfatizar que a escola do século XXI tem a responsabilidade de preparar o aluno para enfrentar transformações constantes, pois a alta demanda de atividades laborais exige que seus executores sabiam *"pensar fora da caixa",* visando resolver situações em diferentes ângulos e construir e defender seus pontos de vista. De acordo com Vale (2017, p. 131), trata-se de "[...] envolver os alunos na resolução de problemas, considerando diferentes pontos de vista para os explorar de vários modos e recorrer a múltiplas estratégias".

Dessa forma, a utilização da Resolução de Problemas tem se consolidado como uma exigência crescente na prática docente, em razão das contribuições significativas que oferece ao processo de ensino e aprendizagem, permitindo o desenvolvimento de diversas habilidades cognitivas, entre as quais se destaca a criatividade dos estudantes. Com base nesse entendimento, este trabalho adota a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino capaz de favorecer a compreensão de conceitos e conteúdos, bem como promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes.

Este artigo que aqui apresentamos tem como objetivo analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático e na evolução das respostas dos estudantes em relação aos conceitos de circunferência e parábola, bem como na dedução de suas equações, conforme as concepções de Allevato e Onuchic (2021). As atividades foram desenvolvidas no âmbito da Educação Profissional Tecnológica de Nível Médio (EPTNM), contexto de atuação profissional de dois dos pesquisadores.

Para fundamentar este trabalho, apresentamos, na sequência, uma breve discussão da base teórica sobre Resolução de Problemas e posteriormente, abordamos a Argumentação, Prova e Demonstração Matemática na literatura da Educação Matemática. Em seguida, explicitamos os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento do trabalho, analisamos as atividades desenvolvidas e, por fim, apresentamos as considerações finais e as referências.

APORTE TEÓRICO

O cenário da sociedade contemporânea desencadeou uma demanda crescente para melhorar a qualidade do ensino de Matemática na escola do século XXI, visando promover aproximação entre essas demandas e o contexto educacional. Esse alinhamento se faz necessário, pois políticas públicas, pesquisas e programas educacionais em âmbito nacional e internacional identificaram a necessidade de práticas de aulas que proporcionem a investigação, a criatividade, a criticidade, a inovação e a resolução de problemas pelos estudantes (Silva; Allevato, 2021).

Para promover o desenvolvimento dessas habilidades, das diversas formas de pensamento, do raciocínio matemático e outras habilidades cognitivas para formação do cidadão pleno, documentos orientadores de currículos e pesquisas em Educação Matemática, em âmbito nacional e internacional, têm recomendado a Resolução de Problemas como uma metodologia ou processo de ensino para promoção da compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos.

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018, p. 266, grifo nosso), enfatiza que:

> Os processos matemáticos de **resolução de problemas**, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como **formas privilegiadas da atividade matemática**, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, **objeto**

> **e estratégia** para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses **processos de aprendizagem** são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

De forma similar, o documento estadunidense (NCTM, 2000) salienta que a aprendizagem em Matemática ocorra com o professor utilizando a resolução de problemas como metodologia de ensino devido a possibilitar a formação integral do estudante, uma vez que:

> **A resolução de problemas** constitui **uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática** e, como tal, não deverá ser apresentada como uma unidade isolada do programa de matemática. Na matemática, a resolução de problemas deverá englobar todas as cinco áreas de conteúdo descritas nestas normas. Os contextos dos problemas poderão variar desde experiências familiares aos alunos, relativas às suas **vidas pessoais** ou ao dia-a-dia escolar, até aplicações envolvendo **as ciências** e o **mundo do trabalho**. Bons problemas deverão integrar uma variedade de tópicos e envolver matemática significativa (NCTM, 2000, p. 57, grifo nosso).

O documento de Singapura (Singapura, 2020) enfatiza que o foco central da estrutura curricular do ensino de Matemática é o desenvolvimento da competência de resolução de problemas, inter-relacionada com os componentes de conceitos, habilidades, processos, metacognição e atitudes, conforme a ilustração a seguir:

Figura 1 - Estrutura do Currículo de Matemática de Singapura

Fonte: *Mathematics Syllabuses Secondary One to Four* (Singapura, 2020, p. 9, tradução nossa).

O documento destaca que a resolução de problemas não deve ser entendida apenas como uma meta a ser alcançada, mas também como um processo metodológico de ensino que favorece a aplicação de estratégias gerais - como as quatro etapas propostas por Polya - e o uso de heurística que permitem abordar os problemas de forma sistemática e coerente. Além disso, ao ser utilizada como abordagem didática, a resolução de problemas contribui significativamente para o desenvolvimento de habilidades como o pensamento crítico, a criatividade, a capacidade de abstração, o raciocínio lógico e as competências matemáticas mais avançadas, incluindo a elaboração de provas e de demonstrações matemáticas.

Esses aspectos da importância da resolução de problemas na promoção da compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos também são salientados por pesquisadores em Educação Matemática. Lester e Cai (2016, p. 120, tradução nossa) especificaram a notoriedade do processo dinâmico em um contexto de resolução de problemas, uma vez que o aluno ao ser desafiado, reformula suas ideias, conjecturas, raciocínios e o aprendizado em cada resolução elaborada, pois "O poder da resolução de problemas reside no fato de que obter uma solução bem-sucedida requer do estudante o aprimoramento, combinação e modificação do conhecimento que já adquiriram".

Os pesquisadores Contreras e Carrillo (1998) se posicionam de maneira similar por considerarem a resolução de problemas uma tendência atual de ensino em que:

> Os problemas têm, nesta tendência, o caráter de instrumento institucionalizador das aprendizagens em um contexto de socialização (no sentido de tornar explícito e organizar o conhecimento adquirido sob uma estrutura coerente). Os problemas são resolvidos ao longo de todo o processo de aprendizagem dentro de um quadro flexível de aquisição de conhecimento conceitual e procedimental. Eles são organizados de acordo com os objetivos estabelecidos, e sua sequência responde a uma abordagem procedimental imersa em uma rede conceitual organizada (Contreras; Carrillo, 1998, p. 28).

De acordo com esses pesquisadores, a resolução de problemas possibilita a aquisição de conhecimento conceitual e procedimental na aprendizagem matemática; o trabalho com problemas abertos, possibilita múltiplas resoluções; e o envolvimento em processos matemáticos de indução e dedução, são relevantes para desenvolvimento do raciocínio matemático e a formação intelectual do aprendiz.

Onuchic e Allevato (2011), por sua vez, desenvolvem pesquisas que estão alinhadas com os aspectos das pesquisas supracitadas. Segundo essas pesquisadoras, ao implementar a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, por elas intitulada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, contribui-se significativamente com a construção, compreensão e a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos, pois:

> [...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhe ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais aprimorado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série a ser atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema [problema gerador] que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema (Onuchic; Allevato, 2011, p. 85).

Para que aprendizagem através da Resolução de Problemas seja desencadeada, as pesquisadoras sugerem dez etapas para o desenvolvimento dessa Metodologia em sala de aula:

> (1) proposição do problema; (2) leitura individual; (3) leitura em conjunto; (4) resolução do problema; (5) observar e incentivar; (6) registro das resoluções na lousa; (7) plenária; (8) busca pelo consenso; (9) formalização e (10) proposição e resolução de novos problemas (Allevato; Onuchic, 2021, p. 52)

No contexto da aprendizagem fundamentada através da Resolução de Problemas, a construção da compreensão dos conceitos e conteúdos ocorrem de forma progressiva, a partir da necessidade de buscar justificativas conceituais que sustentam a aceitação ou a rejeição de determinadas soluções. Ademais, pesquisas têm evidenciado que essa abordagem favorece, ainda, a aprendizagem de múltiplas estratégias de resolução, o desenvolvimento do raciocínio matemático e a produção de dados avaliativos durante o próprio processo de aprendizagem, valorizando o percurso formativo do estudante (Allevato, 2014; Silva, 2025; Van de Walle, 2009).

