

**O ENSINO, APRENDIZAGEM E AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA COM OS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA**

*TEACHING, LEARNING AND ASSESSMENT IN MATHEMATICS THROUGH PROBLEM SOLVING:  
AN EXPERIENCE WITH TEACHERS WHO TEACH MATHEMATICS*

*ENSEÑANZA, APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS MEDIANTE LA RESOLUCIÓN  
DE PROBLEMAS: UNA EXPERIENCIA CON DOCENTES QUE ENSEÑAN MATEMÁTICAS*

ROSINEIDE DE SOUSA JUCÁ<sup>1</sup>  
LOURDES DE LA ROSA ONUCHIC<sup>2</sup>

**RESUMO**

Este trabalho teve por objetivo investigar a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para trabalhar os conceitos de proporcionalidade com os professores e futuros professores que atuam nos anos iniciais. O caminho metodológico seguiu as etapas do estudo de aula na qual foi utilizada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas do GTERP para a construção dos conceitos de razão e proporção. Os conceitos de razão e proporção foram discutidos com os professores e depois foi realizado o planejamento e a execução de uma aula em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental para o ensino da ideia de proporção. Os resultados indicaram que a metodologia do GTERP contribuiu de forma favorável para a formação dos professores pois, além de ter possibilitado a ampliação do conhecimento deles sobre os conceitos de razão e proporção proporcionou que eles vivenciassem o uso da metodologia em sala de aula junto aos alunos do 5º ano e verificassem sua eficácia no processo de aprendizagem.

**Palavras-Chave:** Educação Matemática; Formação de professores; Anos iniciais; Resolução de problemas.

**ABSTRACT**

*This study aimed to investigate the contribution of the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving to work on proportionality with teachers and future teachers working in the early years of schooling. The methodological approach followed the stages of a lesson study in which the Teaching-Learning-Assessment Methodology of Mathematics through Problem Solving from GTERP was used to construct the concepts of ratio and proportion. The concepts of ratio and proportion were discussed with the teachers, and then a lesson was planned and implemented in a 5th-grade class to teach the idea of proportion. The results indicated that the GTERP methodology contributed favorably to the teachers' training because, in addition to expanding their knowledge of the concepts of ratio and proportion, it allowed them to experience the use of the methodology in the classroom with 5th-grade students and verify its effectiveness in the learning process.*

**Keywords:** Mathematics Education; Teacher Training; Early Years; Problem Solving.

**RESUMEN**

*Este estudio tuvo como objetivo investigar la contribución de la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de las Matemáticas a través de la Resolución de Problemas para trabajar la proporcionalidad con docentes y futuros*

1 Doutora. Universidade do Estado do Pará - UEPA. rosejuca@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1386-3388>

2 Doutora. Universidade de São Paulo - USP. Ironuchic@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7713-2157>

*docentes que trabajan en los primeros años de escolaridad. El enfoque metodológico siguió las etapas de un estudio de clase en el que se utilizó la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de las Matemáticas a través de la Resolución de Problemas de GTERP para construir los conceptos de razón y proporción. Los conceptos de razón y proporción se discutieron con los docentes, y luego se planificó e implementó una clase en una clase de 5.º grado para enseñar la idea de proporción. Los resultados indicaron que la metodología GTERP contribuyó favorablemente a la formación de los docentes porque, además de ampliar su conocimiento de los conceptos de razón y proporción, les permitió experimentar el uso de la metodología en el aula con estudiantes de 5.º grado y verificar su eficacia en el proceso de aprendizaje.*

**Palabras clave:** Educación Matemática; Formación del profesorado; Educación infantil; Resolución de problemas.

## INTRODUÇÃO

O ensino de proporcionalidade na escola geralmente é reduzido apenas ao ensino do método da regra de três sem realmente trazer uma discussão com significado para os alunos da Educação básica. Tal ensino, com foco apenas na aplicação de uma técnica para resolver problemas, retira do aluno a possibilidade de refletir sobre o conceito de proporcionalidade e desenvolver o raciocínio proporcional. Em concordância Lesh, Post e Behr (1989) afirmam que um estudante, ao resolver um problema sobre proporções, não está, necessariamente, usando o raciocínio proporcional e os problemas de valor omisso, resolvidos pelo método do produto cruzado, popularmente chamada de regra de três, além de ser mal compreendido pelos alunos, desfavorece o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Para Lamon (2012), o raciocínio proporcional envolve sentido de covariação, múltiplas comparações e aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação e, além disso, está relacionado à inferência e à predição e envolve pensamento qualitativo e quantitativo, sendo um conceito que serve como alicerce para a aprendizagem de outros conteúdos da Matemática e das Ciências em geral. Sendo assim, o uso de um método que os alunos memorizam e aplicam sem compreender o que de fato estão fazendo não garante que esse raciocínio seja desenvolvido pois, como afirmam Lesh, Post e Behr (1989) nem todas as pessoas que resolvem problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta, usam raciocínio proporcional pois, na resolução dos problemas trabalhados se observa o uso de relações numéricas simples ou o uso de um algoritmo como o produto cruzado.

Para além das dificuldades dos alunos relacionados ao raciocínio proporcional, os estudos de Costa e Allevato (2018), Milagre (2018), Lestari et al (2019) e Lorenzutti e Paiva (2020), Falvo e Jucá (2022) apresentam discussões relativas ao ensino de proporção e ao desenvolvimento do raciocínio proporcional no âmbito da formação inicial e continuada dos professores. Esses estudos apontam não somente as dificuldades dos professores no tema, mas, também, suas fragilidades e suas limitações, principalmente ao se limitar a ensinar o método da regra de três para o cálculo de proporção, sem se preocupar com o desenvolvimento do raciocínio proporcional nos alunos.