Dessa forma, as atividades de resolução de problemas pelo estudante promovem o desenvolvimento de habilidades cognitivas e a compreensão dos conceitos e conteúdos matemáticos, uma vez que "[...] a compreensão e as habilidades são desenvolvidas melhor quando os estudantes têm a permissão para investigar novas ideias, criar e defender soluções para problemas e participar em uma comunidade de aprendizagem matemática" (Van de Walle, 2009, p. 9). Elucidadas essas ideias, apresentaremos, na sequência, os aspectos teóricos sobre argumentação, prova e demonstração matemática, bem como sua relação com a resolução de problemas.

ARGUMENTAÇÃO, PROVA E DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

A argumentação, prova e a demonstração em Matemática têm sido expressivamente recomendadas por diversos documentos de orientação curriculares para serem trabalhados ao longo de toda a Educação Básica. Essa recomendação justifica-se pelo fato de tais práticas favorecerem o desenvolvimento de diversas habilidades cognitivas, promovendo a compreensão da importância da prova matemática.

De acordo com Balacheff (2019), existe uma relação entre explicação, prova e a prova matemática[4] no seu processo de desenvolvimento:

> O que é produzido primeiro é uma "**explicação**" da validade de uma afirmação a partir da perspectiva do próprio sujeito. Este texto pode alcançar o *status* de **prova** se obtiver apoio suficiente de uma comunidade que o aceite e valorize como tal. Finalmente, pode ser reivindicado como **prova matemática** se atende aos padrões atuais da prática matemática (Balacheff, 2019, p. 430, tradução e grifos nossos).

Segundo Balacheff (2019), a explicação tem como objetivo esclarecer e validar a resolução do estudante a partir do seu próprio raciocínio e entendimento, utilizando seus conhecimentos prévios e sem recorrer, necessariamente, a regras formais. Esse processo proporciona a discussão, a rejeição ou aceite da sua resposta. A prova, por sua vez, é uma explicação convincente e ordenada que visa comprovar a validade da resposta por meio de argumentos concatenados e lógicos, e aceitos por

4 Segundo Balacheff (2002), prova matemática é sinônimo de demonstração matemática.

uma comunidade. Já a demonstração matemática expressa um conjunto bem definido de regras e atende aos padrões estabelecidos pela comunidade de matemáticos profissionais.

Mod (2016, p. 90) destaca que "[...] a riqueza da demonstração de um teorema não reside somente na prova da tese nele contida, mas na Matemática que é desenvolvida pelas tentativas de demonstração". Nessa mesma direção, Rav (1999, p. 20, tradução nossa) considera que a importância da prova matemática transcende a validação de teoremas, destacando seus aspectos formativos, de modo que "[...] Todo o arsenal de metodologias matemáticas, conceitos, estratégias e técnicas de resolução de problemas, o estabelecimento de interconexões entre teorias, a sistematização de resultados - todo o conhecimento matemático está embutido em provas".

Para Polya (1990), embora a demonstração matemática seja concebida como uma ciência dedutiva, acabada; entretanto, para o contexto escolar, o raciocínio dedutivo deve ser desenvolvido de forma semelhante à da demonstração formal, ou seja, por meio do raciocínio plausível[5], da descoberta, das tentativas, da heurística, dos insucessos e das reformulações das ideias.

Corroborando com essas ideias, De Villiers (2010) acredita na íntima relação entre a experimentação e a dedução matemática. No ambiente escolar, a experimentação pode contribuir significativamente para o desenvolvimento de habilidades cognitivas importantes para o estudante, pois:

> Na pesquisa matemática cotidiana, a **experimentação** e a **dedução** complementam-se em vez de se oporem. Geralmente, nossa certeza matemática não se baseia exclusivamente em métodos lógico-dedutivos ou experimentação, mas em uma combinação saudável de ambos. Os alunos devem desenvolver um ceticismo saudável tanto em relação às **evidências empíricas** quanto às provas dedutivas em matemática e aprender a examiná-las cuidadosamente. O pensamento intuitivo e a **experiência experimental** ampliam e enriquecem; eles não apenas estimulam a reflexão dedutiva, mas também podem contribuir para sua qualidade crítica ao fornecerem contraexemplos heurísticos. Portanto, matemática intuitiva, informal e experimental é uma parte integral da matemática genuína (De Villiers, 2010, p. 216-217, tradução e grifos nossos).

Percebemos, assim, que para Polya (1990) e De Villiers (2010), os aspectos da heurística, da descoberta e da experimentação são fundamentais para o desenvolvimento e a compreensão de provas matemáticas dedutivas na Educação Básica. Destacamos ainda que tanto os documentos oficiais quanto as pesquisas em Educação Matemática enfatizam a "[...] necessidade de que esse processo ocorra de forma progressiva na sala de aula, permitindo que os estudantes avancem gradativamente para níveis mais formais da prova matemática, ampliando sua compreensão e favorecendo o desenvolvimento do pensamento matemático" (Silva, 2025, p. 97).

Com base nessas considerações, compreendemos que a relação entre a Resolução de Problemas com a Argumentação, Prova e Demonstração Matemática se estabelece por meio dos aspectos cognitivos comuns que ambas promovem. Além disso, permitem a compreensão de conceitos e conteúdos tanto na resolução do problema quanto na dedução das conjecturas. Desse modo, as atividades fundamentadas através da resolução de problemas se constituem como um meio privilegiado de aprendizagem, pois, além desenvolverem as habilidades especificadas por Balacheff (2019),

5 É caracterizado por ser provisório, razoável ou provável, embora suas conclusões não sejam comprovadamente verdadeiras. Ele está sujeito à revisão e avaliação contínua e é frequentemente utilizado para formular conjecturas que orientam o processo de descoberta e investigação em matemática e em outras áreas do conhecimento (Polya, 1990).

também desenvolvem a criatividade, a autonomia e a habilidade de explicação, e os "[...] processos sofisticados de pensamento matemático e o trabalho de ensino de Matemática acontecem em um ambiente de investigação [...]" (Allevato; Onuchic, 2021, p. 53).

Concordando com Silva e Allevato (2024, p. 5), neste trabalho, entendemos a prova matemática na Educação Básica como:

> um processo social, em que os interlocutores utilizam seus conhecimentos prévios para elaborar argumentos conectados, além de empregar conceitos e a escrita matemática para validar as respostas ao problema gerador. O problema gerador é proposto para desencadear e orientar a construção e a compreensão de novos conteúdos e conceitos matemáticos, bem como para promover oportunidade de argumentação e prova, e o raciocínio matemático.

Assim, ao formular conjecturas com base em conhecimentos prévios, os estudantes aprimoram seus argumentos, que são discutidos e validados coletivamente. Esse processo pode favorecer o desenvolvimento de provas e a construção compartilhada do conhecimento matemático; desse modo, o problema gerador orienta o processo e culmina em uma resposta justificada.

A seguir, apresentamos os procedimentos metodológicos da pesquisa, juntamente com o relato e a descrição da prática desenvolvida em sala de aula.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O estudo apresentado neste manuscrito integra uma pesquisa mais abrangente e foi desenvolvido com 74 estudantes de duas turmas da 3ª série do curso Técnico em Mecânica Integrado ao Ensino Médio, de uma escola pública da região metropolitana de São Paulo. Elaboramos uma sequência de atividades fundamentada na resolução de problemas, com o objetivo de promover a construção de novos conceitos e conteúdos relacionados às cônicas, à dedução de suas equações e ao desenvolvimento do pensamento matemático dos participantes. Neste trabalho, apresentaremos os resultados dos problemas geradores relativos à circunferência e à parábola, desenvolvidos entre agosto e outubro de 2023. Os estudantes trabalharam em grupos[6], conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021), e foram identificados por um número e pela letra de sua turma, ou seja, G1-3ªB corresponde ao Grupo 1 da turma da 3ª série B.