Nesse sentido, surgiu o interesse em desenvolver um estudo para investigar a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para se trabalhar o conteúdo de proporcionalidade e abordar o desenvolvimento do raciocínio proporcional junto aos professores que atuam no Ensino Fundamental Anos Iniciais. A questão de investigação que norteia este trabalho diz respeito a considerar como essa metodologia pode contribuir para

o desenvolvimento do raciocínio proporcional e o ensino de proporcionalidade dos professores que atuam nos anos iniciais?

## 2 O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL E A PROPORCIONALIDADE

É na etapa do Ensino Fundamental - Anos Iniciais, especificamente no 5º ano, que o ensino de proporcionalidade se inicia. Na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) aparecem duas habilidades relativas a esse conteúdo.

(EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.

(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo (Brasil, 2018, p. 291 e 297).

Essas habilidades mostram que a resolução de problemas que envolve proporcionalidade deve se dar por meio do raciocínio proporcional, visto que as habilidades não apontam o uso de um método específico. No entanto, esse conteúdo, quando é explorado no Ensino Fundamental - Anos Finais, geralmente se limita à aplicação do método da Regra de Três, no qual os alunos a usam sem entender o significado do que estão fazendo e não utilizam o sentido de covariação e nem de múltiplas comparações, portanto, não fazem uso do raciocínio proporcional. Para Lorenzutti e Paiva (2020, p. 26), “o uso da “regra de três” não deve ser o foco no ensino do conceito matemático, podendo ser utilizada como um recurso de formalização quando o aluno já compreendeu o processo de transformação que ocorre nas situações de proporcionalidade.”

Na opinião de Lamon (2012), o raciocínio proporcional está associado à capacidade de analisar relações entre grandezas, o que implica compreensão da relação constante entre elas (invariância) e a noção de que ambas variam em conjunto (covariação). Isso pressupõe que os alunos já tenham a capacidade de perceber que, na equivalência entre razões, há algo que muda (quantidades absolutas) e que, ao mesmo tempo, há algo que se mantém constante (na mesma proporção). Na perspectiva desta autora, uma deficiente compreensão da natureza multiplicativa das situações proporcionais pode estar na origem de muitas das dificuldades dos alunos. Em ambos os casos, a utilização do raciocínio proporcional requer argumentação e explicação e implica muito mais do que o uso de símbolos e regras como  $a/b = c/d$ . O raciocínio proporcional envolve o reconhecimento da razão entre elementos e a relação funcional dentro dos espaços de medida.

Lamon (2012) ainda explica que o raciocínio proporcional é um dos melhores indicadores que um aluno alcançou a compreensão dos números racionais e dos conceitos multiplicativos relacionados. Enquanto, por um lado, é uma medida da compreensão das ideias matemáticas elementares, é, por outro, parte da base para conceitos mais complexos. Por essa razão, distingue-se o raciocínio proporcional do conceito maior, mais abrangente de proporcionalidade. Ao se referir ao raciocínio proporcional, Lestari *et al.* (2019), explica que é a capacidade para entender a situação de comparação e é uma base, para o desenvolvimento posterior dos alunos, de conceitos relacionados às

funções, gráficos, equações algébricas e medição. Assim, o fato de que muitos aspectos do nosso mundo operam de acordo com as regras proporcionais, as habilidades de raciocínio proporcional são extremamente úteis na interpretação de fenômenos do mundo real.

Norton (2005) explica que a essência do pensamento proporcional é essencialmente multiplicativa. Muitos dos padrões de erro que os alunos demonstram em relação a problemas de raciocínio proporcional ilustram que eles aplicam processos do pensamento aditivo ou subtrativo em vez de processos multiplicativos. Apresentar aos alunos apenas aos problemas rotineiros de multiplicação e divisão não tem sido eficaz para os alunos desenvolverem uma compreensão mais profunda do raciocínio proporcional. Como os livros didáticos geralmente não ensinam frações e raciocínio proporcional de forma integrada a partir do conceito de razão, e como geralmente essa distinção não é explícita, os alunos tendem a se sentir confusos e a cometer erros conceituais. Em concordância, Langrall e Swafford (2000) explicam que a ênfase dos livros didáticos é dada ao procedimental em detrimento do conceitual. Assim as regras do produto cruzado são apresentadas aos alunos antes de eles terem tido oportunidade de modelar relações proporcionais com imagens ou objetos.

Na opinião Langrall e Swafford (2000) os alunos precisam de pré-requisitos para desenvolver o raciocínio proporcional. Desse modo, necessitam primeiramente:

- Distinguir situações em que é adequado usar a razão;
- Identificar a diferença entre as mudanças absolutas ou aditivas e as relativas ou multiplicativas;
- Compreender que as quantidades envolvidas numa razão covariam, mas a relação entre elas não se altera;
- Construir, de forma crescente, as estruturas unitárias complexas.

Estes pré-requisitos precisam ser levados em conta pelos professores ao trabalhar a ideia de proporção oferecendo aos alunos problemas que os façam refletir e compreender o significado das ideias envolvidas neles. No entanto, antes de ensinar o professor precisa compreender e ter domínio desses conceitos e como eles se relacionam entre si, para conduzir de forma eficaz o ensino da proporcionalidade e poder identificar e superar os obstáculos impostos pelo livro didático, quando não relaciona de forma significativa o conceito de fração com o de razão, para depois construir o conceito de proporção e identificar as diferentes situações que podem emergir desses conceitos.

Costa (2007), afirma que é importante que os alunos sejam capazes de reconhecer situações proporcionais das não proporcionais, resolvendo tarefas de raciocínio proporcional de natureza quantitativa e qualitativa; de compreender que podem ser usados vários métodos na resolução de tarefas proporcionais e que esses métodos se relacionam entre si; e de não se deixar influenciar, durante a resolução das tarefas, pelo contexto dos números. No entanto é preciso que os professores de Matemática e que ensinam matemática estejam preparados para lidar com esse conhecimento de forma diversificada, pois como superar as dificuldades de aprendizagem dos alunos, se os professores possuem dificuldades para ensinar.

Falvo e Jucá (2022) apontaram que os professores dos anos iniciais ao lidarem com problemas que envolviam a utilização do raciocínio proporcional apresentaram as mesmas dificuldades dos alunos, pois nas resoluções apresentadas pelos professores a maior parte dos erros estavam relacionados à falta do raciocínio proporcional para identificar quando uma situação é proporcional ou não. Essa deficiência dos professores talvez ocorra por eles não terem domínio e segurança dos conceitos que ensinam, como consequência a aprendizagem dos alunos será deficiente. Dessa forma, é necessário pensar em ações que possibilite aos professores dos anos iniciais discussões dos conceitos e dos procedimentos matemáticos que ensinam.

Os estudos de Silvestre (2012), Costa e Allevato (2018), Milagre (2018), Lestari *et al.* (2019) e Lorenzutti e Paiva (2020), Falvo e Jucá (2022), apontam as limitações e proposições de como desenvolver um trabalho com os professores relacionados ao ensino das proporções e do desenvolvimento proporcional. Para esses autores a deficiência dos professores em algum conteúdo de matemática pode acarretar deficiências de aprendizagem para os alunos; assim, é preciso investir em formações iniciais e continuadas que promovam discussões dos conceitos e não apenas de procedimentos matemáticos para suprir as limitações dos professores. Dessa forma, essa falta de compreensão dos professores aliada à forma como os livros didáticos discutem as ideias de razão e proporção e à maneira como esse ensino está sendo desenvolvido nas escolas, pode não estar contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos.

### 3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

As discussões que envolvem a resolução de problemas e seu uso na matemática escolar se estendem desde a década de 1980, quando autores já defendiam seu uso para o ensino de matemática. Para Lester e Cai (2015), existe um consenso dentro da comunidade de Educação Matemática que o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas dos alunos devem ser um objetivo principal do ensino em sala de aula. Estes autores afirmam que para que os alunos se tornem bons solucionadores de problemas é preciso, em primeiro lugar, mudar nossas visões de resolução de problemas, como um tópico que é adicionado ao ensino depois que conceitos e habilidades foram ensinados.

Lester e Cai, (2015) sugerem que uma alternativa para tornar a resolução de problemas uma parte integrante da aprendizagem da matemática é o chamado ensino através da resolução de problemas, que adota a visão de que existe conexão simbiótica entre resolução de problemas e aprendizagem de conceitos. Nessa perspectiva, os alunos apresentam várias soluções para seu grupo ou classe e aprendem matemática em um ambiente de aprendizagem de ensino através da resolução de problemas que fornece um cenário natural como alternativa para tornar a resolução de problemas uma parte integrante da aprendizagem da matemática.

Lester (2013) questiona se a resolução de problema é concebida como o resultado do ensino ou o meio pelo qual conceitos, processos e procedimentos matemáticos são aprendidos. Visto que tais abordagens são diferentes e exige atitudes diversificadas dos alunos e do professor. Os professores devem adotar ensinar para resolver problemas - uma abordagem de fins - ou ensinar via resolução de problemas - uma abordagem de meio. A resolução de problemas, portanto, deve ser tanto o resultado da aprendizagem da matemática quanto o meio pelo qual a matemática é aprendida. Pensar nessas duas formas da utilização da resolução de problemas em sala de aula permite ao professor tomar decisões sobre como conduzir o ensino de matemática de forma que os alunos possam trabalhar a resolução de problemas.

A compreensão sobre as diferentes formas de como trabalhar a resolução de problemas em sala de aula é necessária ao professor para desenvolver um bom trabalho em sala, pois ele precisa ter clareza de que, ao falar da metodologia de resolução de problemas, estamos nos referindo a etapas de como resolver um problema citado por Polya (1995) ou de Mason, Burton, Stacey (2010), no qual se segue um passo a passo para resolver um problema, no entanto quando se fala da metodologia de ensino através da resolução de problemas, o professor deve compreender que está promovendo um caminho para o aluno construir conceitos e procedimentos matemáticos no processo de resolução de problemas escolhidos para esse fim.



Onuchic e Alevatto (2011,2021) ao proporem a Metodologia de Ensino- Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas desenvolvida no âmbito do Grupo de trabalho e Estudo de Resolução de Problemas - GTERP, mostram que, ao mesmo tempo que o professor ensina, ele avalia a aprendizagem dos alunos, em relação ao conteúdo ensinado e os alunos atuam de forma ativa na construção do seu conhecimento. Nesse processo, a avaliação formativa se mostra como orientadora do processo de ensino e aprendizagem. Por meio das ideias expostas por essas autoras, percebemos que a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através Resolução de Problemas, proporciona muitas possibilidades no contexto escolar considerando que o aluno é o centro desse processo.

Na colocação de Onuchic (2012), o ensino e a aprendizagem devem ocorrer de maneira simultânea, tendo o professor o papel de orientador e os alunos de co-construtores do conhecimento matemático pretendido. Quanto à avaliação, ela se realiza durante a resolução do problema no processo de ensino-aprendizagem, logo,

Espera-se, nessa metodologia, que a avaliação faça parte do processo de ensino-aprendizagem, promovendo intervenções imediatas durante o desenvolvimento das atividades preparadas para o ensino de tópicos matemáticos relevantes com o claro propósito de fazer com que o aluno construa conhecimento novo (Pironel; Vallilo, 2017, p. 288).