Trata-se de uma pesquisa de natureza empírica, com abordagem qualitativa. Os dados foram coletados por meio de observação participante e análise documental, registrados em gravações, filmagens e em diário de campo, ou seja, "esforça-se por usar múltiplas fontes de evidências em vez de se basear em uma única fonte" (Yin, 2016, p. 29). Além disso, esse tipo de pesquisa representa um mergulho profundo do pesquisador no ambiente a ser investigado, visando à compreensão do grupo social, organização/instituição ou trajetória, com ênfase nas particularidades de um fenômeno e em seus significados (Goldenberg, 2004).

Concordamos com Lester e Cai (2016, p. 122, tradução nossa) quando eles ressaltam que, no contexto da resolução de problemas, os "[...] problemas matemáticos que são verdadeiramente problemáticos e envolvem matemática significativa têm o potencial de fornecer os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos". Diante desse entendimento, reformulamos

6 Em ambas as turmas formaram nove grupos, sendo quatro estudantes por grupo na 3ª série A; e na 3ª série B sete grupos com quatro e dois com cinco estudantes.

VIDYA, v. 45, n. 2, p. 551-573,
jul./dez. - Santa Maria, 2025.

dois problemas de um livro didático, de modo que se configurassem como problemas geradores. O primeiro, sobre as Emissoras de Rádio, está relacionado ao conceito de circunferência; o segundo, intitulado Problema de Engenharia, refere-se ao conceito de parábola e estão apresentados nas Figuras 2 e 3.

Por meio desses problemas, objetivamos analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático e na evolução das respostas dos estudantes em relação aos conceitos de circunferência e parábola, bem como à dedução de suas equações, conforme as concepções de Allevato e Onuchic (2021).

De acordo com essas pesquisadoras, o estudo de um novo conteúdo matemático deve ser iniciado a partir de um problema, denominado gerador, planejado pelo professor com intuito de desencadear a aprendizagem de algum conteúdo matemático. No presente estudo, os problemas geradores foram elaborados para desencadear e desenvolver o ensino e a aprendizagem de conceitos (definição, equações e significados) sobre circunferência e de parábola, no contexto da Geometria Analítica. Vale ressaltar que durante o processo, realizou-se a dedução formal das equações das cônicas em questão, articulando o uso do *GeoGebra* com a exploração matemática necessária à resolução dos problemas. Tais atividades tiveram por finalidade evidenciar a conexão entre a resolução de problemas e a prova matemática, em conformidade com as pesquisas de Balacheff (2019), De Villiers (2010), Polya (1990) e Silva (2025). Com o intuito de atingir este propósito, a análise dos dados pautar-se-á nos protocolos das resoluções escritas e nos registros das interações mediadas pelo *GeoGebra*, que constituem os instrumentos de análise da evolução do pensamento matemático dos participantes.

Figura 2 - Problema gerador das Emissoras de Rádio

Duas emissoras de rádio, a primeira com uma potência que é o dobro da segunda, estão separadas por uma distância de 5 quilômetros. Sabe-se que a intensidade (***I***) com que um receptor recebe os sinais emitidos é proporcional à potência (***P***) e inversamente proporcional ao quadrado da distância (***d***) da emissora ao receptor segundo a equação: $I = \frac{P}{d^2}$.

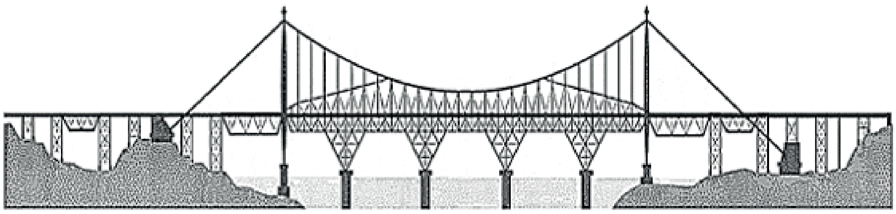
a) Faça uma possível representação do problema utilizando o GeoGebra. Justifique sua resposta;
b) Determine os pontos nos quais a qualidade de recepção das emissoras é a mesma. Justifique sua resposta;
c) Utilizando o GeoGebra, faça a representação dessa situação com a resposta do item anterior e informe qual é o tipo da figura encontrada e os seus elementos;
d) Explore o software de geometria dinâmica e crie novas figuras similares à situação expressa no problema justificando cada representação nova;
e) A figura encontrada sugere qual significado em relação à situação expressa no problema?
f) A expressão encontrada no item (b) pode ser representada de outra maneira? Como?
g) No seu conhecimento, este novo conteúdo está relacionado com outro conceito matemático? Justifique sua resposta.
h) Encontrar a expressão analítica que generaliza o item (b). Justifique sua resposta.
i) Elabore um novo problema sobre o conteúdo que foi evidenciado nos itens anteriores para propor aos seus colegas.

Fonte: Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2005, p. 82).

Figura 3 - Problema Gerador de Engenharia Civil

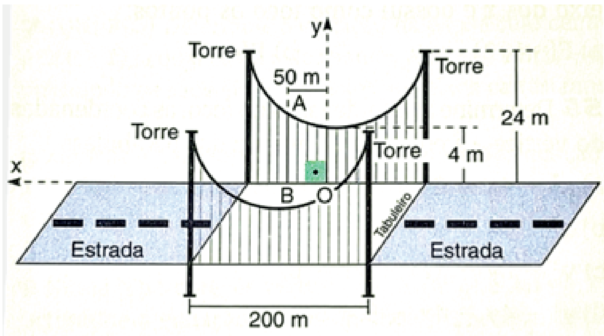
Atualmente, o desenvolvimento na área da construção civil possibilitou o acesso a diversas regiões, tanto no Brasil como em outros países, que, em época passada, só era possível por navegação. A engenharia desenvolveu um tipo de ponte suspensa, intitulada de 'Ponte Pênsil', que é sustentada por um sistema de cabos e mastros, visando não interferir no tráfego marítimo e transpor grandes distâncias. Os cabos de suspensão devem ser ancorados em cada extremidade da ponte, e qualquer carga aplicada à ponte é transformada em tensão nesses cabos principais. Os cabos principais continuam além das torres de suporte até os suportes no nível do convés e continuam ainda as conexões com as âncoras no solo, conforme a Figura 1:

Figura 1. Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis, com 821 metros de extensão e 15,92 metros de largura de vão central.



Fonte: [Conheça a história da Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis | Santa Catarina | G1 (globo.com)]

O engenheiro civil Leonardo Ibn Izzid Hassan Said, da empresa Plano&Plano, na construção da ponte pênsil precisou interromper os trabalhos devido a um problema no projeto. Ele iniciou um estudo detalhado do projeto e, para que a construção da ponte apresentasse exatidão no seu formato, os seus cálculos possibilitaram confirmar que as torres de suporte deveriam ter 24 m de altura e um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada conforme a imagem da Figura 2:



Considere o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo entre as duas torres da figura como sendo o eixo dos y, perpendicular a x e passando pelo ponto mais baixo da curva. O engenheiro Leonardo Ibn Izzid Hassan Said, querendo contribuir na formação profissional do estagiário Lucas Habdala Lamek, propôs o desafio de encontrar as respostas para os seguintes itens:

1) Qual o possível nome para a curva formada pelos cabos entre duas torres consecutivas? É possível obter o nome da curva usando o GeoGebra? Como?
2) Como podemos representar a curva entre as torres com o software de geometria dinâmica GeoGebra?
3) Quais os elementos que compõem a curva?
4) Determine o comprimento do elemento de sustentação $\overline{BA}$, que liga verticalmente o cabo curvo ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y.
5) Sabe-se que essa curva é simétrica em relação ao eixo y, neste caso é possível afirmar que o comprimento do elemento de sustentação vertical, que liga o cabo curvo ao tabuleiro da ponte, agora do lado direito que está situado a 50 m do eixo y, tem o mesmo comprimento da haste $\overline{BA}$? Justifique sua resposta?
6) Determine a expressão que generalize a situação do problema? Justifique sua resposta?
7) Elabore um problema novo sobre o conteúdo que foi evidenciado nos itens anteriores para propor aos seus colegas.
8) Como você avalia a utilização do aplicativo GeoGebra nesse contexto? Quais os pontos positivos? Quais os negativos?