Onuchic (2012) salienta que existem limitações das aulas por meio de uma metodologia apenas expositiva, nas quais há uma série de exageros de informações sobre os objetos estudados; tais métodos não têm foco no desenvolvimento do pensamento e nem na construção do conhecimento dos discentes. Para a essa, existem diversos modos de conceber o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, no qual suas pesquisas se fundamentam, neste processo através da resolução de problemas.

Quando o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação do ensino de Matemática se desenvolve através da resolução de problemas, a situação problema é o ponto de partida sobre o qual o aluno deve refletir e construir estratégias voltadas para buscar uma solução (Onuchic,2012). Portanto, é notória a necessidade de uma participação ativa do aluno em todo esse processo de ensino e aprendizagem, ao mesmo tempo que o professor deve apresentar criatividade, planejamento, reflexões, dentre outras características em sala de aula. A metodologia proposta por Onuchic e Alevatto (2011, 2021) viabiliza a construção de novos conceitos por meio da resolução de problemas no início de um novo conteúdo, e isso possibilita aos alunos compreenderem os conceitos matemáticos antes de aprenderem procedimentos, que geralmente são os mais priorizados na escola.

Para Davis (2011,2012) o estudo de conceito envolve traçar as origens e aplicações de um conceito, observando as diferentes maneiras pelas quais ele aparece dentro e fora da matemática, e examinando as várias representações e definições usadas para descrevê-lo e suas consequências no ensino. Essa variedade de representações dos conceitos permite ampliar as visões dos alunos e dos professores e sua compreensão sobre o conhecimento matemático estudado.

Neste sentido, a importância do estudo de conceitos na formação de professores permite uma ampliação dos olhares sobre os conceitos e como esses se conectam a outros, ampliando as percepções dos professores e modificando suas formas de ensinar os conteúdos matemáticos de forma isolada não estabelecendo conexão entre si, como se fossem caixinhas que são abertas ou

fechadas dependendo da necessidade da aula. Davis (2011) trabalhou com professores para desenvolver um conjunto de estratégias que permitem que coletivos de educadores desempacotem e reformulem entendimentos matemáticos de maneiras mais apropriadas e eficazes para suas salas de aula. Neste sentido, “O principal benefício dos estudos conceituais não é tanto promover a familiaridade com conceitos matemáticos específicos, mas sim transmitir estratégias para a subestruturação de todos e quaisquer conceitos matemáticos” (Davis, 2012, p. 17).

Uma compreensão mais aprofundada desses aspectos pode potencializar significativamente o trabalho dos professores. Com base em suas explorações iniciais de um conceito matemático, as etapas posteriores do estudo conceitual envolvem a análise do currículo e a elaboração de tarefas matemáticas (Davis, 2012). Neste sentido ao associar o estudo de conceitos a metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação através da resolução de problemas estamos oferecendo aos professores um momento de reflexão de suas práticas docentes, como também dos conceitos matemáticos que ensinam e como ensinam. Isso permite que as concepções que os professores e futuros professores têm sobre o ensino de matemática sejam repensadas. Pois, as experiências que os futuros professores vivenciaram em suas aulas de Matemática na Educação Básica têm uma forte influência na sua concepção de ensino, aprendizagem e avaliação e essas concepções, provavelmente, irão aparecer no desenvolvimento de suas práticas docentes em sala de aula. Experimentar novas formas de ensinar é uma oportunidade dos professores e futuros professores refletirem sobre as práticas que conhecem e modificá-las.

#### 4 CAMINHO METODOLÓGICO

Na colocação de Davis (2012) o “estudo de conceito” combina elementos de duas noções proeminentes na investigação contemporânea em Educação Matemática: análise de conceito e estudo de aula. Este autor combina o estudo de conceitos com as estruturas colaborativas de estudo de aula por meio dos quais “os professores se envolvem para melhorar a qualidade do seu ensino e enriquecer as experiências de aprendizagem dos alunos. Logo o estudo de aula é orientado para novas possibilidades pedagógicas por meio de engajamentos participativos, coletivos e contínuos” (Davis, 2012, p. 6).

O estudo de aula é um processo mediante o qual os professores se empenham para melhorar progressivamente seus métodos de ensino, trabalhando de forma colaborativas com outros professores para examinar e avaliar suas formas de ensinar (Isoda, Arcavi & Lorca, 2013). Neste sentido o estudo de aula contribui de forma significativa para a formação continuada de professores, uma vez que permite aos professores estudarem, refletirem e planejarem suas aulas em grupos de forma colaborativa. Na colocação de Ponte, Quaresma, Baptista e Mata-Pereira (2014, p. 1) “Um estudo de aula pode proporcionar oportunidades para os professores participantes aprofundarem os seus conhecimentos e refletirem sobre a eventual pertinência de mudarem as suas práticas”.

Quanto às etapas do estudo de aula, Isoda, Arcavi & Lorca (2013) descrevem como: planejamento, execução da aula, análise da aula e retomada. O planejamento executado pelos professores é a etapa que os professores precisam escolher o problema que dará início a aula e que promoverá a aprendizagens dos alunos, nessa escolha os professores precisam ter clareza das dificuldades que podem surgir durante a resolução do problema pelos alunos, dos questionamentos que eles podem fazer, essa condução que o professor fará nesse momento de resolução e discussão faz toda a diferença no processo de aprendizagem. A execução é momento que a aula é executada por um

professor do grupo de estudo e pela observação dos demais. Após a execução da aula essa será avaliada pelo grupo de professores para destacar pontos positivos e negativos e assim se fará um novo planejamento.

Neste sentido, desenvolvemos essa pesquisa seguindo as etapas do estudo de aula, para propor momentos de estudo e reflexão sobre os conceitos de razão e proporção. A pesquisa se desenvolveu em duas etapas:

- A primeira se refere ao estudo dos conceitos de razão e proporção por meio da Metodologia do GTERP com um grupo de nove professores, sendo seis professoras que atuam no 4º e 5º anos do Ensino Fundamental de uma escola Municipal da cidade de Belém-PA; uma professora que atua na Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará - UFPA; e dois discentes do curso de Licenciatura Integrada da UFPA.
- Na segunda etapa ocorreu o planejamento colaborativo e a execução de uma aula para uma turma do 5º ano do ensino fundamental, no qual foram trabalhados os conceitos de razão e de proporção utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Dessa forma, a metodologia do GTERP foi usada em duas situações: primeiro com os professores em um momento de estudo de conceitos; e depois com os alunos do 5º ano para que os professores pudessem vivenciá-la em sala de aula.

## 5 DESCRIÇÃO DOS ENCONTROS FORMATIVOS

O primeiro encontro com os participantes da pesquisa teve como objetivo apresentar a proposta da pesquisa e explicar como ela seria desenvolvida. Após o aceite de todos, foi solicitado que lessem e assinassem o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE.

O segundo encontro teve como objetivo discutir o significado dos números racionais. Iniciamos esse encontro com o seguinte questionamento: O número  $\frac{3}{4}$ , nas situações a seguir, apresenta o mesmo significado?

1. Uma doceria vendeu  $\frac{3}{4}$  de um bolo.
2. A relação entre meninas e meninos é de  $\frac{3}{4}$  em uma sala de aula com 28 alunos
3. Quantas  $\frac{1}{2}$  porções posso fazer com os  $\frac{3}{4}$  de uma torta?
4. Localizar o ponto  $\frac{3}{4}$  na reta numérica.
5. Pedro ampliou uma foto que ficou com  $\frac{3}{4}$  do tamanho original.

A intenção era a de introduzir os números racionais e problematizar os diferentes significados do número  $\frac{3}{4}$  para que os participantes percebessem que em cada situação esse número possuía um significado diferente. Eles expressaram suas ideias relacionadas ao número  $\frac{3}{4}$ , cuja maior dificuldade foi na explicação da situação 5, pois não tinham conhecimento do operador multiplicativo, mas conseguiram perceber que tinha uma ideia de multiplicação envolvida. Em seguida, fizemos a formalização dos números racionais e seus diferentes significados como: fração, razão, quociente, medida e operador multiplicativo.

O terceiro encontro teve como objetivo apresentar a metodologia do GTERP aos participantes. Nesse encontro os professores discutiram o texto de Onuchic e Alevato (2021) para compreender a



metodologia proposta. Em seguida, com o intuito de fazer os participantes experimentarem as etapas da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foram formados dois grupos e propusemos o Problema Gerador.

**Problema Gerador:** Susi e Julie estavam correndo com a mesma velocidade ao redor de uma trilha. Susi começou primeiro. Quando Susi completou 9 voltas, Julie completou 3 voltas. Quando Julie completou 15 voltas, quantas voltas Susi completou?

Fonte: Van de Walles, 2009.

Solicitamos que lessem o problema e depois perguntamos se tinham dúvidas sobre o texto e se tinha ficado clara a ideia do problema. Como não teve dúvidas, os participantes iniciaram a resolução do problema em grupo, imagem 1. Durante o momento da resolução, observamos os grupos para ver como estavam desenvolvendo o trabalho coletivamente.

**Imagem 1** - Grupos de professores na resolução do problema.



Fonte: Arquivo pessoal.

Inicialmente, os grupos tentaram resolver o problema usando a ideia de proporção com a utilização da regra de três, outros tentaram usar multiplicação e divisão e até o m.m.c. foi usado como uma estratégia; nesse momento, fizemos algumas intervenções para que eles pudessem compreender melhor a ideia do problema, mas apesar das orientações dadas aos grupos, eles tiveram dificuldade para perceber que o problema envolvia o pensamento aditivo e não o multiplicativo.

Solicitamos, em seguida, que todos do grupo apresentassem suas resoluções. Apenas duas professoras conseguiram pensar de forma correta, utilizando o pensamento aditivo (imagem 2 e 3). Como as respostas dadas pelos outros grupos estavam incorretas, pedimos que as professoras explicassem sua resolução aos demais colegas para que compreendessem o raciocínio delas. Os participantes da pesquisa ficaram surpresos que a resolução do problema fosse tão simples, pois na opinião deles os problemas de matemática sempre têm soluções complicadas e difíceis.

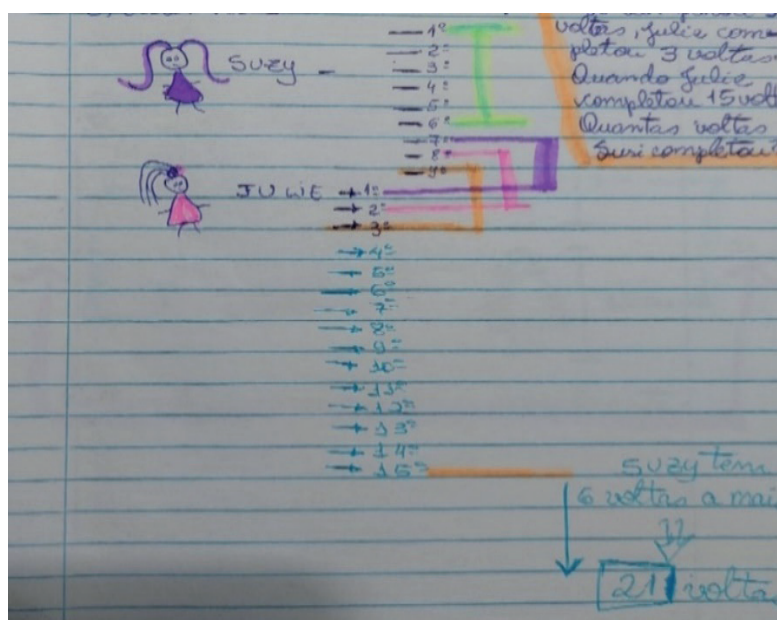
**Imagem 2** - Resposta do grupo 1.

$$\begin{array}{l} \text{Suzi} \rightarrow 9 \text{ voltas} - \text{Julie} \rightarrow 3 \text{ voltas} \\ \text{a dif. era de 6 voltas} \\ \text{Suzi} \rightarrow 21 \text{ voltas} - \text{Julie} \rightarrow 15 \text{ voltas} \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal.