Fonte: Adaptado de Giovanni e Bonjorno (2005, p. 131).

A seguir, apresentamos as respostas dos participantes do estudo a algumas questões de ambos os problemas, bem como as análises e as nossas interpretações dos dados por eles gerados.

ANÁLISE DOS DADOS E DISCUSSÃO

Os desenvolvimentos das resoluções dos dois problemas geradores, seguiram as dez etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021). Após a reformulação dos problemas, iniciamos a sequência de atividade pelo problema das Emissoras de Rádio, relacionados aos conceitos e conteúdos sobre circunferência. Orientamos os participantes como ocorreria a atividade, cada aluno recebeu uma cópia do problema das Emissoras para leitura individual.

Ao término dessa primeira leitura, os estudantes em grupos, iniciaram a leitura e a discussão com os colegas, para desenvolverem suas estratégias e responderem nove itens, entretanto aqui neste manuscrito vamos nos ater apenas nos itens ‘b’ e ‘h’ visando responder à nossa indagação. Esperávamos que os alunos elaborassem uma possível resolução utilizando seus conhecimentos prévios e os recursos do *GeoGebra* ou papel e lápis, após a compreensão do problema. Cada grupo apresentou na lousa sua resolução sem uma ordem pré-estabelecida, ocorrendo de acordo com a disposição de cada grupo.

Evidenciamos que todos os grupos apresentaram expressiva dificuldade para responder as questões do problema das Emissoras de Rádio como havíamos previsto durante o planejamento da sequência de atividade, por se tratar do primeiro problema gerador, bem como da implementação de um novo conteúdo no formato da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, não consideramos esses aspectos como obstáculos, mas sim oportunidades para promovermos a construção e compreensão de conceitos e conteúdos, o desenvolvimento de habilidades cognitivas, o protagonismo, a criatividade, a argumentação, as provas, o raciocínio e o pensamento matemático. Ou seja, concordamos com Allevato e Onuchic (2021) ao afirmarem que:

> **Conceitos e habilidades matemáticas** são apreendidas no contexto da resolução de problemas; promove-se o **desenvolvimento de processos sofisticados de pensamento**, e o trabalho de ensino de Matemática acontece em um ambiente de investigação orientada em resolução de problemas (Allevato; Onuchic, 2021, p. 53, grifo nosso).

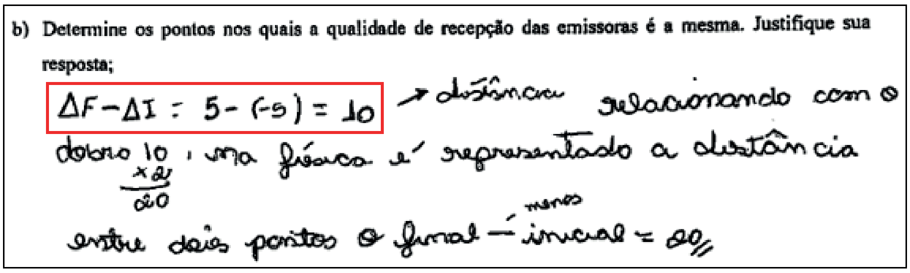
Nesse contexto, “os problemas são um meio para pôr o foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos; uma ferramenta para formar sujeitos com capacidade autônoma de resolver problemas, críticos e reflexivos [...]” (Vila; Callejo, 2006, p. 29).

Foi visando esses pressupostos que desempenhamos o papel de professores mediadores durante a resolução e o momento de plenária, e inquirimos os estudantes durante a leitura do problema, orientando-os a interpretar os dados, relacioná-los a conceitos e conteúdo já estudados, com o intuito de fomentar possíveis estratégias de resolução. Esses fatos são apresentados durante a apresentação do G9-3ªA.

O grupo apresentou a resposta do item ‘a’ e explicou para seus colegas que a circunferência seria a figura mais adequada para representar a situação proposta, pois o formato circular de propagação dos sinais emitidos pelas torres das emissoras permite que eles sejam enviados para todas as direções. As emissoras foram representadas nos pontos (-5, 0) e (0, 0), enquanto a unidade receptora foi posicionada no ponto (5, 0), conforme a imagem a seguir:

Em seguida, o grupo respondeu o item ‘b’ utilizando a expressão ΔF - ΔI, empregando conceito de cinemática, da disciplina de Física, para determinar a posição da unidade receptora, conforme a imagem da Figura 5:

Figura 4 - Resposta do item ‘b’ do G9-3ªA.


b) Determine os pontos nos quais a qualidade de recepção das emissoras é a mesma. Justifique sua resposta;

$\boxed{\Delta F - \Delta I = 5 - (-5) = 10}$ → distância relacionando com o dobro $\underset{20}{\underset{\times 2}{10}}$, na física é representado a distância entre dois pontos o final menos inicial = 20//

Fonte: Dados do problema das Emissoras.

De acordo com Allevato e Onuchic (2019), durante a resolução de problemas, os estudantes estabelecem conexões com outras áreas do saber para auxiliá-los no desenvolvimento das suas resoluções. No entanto, foi na resposta das questões ‘e’ e ‘f’ que percebemos o momento propício para desencadear a dedução da equação da circunferência. Os estudantes responderam que a figura adequada seria uma parábola para o item ‘e’ e que sua equação é uma função quadrática no item ‘f’.

A aluna do grupo apresentador, percebeu que a forma circular possibilita uma propagação homogênea em todas as direções, conforme a representação feita na resposta da questão ‘a’. Essa aluna argumentou que a resposta indicada na folha de resolução estava incorreta, pois a função quadrática gera a representação gráfica de uma parábola e não da circunferência (aluna desenhou a parábola na lousa).

Diante desse contexto, aproveitamos a discussão promovida pelo grupo e a participação dos estudantes presentes na segunda apresentação daquele dia para auxiliá-los na construção e compreensão da dedução da equação da circunferência. O professor pesquisador questionou o grupo em relação ao significado da expressão ΔF - ΔI = 5 - (-5) = 10.

> **Prof. Pesquisador**: O que representa essa expressão?
> **G9-3ªA**: Cálculo de distância;
> **Aluna1_G9-3ªA**: Mas por que essa expressão tem a ver com a equação da circunferência?
> **Prof. Pesquisador**: Algum grupo saberia explicar por que a expressão ΔF - ΔI =5-(-5) = 10 pode levar à equação da circunferência considerando os dados do problema? Vou fazê-los refletir. O que representa ΔF - ΔI, segundo sua colega?
> **Aluna2_G9-3ªA**: Cálculo da distância, professor;
> **Prof. Pesquisador**: Sim, uma medida. Essa medida é de onde para onde?
> **G9-3ªA**: Do ponto final para o ponto inicial;
> **Prof. Pesquisador**: E na resolução de vocês, os valores expressos em ΔF -ΔI = 5 - (-5) = 10 referem-se a quais pontos?