Uma das professoras do grupo 2, resolveu o problema usando uma representação pictórica.

**Imagem 3** - Resposta do grupo.



Fonte: Arquivo pessoal.

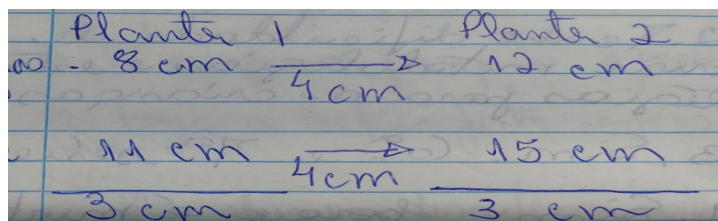
Após a exposição das estratégias dos grupos comentamos as resoluções apresentadas e formalizamos a ideia trabalhada no problema, mostrando que existe uma comparação entre o número de voltas dadas pelas duas meninas, e que ela é aditiva, não se configurando, como uma situação de proporcionalidade como alguns deles haviam pensado. E que este problema envolve apenas o pensamento aditivo. Em seguida apresentamos o problema 2 para os grupos resolverem.

**PROBLEMA 2:** Há duas semanas, foram medidas as alturas de duas plantas e tinham 8 cm e 12 cm, respectivamente. Hoje estão com 11 cm e 15 cm. Quem cresceu mais, a planta de 8 cm ou a de 12 cm?

Fonte: Van de Walles (2009).

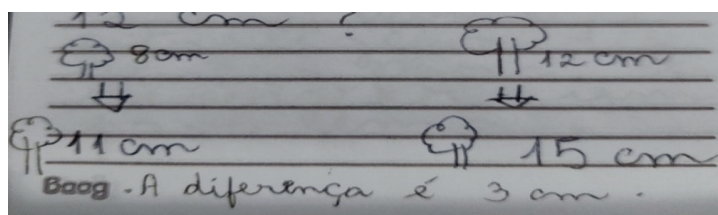
Os grupos leram o problema e discutiram entre si em busca de uma solução. Dessa vez conseguiram perceber a relação aditiva no problema, mas não conseguiram perceber a relação multiplicativa. Os grupos apresentaram suas soluções (Imagens 4 e 5).

**Imagem 4** - resposta do grupo 1.



Fonte: Arquivo pessoal.

**Imagem 5** - resposta do grupo 2.



Fonte: Arquivo pessoal.

Observamos que na resolução do problema os participantes somente usaram o pensamento aditivo, talvez influenciados pelo problema gerador. Para Langrall e Swafford (2000), esse tipo de estratégia não envolve raciocínio proporcional, pois é caracterizada por comparações aditivas em vez de multiplicativas, ou uso aleatório de números ou operações.

Após a exposição das resoluções do problema pelos grupos, explicamos, então, que o problema envolvia tanto o pensamento aditivo como o pensamento multiplicativo, e mostramos a relação de crescimento das plantas como sendo  $\frac{3}{8}$  e  $\frac{3}{15}$  e fizemos a comparação dos crescimentos como  $\frac{3}{8} > \frac{3}{15}$ . Assim os participantes puderam constatar que a primeira planta cresceu mais que a segunda. Eles tiveram dificuldade para compreender essa relação e se mostraram surpresos, pois nunca tinham estudado sobre isso. Ao final, fizemos a formalização do conceito de razão como sendo uma comparação multiplicativa entre duas grandezas.

O quarto encontro teve como objetivo apresentar a ideia de proporção. Iniciamos apresentando algumas situações para que os participantes analisassem se elas faziam sentido e se apresentavam uma relação proporcional.

**Situação 1:** Se um jogador de futebol pesa 75 quilos. Então três jogadores pesarão 225 quilos.

**Situação 2:** Se uma menina pode caminhar até a escola em 10 minutos, duas meninas caminham até a escola em 20 minutos.

**Situação 3:** Se Huck pode pintar a cerca em 2 dias, então Huck, Tom e um terceiro menino podem pintar a cerca em 6 dias.

**Situação 4:** Se um carro percorre 500 quilômetros em uma hora, ele pode viajar 200 quilômetros em quatro horas.

**Situação 5:** Se uma caixa de cereal custa R\$ 2,80, duas caixas do mesmo cereal custam R\$ 5,60.

Para a situação 1 três participantes acertaram ao afirmar que não é uma relação proporcional, e cinco participantes disseram que a situação tinha uma relação proporcional. Para a situação 2, todos os participantes acertaram, pois disseram que o problema não tem relação proporcional; uma das justificativas dadas é que o número de pessoas não altera a distância e nem o tempo. Em relação à situação 3, três participantes disseram que existe uma relação inversamente proporcional. Não perceberam que na relação proporcional inversa o tempo varia de forma inversa à quantidade de pessoas. E cinco participantes disseram que não há uma relação proporcional. Para a situação 4, sete participantes disseram que não tem relação proporcional; apenas um deles disse que a situação não faz sentido, mas que existe uma relação proporcional. Um dos participantes chegou a afirmar que mesmo não fazendo sentido e não existindo relação de proporcionalidade, essa situação envolvia o pensamento multiplicativo e para a situação 5, todos os participantes acertaram, pois disseram que faz sentido e que existe uma relação proporcional.

Dos oito participantes, somente um usou a ideia de razão para analisar as situações propostas. Após eles explicarem suas conclusões sobre as situações, explicamos as ideias contidas em cada uma delas para que os participantes compreendessem a diferença de uma situação proporcional para uma pseudoproporcional, que, segundo Silvestre (2012), são problemas que não envolvem uma relação de proporcionalidade direta, mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência.

Em seguida, apresentamos o problema 3, com o objetivo de verificar quais saberes os participantes possuíam sobre proporcionalidade.

**PROBLEMA 3:** Uma florista vendia ramos de flores feitos com rosas amarelas e rosas brancas, colocando, em cada ramo, duas rosas brancas para cada quatro amarelas. Se a florista fizesse um ramo com dez rosas brancas, quantas rosas amarelas teriam de colocar no ramo para manter a relação duas rosas brancas para quatro rosas amarelas?

Fonte: Silvestre (2012).

Enquanto os grupos resolviam o problema, fomos observando como os três grupos discutiam sobre a estratégia de resolução. Quando eles finalizaram a resolução do problema, perguntamos que ideia o problema envolvia; os participantes falaram que era de proporção, então pedimos que apresentassem suas respostas (Imagens 6,7 e 8).

**Imagem 6** - resposta do grupo 1.

$$\frac{2 \text{ rosas brancas}}{4 \text{ rosas amarelas}} = \frac{10 \text{ rosas brancas}}{x \text{ rosas amarelas}}$$

$$\frac{2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{10}{x} \quad \rightarrow \quad x = 20$$

Fonte: Arquivo pessoal.

**Imagem 7** - resposta do grupo 2.

Rosas	cor	cor
B - $\frac{2 \times 5}{4} = 10$	branca	amarela
A - $4 \times 5 = 20$	$\frac{2 \times 2}{10 \times 2}$	$\frac{4}{20}$

Fonte: Arquivo pessoal.

**Imagem 8** - resposta do grupo 3.

Rosas brancas	rosas amarelas
$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{x}$
$x = 20$	Seria necessário amarelas.

Fonte: Arquivo pessoal.

Ao analisarmos as resoluções do problema, observamos que os participantes utilizaram a ideia de razão para chegar à solução do problema. Os grupos 1 e 2 fizeram a razão  $\frac{2 \text{ rosas brancas}}{4 \text{ rosas amarelas}}$ , o grupo 3 fez pensou diferente fazendo a razão  $\frac{2 \text{ rosas brancas}}{10 \text{ rosas brancas}}$ . Os grupos conseguiram estabelecer uma relação proporcional, pois fizeram uma comparação multiplicativa entre as duas medidas, quantidade de rosas brancas e amarelas, e perceberam que essa relação permanece a mesma para os dois tipos de rosas, isto é, é uma relação invariante, enquanto as duas medidas em cada razão variam juntas, ou covariam. Após esse momento, outros problemas de proporção foram apresentados para que resolvessem e foram comentadas suas resoluções ao final. Depois solicitamos que os professores elaborassem problemas de proporção para suas turmas a partir do que foi discutido nesse encontro.

No quinto encontro, realizamos a 2ª etapa da pesquisa no qual ocorreu o planejamento de uma aula. Os participantes, de forma colaborativa, planejaram uma aula com o conteúdo de proporção para que fosse aplicada em uma turma do 5º ano do ensino fundamental (Imagem 9).



**Imagem 9** - planejamento da aula para o 5º ano.

Fonte: Arquivo pessoal.

Após a discussão, para decidir o problema gerador que seria usado na aula, eles escolheram um dos problemas que tinham elaborado e que estava de acordo com o nível da turma. O objetivo da aula era desenvolver nos alunos do 5º ano o raciocínio proporcional e a ideia de razão e de proporção utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

O sexto encontro se deu com a aplicação da aula que foi ministrada por um dos participantes<sup>3</sup> e os demais foram os observadores da aula e ficaram sentados no fundo da sala fazendo suas observações e anotações. Eles receberam um roteiro com os pontos que deveriam ser observados durante a execução da aula. Inicialmente, a *professora C* iniciou a aula dividindo os alunos em grupos e apresentou o problema 5. Em seguida, ela pediu que os alunos lessem o problema e depois fez a leitura com eles. Depois, pediu que os grupos tentassem resolver o problema.

**Problema 5** - Se um saco de pipoca custa R\$ 2,00. Quanto custaria 8 sacos de pipoca?

Inicialmente, percebemos que os alunos estavam meios tímidos para discutirem a resolução com seus colegas, preferiam resolver individualmente; nesse momento, foi necessário a *professora 5* passar pelos grupos e estimulá-los a fazer a discussão da solução do problema juntos, então aos poucos percebemos que eles começaram a falar sobre suas ideias em busca de uma solução juntos.