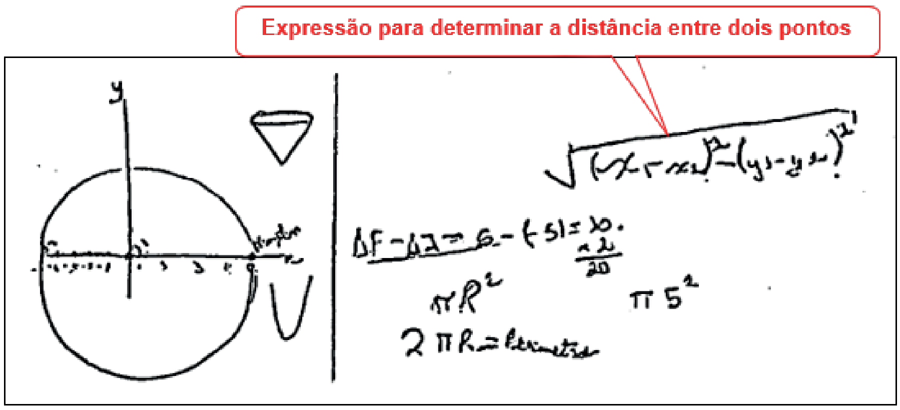
> **G9-3ªA**: À emissora (estudante apontou para o ponto de coordenadas (-5, 0)) e ao receptor (estudante apontou para o receptor de coordenada (5, 0));
> **Prof. Pesquisador**: Pelo desenho de vocês, podemos verificar que a distância entre as emissoras é de 5 km. Uma emissora está em (-5, 0) e a outra em (0, 0). Qual é o nome dessa medida na circunferência?
> **Aluna1_G9-3ªA**: Raio;
> **Prof. Pesquisador**: Então, a distância entre as duas emissoras corresponde ao raio da circunferência. Será que podemos deduzir sua equação a partir dessa relação?

O grupo não conseguiu estabelecer a relação necessária para deduzir a equação da circunferência. O professor pesquisador, então, reformulou a pergunta.

> **Prof. Pesquisador**: Vocês mencionaram que cada emissora está em um determinado ponto e que a distância entre elas corresponde ao raio da circunferência. Como podemos calcular a distância entre as emissoras?
> **G9-3ªA**: Subtraindo a posição final menos a posição inicial;
> **Prof. Pesquisador**: Muito bem! Mas existe apenas essa forma de calcular a distância entre dois pontos?
> **Aluna2_G9-3ªA**: Não, existe outra forma (aluna escreveu na lousa a expressão) $(x_1 - x_2)- (y_1 - y_2)$, certo, professor?

Na sequência, outra aluna do grupo completou a equação, escrevendo a expressão: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$, conforme a imagem a seguir:

Figura 5 - Representação da equação cálculo da distância entre dois pontos do G9-3ªA.



Fonte: Dados do problema das Emissoras.

O grupo utilizou a operação da diferença entre a variação dos coeficientes de x e y, quando, na verdade, o correto seria a adição. No entanto, para não interromper o raciocínio desenvolvido pelos estudantes, não questionamos esse erro, e indagamos o grupo novamente:

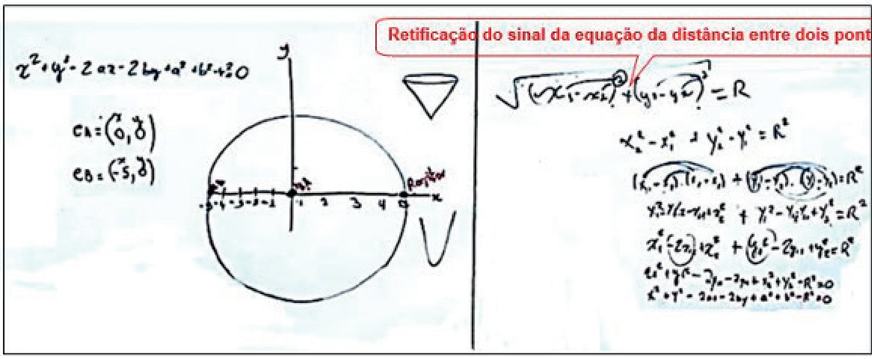
Prof. Pesquisador: Legal! Agora, a distância entre dois pontos, na resolução de vocês, será igual a quê?
G9-3ªA: Raio;
Prof. Pesquisador: Então, escrevam isso na sua equação;
G9-3ªA: $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2} = R$
Prof. Pesquisador: Vocês conseguem relacionar a resposta da questão ‘a’, uma possível representação do problema, com a equação da distância entre as emissoras sendo igual ao comprimento do raio?
G9-3ªA: Sim, professor. Existe uma relação.

Um estudante do grupo 6 comentou que a estratégia adotada pelos seus colegas do grupo 9 estava mais coerente do que a resolução deles. De acordo com Allevato e Onuchic (2021), de fato, o momento de plenária possibilita que os estudantes aprendam com seus colegas. Nesse momento, uma aluna do grupo 9 informou que, durante a resolução do problema, fez uma investigação e descobriu a expressão da equação da circunferência. Questionamos o grupo novamente:

Prof. Pesquisador: Por favor, escreva a equação na lousa;
Aluna3_G9-3ªA: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$;
Prof. Pesquisador: Me explique, por que essa deve ser a equação?
Aluna3_G9-3ªA: Professor, o item (g) solicita a expressão analítica que generaliza o item (b), então eu pesquisei e encontrei essa equação;
Prof. Pesquisador: Vocês acham que a expressão $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ tem alguma relação com a expressão que determina o comprimento entre dois pontos, que vocês escreveram $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2} = R$?
G9-3ªA: Sim, professor. Tem relação;
Prof. Pesquisador: Como vocês especificaram que existe uma relação entre essas duas equações, posso desafiá-los?
G9-3ªA: Sim;
Prof. Pesquisador: A partir da equação da distância entre dois pontos $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2} = R$, determine a equação da circunferência, dada por $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$. Ou seja, partam da equação da distância e tentem chegar na equação da circunferência.
G9-3ªA: Vamos iniciar.

O grupo utilizou a equação $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}$ que já se encontrava na lousa e iniciou a dedução. Uma aluna do grupo corrigiu o erro de sinal na equação e os estudantes desenvolveram a dedução, conforme a ilustração a seguir:

Figura 6 - Dedução da equação da circunferência pelo G9-3ªA.



Fonte: Dados do problema das Emissoras.

A seguir, apresentamos a transcrição da equação da circunferência, exibida na Figura 6:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = R$$

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = R^2$$

$$(x_1 - x_2) * (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) * (y_1 - y_2) = R^2$$

$$x_1^2 - x_{1*2} - x_{1*2} + x_2^2 + y_1^2 - y_{1*2} - y_{1*2} + y_2^2 = R^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_{1*2} - 2y_{1*2} + x_2^2 + y_2^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

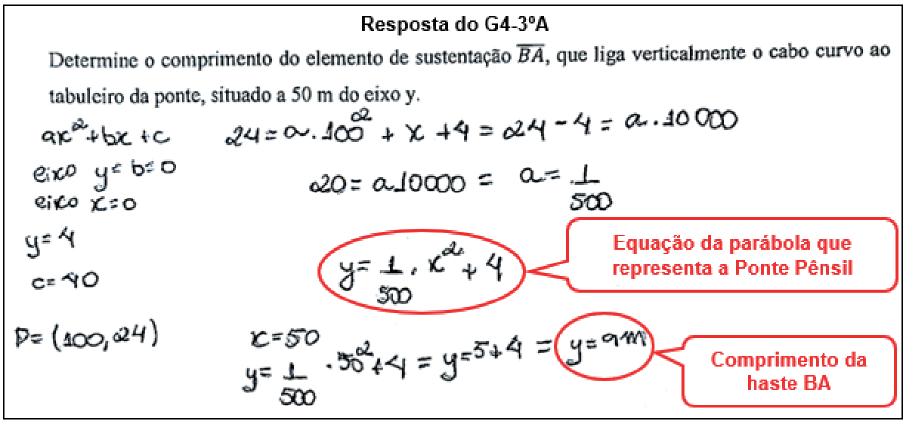
Apesar das dificuldades apresentadas pelos estudantes em relação ao produto de polinômios, regras de sinais, manipulações algébricas e outros, foi possível identificar como uma atividade fundamentada na resolução de problemas favorece o desenvolvimento do pensamento, a tomada de decisões, a avaliação pessoal e dos pares, a criticidade, os argumentos baseados em conceitos, a criatividade, bem como a construção e compreensão de conceitos e conteúdos e o desenvolvimento dos pensamentos algébrico e geométrico. Cabe destacar ainda que, a atividade promoveu o desenvolvimento dos raciocínios indutivo e dedutivo, fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

Por fim, percebemos que toda essa dinâmica foi essencial para promover a compreensão e construção dos conceitos e conteúdos sobre a circunferência, além de relembrar conhecimentos adquiridos em séries anteriores.

As dificuldades evidenciadas na resolução do problema das Emissoras de Rádio, possibilitou inserir perguntas adicionais no problema de Engenharia Civil com o intuito de promover a construção e a compreensão da dedução da equação da parábola. Percebemos que os grupos de ambas as turmas responderam corretamente a primeira pergunta, além de conseguirem responder à questão 4, conforme a imagem da Figura 7:

VIDYA, v. 45, n. 2, p. 551-573,
jul./dez. - Santa Maria, 2025.

Figura 7 - Resolução da questão 4 do G4-3ªA.



Resposta do G4-3ºA

Determine o comprimento do elemento de sustentação $\overline{BA}$, que liga verticalmente o cabo curvo ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y.

ax^2+bx+c $\quad 24 = a \cdot 100^2 + x + 4 = 24 - 4 = a \cdot 10000$

eixo $y = b = 0$ $\quad 20 = a \cdot 10000 = a = \frac{1}{500}$

eixo $x = 0$

$y = 4$

$c = 40$

$y = \frac{1}{500} \cdot x^2 + 4$

Equação da parábola que representa a Ponte Pênsil

$P = (100, 24)$ $\quad x = 50$

$y = \frac{1}{500} \cdot 50^2 + 4 = y = 5 + 4 = y = 9m$

Comprimento da haste BA

Fonte: Dados do problema de Engenharia.

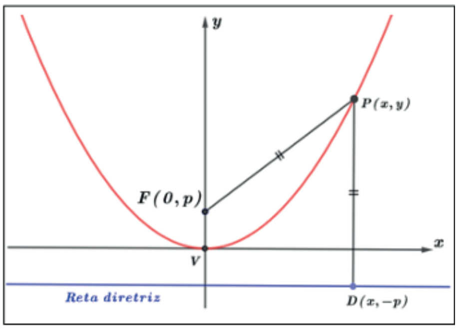
Evidenciamos que tanto o G4-3ªA quanto outros grupos de ambas as turmas estabeleceram conexões com aspectos relacionados ao conceito de função quadrática, determinaram a equação que representa a curva do problema e calcularam corretamente o comprimento da haste $\overline{BA}$. Ademais, percebemos que esses estudantes utilizaram raciocínio lógico e manipulações algébricas de forma coerente sem a necessidade da intervenção do professor pesquisador, conforme ocorreu no problema das Emissoras.

Esses aspectos estão em conformidade com as pesquisas de (Balacheff, 2019; De Villiers, 2010; Rav, 1999), ao salientarem que os argumentos desenvolvidos pelas respostas dos estudantes possibilitaram promover uma sequência conectada e lógica de afirmações, bem como de explicarem quais foram os conceitos, propriedades e ideias empregadas na resolução. Cabe destacar também, que foi possível identificar também, uma evolução significativa nas respostas dos participantes do primeiro para o segundo problema gerador. De acordo com Silva (2025), o processo de compreensão e de elaboração de prova matemática no contexto escolar, precisa ocorrer de forma gradativa.

Apesar da expressiva evolução na compreensão de conceitos e conteúdos, e das respostas das questões do problema de Engenharia, identificamos pelo questionamento dos estudantes durante a resolução e no momento de plenária, dúvidas em relação para responder à questão que solicitava a expressão que generalizava o cabo curvo da ponte pênsil. Foi então que elaboramos outra atividade para que os grupos pudessem compreender e desenvolver a relação para deduzir a equação que generaliza a representação de famílias de parábolas. Apresentamos a eles o gráfico a seguir, acessado pelo link https://www.geogebra.org/m/j5xw4vaf que lhes foi fornecido previamente:

VIDYA, v. 45, n. 2, p. 551-573,
jul./dez. - Santa Maria, 2025.

Figura 8 - Representação gráfica da parábola com vértice sobre o sistema de eixos coordenados.

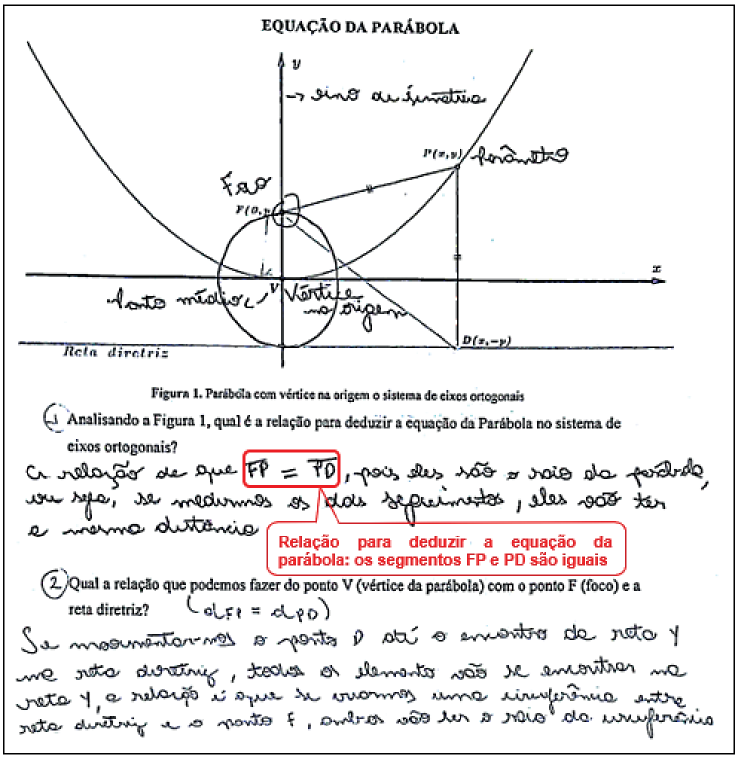


Fonte: Dados do problema de Engenharia.

Os estudantes foram convidados a manipular a construção da parábola no *GeoGebra*, a fim de analisar a figura e investigar qual relação matemática permitiria deduzir sua equação geral, no sistema de eixos ortogonais. O pesquisador retomou com as turmas o processo utilizado anteriormente na dedução da equação da circunferência e, com base nesse exemplo, propôs que refletissem sobre qual seria a relação que levaria a deduzir a equação da parábola. A partir desse questionamento, os grupos iniciaram discussões e passaram a manipular o ponto D na janela de visualização 2D do *GeoGebra*, dando início às suas resoluções.

Evidenciamos que os grupos entenderam que a distância entre os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{PD}$ são iguais, respondendo corretamente às perguntas 1 e 2 dessa atividade, conforme a imagem da Figura 9.

Figura 9 - Resposta do grupo 3 do 3ªB.

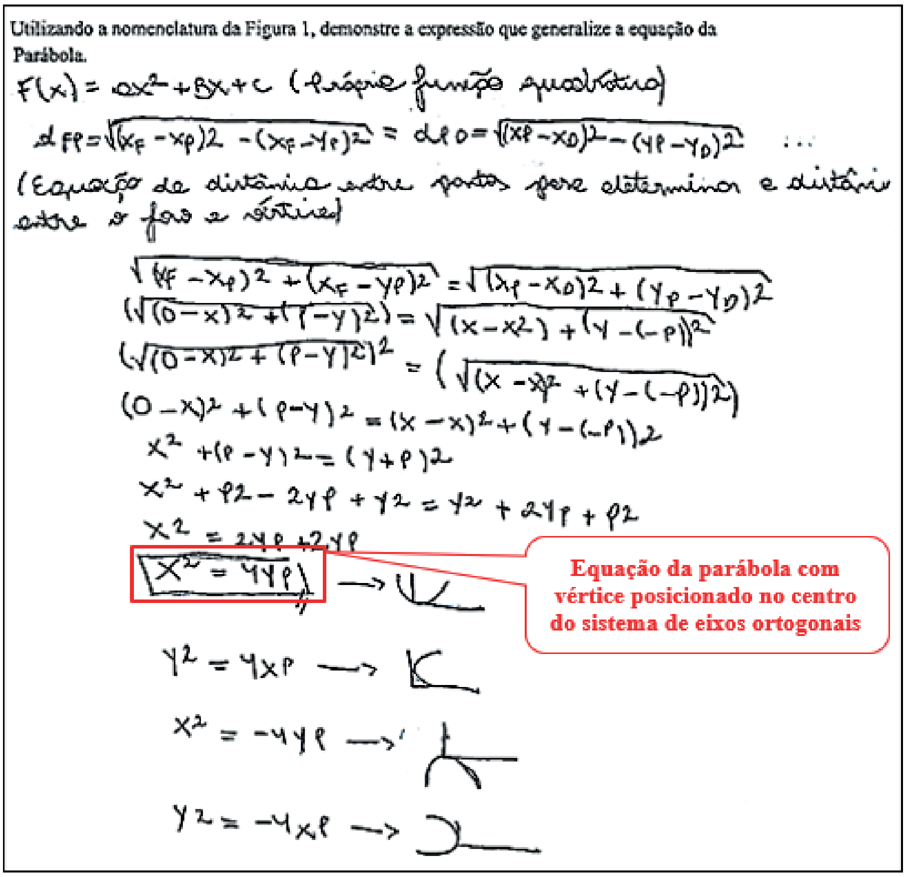


Fonte: Dados do problema de Engenharia.

Ao utilizarem os recursos do *GeoGebra* para deduzir a equação da parábola, os estudantes do G3-3ªB identificaram corretamente que os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{PD}$ possuem a mesma medida. Na segunda questão, apontaram que o vértice da parábola corresponde ao ponto médio entre o foco F e a reta diretriz d, além de ser o centro de uma circunferência com centro em V e raio $\overline{VF}$, conforme ilustrado na Figura 9. Essa representação evidenciou que os segmentos $\overline{VF}$ e $\overline{FP}$ são congruentes, representando o raio dessa circunferência, conforme as construções e anotações feitas durante a resolução.

Esse grupo desenvolveu a dedução da equação da parábola com base nas coordenadas cartesianas fornecidas na atividade, evidenciando um raciocínio coerente e uma resolução consistente. Apresentaram seus argumentos de forma clara, manipularam as incógnitas envolvidas e chegaram à generalização por meio da expressão que representa uma família de curvas, conforme a ilustração a seguir:

Figura 10 - Demonstração da equação da parábola do G3-3ªB.


Utilizando a nomenclatura da Figura 1, demonstre a expressão que generalize a equação da Parábola.

$F(x) = ax^2 + Bx + c$ (Própria função quadrática)

$d_{FP} = \sqrt{(x_F - x_P)2 - (x_F - y_P)^2} = d_{PD} = \sqrt{(x_P - x_D)2 - (y_P - y_D)^2}$ ...

(Equação de distância entre pontos para determinar a distância entre o foco e vértice)

$\sqrt{(x_F - x_P)^2 + (x_F - y_P)^2} = \sqrt{(x_P - x_D)2 + (y_P - y_D)^2}$

$(\sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2}) = \sqrt{(x-x2) + (y-(-p))^2}$

$(\sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2})^2 = (\sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))2})$

$(0-x)^2 + (p-y)2 = (x-x)^2 + (y-(-p))2$

$x^2 + (p-y)2 = (y+p)2$

$x^2 + p2 - 2yp + y2 = y2 + 2yp + p2$

$x^2 = 2yp + 2yp$

$\boxed{x^2 = 4yp} \rightarrow$

$y^2 = 4xp \rightarrow$

$x^2 = -4yp \rightarrow$

$y2 = -4xp \rightarrow$

Fonte: Dados do problema de Engenharia.

Os estudantes assumiram como premissa que a distância entre o foco F e o ponto P na parábola é igual à distância entre os pontos P e D, D ponto da diretriz, expressando matematicamente essa relação como $d_{FP} = d_{PD}$. Em seguida, utilizaram a fórmula da distância entre dois pontos para calcular d_{FP} e d_{PD}, desenvolvendo a dedução da equação desta parábola explicando seus procedimentos, raciocínios e conceitos de forma correta. Além disso, generalizaram a equação da parábola quando seu vértice coincide com a origem do sistema de eixos ortogonais, obtendo a equação $x^2 = 4yp$ para parábola cujo eixo de simetria é o eixo y. Descreveram, ainda, a família de equações da parábola quando seu vértice está posicionado na origem.

A partir dessas e de outras evidências, observamos a evolução tanto na construção e compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos das cônicas quanto no desenvolvimento da dedução e do pensamento matemático dos estudantes. Consideramos que essa evolução foi possível devido à combinação da implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com o uso de recursos tecnológicos e o planejamento das atividades para proporcionar a construção e compreensão dos conceitos e conteúdos matemáticos das cônicas, bem como a dedução de suas equações.

Cabe destacar a existência da relação intrínseca entre Resolução e Proposição de Problemas e Argumentação, Prova e Demonstração Matemática. Nesse sentido, conjecturamos que esses protocolos evidenciam essa conexão. Ao implementarmos a MEAAMaRP[7] nas de atividades relacionadas aos conceitos de circunferência e parábola, desenvolvemos problemas geradores cujo processos de resolução desencadearam a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos, conforme enfatizado pelas pesquisadoras Allevato e Onuchic (2021). Além disso, a introdução ao processo de argumentação, prova e demonstração matemática ocorreu por meio de atividades fundamentadas na Resolução de Problemas, permitindo o desenvolvimento de habilidades de argumentação para validação das resoluções, conforme as recomendações de (Balacheff, 2019; De Villiers, 2010; Polya, 1990).

Com base nas ilustrações supracitadas, os estudantes do G3-3ªB desenvolveram uma resolução que corrobora a perspectiva de Balacheff (2019) e Balacheff *et al.* (2024) sobre explicação, argumentação, prova e demonstração matemática para validar suas respostas no problema de Engenharia. A explicação apresentada descreve toda a organização da resolução construída pelos estudantes. Inicialmente, compreenderam a relação entre os segmentos $\overline{FP}$ e $\overline{PD}$, identificando sua igualdade com o auxílio do *GeoGebra*. Em seguida, descreveram como desenvolveriam a argumentação da resolução, utilizando a expressão matemática da distância entre dois pontos

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Dessa forma, estabeleceram a equação $d_{FP} = d_{PD}$ e, posteriormente, apresentaram a argumentação considerando as coordenadas dos pontos F, P e D como (0, P); (x, y) e (x, - p), respectivamente. Após empregarem a fórmula da distância entre dois pontos e substituírem as coordenadas, evidenciamos o caráter explicativo da argumentação. Segundo Balacheff (2019), ao validar a resolução do problema, a argumentação assume o *status* de prova. Para que essa prova seja considerada uma demonstração matemática, Balacheff (2019) destaca que deve atender aos padrões da matemática acadêmica. Ademais, consideramos que, embora alguns grupos não tenham conseguido desenvolver a dedução da equação da parábola em razão das dificuldades com as manipulações algébricas, foram capazes de compreender a lógica e o processo de dedução apresentado pelos colegas. Dessa forma, a atividade como um todo contribuiu significativamente para a construção dos conceitos e conteúdos envolvidos, bem como para a compreensão da dedução da equação da parábola com base nos aspectos formais, alinhadas às recomendações dos documentos oficiais (Brasil. 2018;

7 Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

França, 2015; NCTM, 2000; Singapura, 2020) e por estudos no âmbito da Educação Matemática (Allevato; Onuchic, 2021; Balacheff, 2019; De Villiers, 2010)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo teve como objetivo analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na construção do conhecimento matemático e na evolução das respostas dos estudantes em relação aos conceitos de circunferência e parábola, bem como à dedução de suas equações, conforme as concepções de Allevato e Onuchic (2021). As atividades foram desenvolvidas no âmbito da Educação Profissional Tecnológica de Nível Médio em uma escola pública da região metropolitana de São Paulo.

Os dados apresentados nas discussões durante a resolução dos dois problemas geradores e as análises dos protocolos elaborados, permitiram evidenciar as contribuições nos momentos de resolução, na apresentação de suas resoluções na lousa e na plenária, bem como na implementação da Metodologia, que conduz o estudante na construção consciente, responsável, participativa e criativa do conhecimento matemático, em consonância aos objetivos planejados pelo professor na introdução de um novo conteúdo a ser abordado.

Cabe destacar nesse processo, o protagonismo dos estudantes, evidenciado nas diversas estratégias construídas, nos percursos de raciocínio desenvolvidos e nas justificativas elaboradas. Além disso, a interação proporcionada durante as discussões em plenária, a busca pelo consenso e a compreensão de que o erro constitui parte do processo de construção do conhecimento foram aspectos essenciais para o desenvolvimento da compreensão dos conteúdos. Nesse cenário, o papel do professor também se faz relevante, uma vez que lhe permite acompanhar, avaliar e reconhecer tanto os avanços quanto as dificuldades dos estudantes, oferecendo apoio direcionado para a superação de desafios e a consolidação da aprendizagem. Ademais, a mediação docente, aliada ao uso do software de geometria dinâmica *GeoGebra* e à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemáticas através da Resolução de Problemas - cuidadosamente planejada e aplicada - foi determinante para favorecer a construção dos conceitos, dos conteúdos e, especificamente, da dedução da equação da parábola no contexto desta pesquisa.

Apesar dos desafios enfrentados pelas duas turmas, ficou evidente que os estudantes conseguiram construir conhecimentos sólidos, compreender os conceitos relacionados à circunferência e a parábola e reconhecer a relevância da elaboração da prova matemática. Esse percurso foi desenvolvido em um ambiente que estimula habilidades cognitivas elevada, bem como na compreensão e na produção de argumentos matemáticos sofisticados, sendo considerados como uma prova matemática no contexto escolar, alinhando-se às orientações dos documentos (Brasil, 2018; França, 2015; Inglaterra, 2014; NCTM, 2000; Portugal, 2013; Singapura, 2020) e às contribuições de pesquisas na área (Allevato; Onuchic, 2021; Balacheff, 2019; De Villiers, 2010; Ponte *et al.*, 2012).

Diante dessas reflexões, constata-se que é plenamente viável oferecer aos estudantes da Educação Básica oportunidades que favoreçam tanto a construção e a compreensão dos conteúdos matemáticos quanto o desenvolvimento de habilidades como criatividade, generalização, elaboração de provas, argumentação e demonstração matemática. Todo esse processo foi potencializado pelo uso do *GeoGebra*, integrado a um ambiente de aprendizagem pautado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que demonstra grande potencial para promover esses aspectos no contexto escolar.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-57.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. As conexões trabalhadas através da resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática - RenCiMa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 1-14, 2019. https://doi.org/10.26843/rencima.v10i2.2334

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da resolução de problemas: possibilidades em dois diferentes contextos. **Vidya**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 209-232, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/26. Acesso em: 20 de fev. 2024.

AUSTRÁLIA. **Australian curriculum: mathematics about the learning area**. F-10. Version 9.0. Canberra: Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2022.

BALACHEFF, N.; ALMOULOUD, S. A.; SANTOS, M. A. dos; PEREIRA, S. F. M. A argumentação matemática, um conceito precursor da prova matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 26, n. 4, p. 389-412, 2024. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2024v26i4p389-412

BALACHEFF, N. Contrôle, preuve et démonstration: trois régimes de la validation. In: PILET, J.; VENDEIRA, C. (org.). **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques**. Paris: ARDM; IREM de Paris; Université Paris Diderot, 2019. p. 423-456.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular***:* Matemática. Brasília: MEC, 2018.

CONTRERAS, L. C.; CARRILLO, J. Y. Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula. **Educación Matemática**, México, v. 10, n. 1, p. 26-37, 1998.

DE VILLIERS, M. Experimentation and proof in mathematics. In: HANNA, G.; JAHNKE, H. N.; PULTE, H. (org.). **Explanation and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives**. New York: Springer, 2010. p. 205-222.

EMMEL, R.; COSTA, P. O ensino da matemática, a aprendizagem e o fracasso escolar: uma análise dessas relações no Ensino Médio Integrado de uma instituição da rede federal de ensino básico, técnico e tecnológico. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT,** Bento Gonçalves, v. 5, n. 2, p. 96-107, 2019. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/issue/view/82. Acesso em: 01 de mar. de 2024.

FRANÇA. Ministère de l'Éducation Nationale de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche. **Programme mathématiques cycle** *4*. Paris: Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse, 2015.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005. (3º ano do Ensino Médio).

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

INGLATERRA. Department for Education and Skills. **National curriculum in England**: mathematics programmes of study. London: Department for Education, 2014.

JESUS, J. I. de; BARROSO, E. S.; MOURA, D. A. da S. Ensino da matemática: falhas e insucessos, um estudo de caso em uma escola de Pará de Minas-MG. In: **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática.** São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.

LESTER, F.; CAI, J. Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In: FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (org.). **Posing and solving mathematical problems**: advances and new perspectives. New York: Springer, 2016. p. 117-135.

MOD, L. F. A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus**: um estudo de suas demonstrações mediado pelo *GeoGebra*. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739. Acesso em: 15 de mar. 2024.

POLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning: induction and analogy in mathematics**. Princeton: Princeton University Press, 1990. v. 1.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUE, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 355-377, 2012. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.7i2.0003

PORTUGAL. Ministério da Educação e Ciências. **Programa e metas curriculares de matemática**: ensino básico. Lisboa: DGE/MEC, 2013.

RAV, Y. Why do we prove theorems? **Philosophia Mathematica**, Oxford, v. 7, n. 3, p. 5-41, 1999.

SILVA, M. B. **Demonstrações e provas em Geometria Analítica através da resolução e proposição de problemas**. 2025. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2025.

SILVA, M. B.; ALLEVATO, N. S. G. Argumentação e prova: um estudo com a parábola através da resolução de problemas. In: **Anais do IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Natal: SBEM, 2024. p. 1-15.

SILVA, M. B.; ALLEVATO, N. S. G. O papel da resolução de problemas na aprendizagem matemática na atualidade. In: BASTOS, M. S.; MEDEIROS, L. T.; SILVA, A. B. da S.; FARIAS, D. L. G. (org.). **Práticas pedagógicas na Educação Básica**. São Paulo: Meus Ritmos Editora, 2021. p. 36-55.

SINGAPURA. Ministry of Education. **Mathematics syllabuses secondary one to four**: implementation starting with 2020 secondary three cohort. Singapore: Ministry of Education, 2020. https://www.moe.gov.sg

VALE, I. Resolução de problema: um tema em contínua discussão: vantagens das resoluções visuais. In: ONUCHIC, L. de la R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. (org.). **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 131-162.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução de P. H. Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução de E. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Tradução de D. Bueno. Porto Alegre: Penso, 2016.