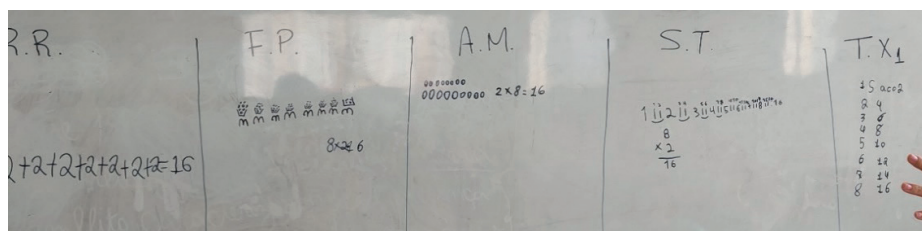
Durante o processo de resolução do problema, foi permitido que os participantes da pesquisa se aproximassem dos grupos de alunos para observarem as estratégias de resolução do problema, as dificuldades que possuíam e como eles estavam trabalhando. Eles foram informados de que não poderiam interferir nas respostas dos alunos, apenas observar e pedir que eles explicassem como tinham resolvido o problema. O objetivo dessa etapa era a de que eles experimentassem o momento de avaliação da aprendizagem dos alunos ao resolver problema.

Enquanto os professores observavam o trabalho dos grupos, a *professora C* fazia as devidas orientações nos grupos para ajudá-los na superação das dificuldades. Após os grupos terem resolvido o problema, ela solicitou que fosse um representante de cada grupo ao quadro e colocasse a sua resolução (Imagem 11). A partir das respostas dos grupos, a *professora C* começou a plenária e fez a formalização das ideias de razão e de proporção.

<sup>3</sup> A participante foi identificada como *professora C*, resguardando, assim, sua identidade.

Observamos que, de forma intuitiva, os alunos resolveram o problema que envolvia a relação de proporcionalidade direta, mesmo que essa ideia não tivesse sido ensinada. Observamos, ainda, que, pelas respostas dadas pelos alunos que usaram o pensamento aditivo, adicionado o 2 oito vezes. Os grupos FP, AM, ST e TX usaram o pensamento multiplicativo, multiplicando  $8 \times 2$ ; já o grupo TX fez diferente, usou a ideia de funcional, relacionando a quantidade de saco com o preço a ser pago. Em seguida outros problemas foram aplicados à turma para o aprofundamento da aprendizagem.

**Imagem 11** - Respostas dos alunos do 5º ano ao problema.



Fonte: Arquivo pessoal.

Após a finalização da aula, fizemos a avaliação com o grupo de professoras. Esse momento foi importante para ouvir a opinião delas sobre a metodologia do GTERP que foi usada durante o processo formativo e na aula com a turma do 5º ano.

Pesquisadora: o que vocês acharam da formação e da aula na qual usamos a metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação através da resolução de problemas?

Professora 1: Achei a aula interessante, eu pensava que sabia proporção, mas durante a pesquisa, percebi minha fragilidade; quando a professora colocava um problema eu queria resolver e não conseguia e o trabalho em grupo fortalece muito.

Professora 2: Eu gostei da metodologia porque além de não gastar material eu vi os alunos resolvendo os problemas e conversando entre eles. E durante a formação, eu consegui resolver os problemas que a senhora passava com ajuda dos colegas do grupo.

Professora 3: Eu gostei porque os alunos mostraram que já possuem algum conhecimento e todos chegaram ao mesmo resultado por caminhos diferentes.

Professora 4: Eu gostei, é uma aula diferente, porque primeiro vem o problema e depois a professora mostra o conteúdo.

Discente 1: Eu gostei dessa metodologia porque eu tinha dificuldade de resolver problemas, eu achei que tinha algo errado comigo e quando a professora aplicou a metodologia com a gente, eu me espantei por estar resolvendo os problemas.

Professora C: O uso da metodologia de ensino de matemática através da resolução de problemas na aula se mostrou, a meu ver, principalmente, mobilizadora. As crianças se mostraram interessadas e mobilizadas a resolver o problema embora o problema parecesse simples. As diferentes estratégias utilizadas pelos alunos mostram situações que os professores, de repente, só foram percebidos na aplicação da metodologia.

Em suas falas, os participantes da pesquisa deixaram claro que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas trouxe resultados positivos não somente para a aprendizagem dos alunos, mas também para sua aprendizagem como professor. Pois foi unânime em suas falas que no início da formação se sentiram perdidos no momento de resolver os problemas, entretanto, a partir das mediações que foram feitas e com as discussões nos grupos, sentiram-se mais à vontade para resolver os problemas, ajudando-os a adquirir confiança e que essa metodologia de ensino proporcionou o diálogo e aprendizagem entre seus pares.

## 6 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Ao apresentarmos aos professores em formação continuada e aos futuros professores a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tínhamos como intuito apresentar alternativas para o ensino de matemática e romper com o modelo tradicional de ensino com aulas expositivas e sem uma participação ativa dos alunos. Assim, durante todo o processo formativo, foi usada essa metodologia para que os professores a experimentassem e depois vivenciassem uma experiência com os alunos do 5º ano.

Neste sentido a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no processo formativo foi fundamental para quebrar paradigmas sobre o ensino de matemática, mostrando aos professores aulas mais interessantes e mais participativas. Os professores tiveram a oportunidade de acompanhar uma aula onde a metodologia foi usada e perceberem como os alunos do 5º ano se envolveram e participaram da aula, a própria professora da turma ficou surpresa com o envolvimento dos alunos ao resolverem os problemas e exporem suas respostas no quadro.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas também foi usada no processo formativo dos professores, onde iniciamos com um problema gerador para construir o conceito de razão e proporção. Observamos que os professores tiveram dificuldades para resolver os problemas propostos, pois se sentiam inseguros e não estavam à vontade; algumas vezes também diziam que não eram capazes de resolver. Sugerimos, então, que tentassem resolver os problemas por meio de desenhos; no início ficaram surpresos, mas quando o fizeram aos poucos foram ganhando confiança e começaram a buscar estratégias diferentes pensando numericamente. Em relação aos conteúdos trabalhados, observamos que tiveram mais dificuldade nos problemas que envolviam a ideia de razão, pois usavam mais o pensamento absoluto do que o relativo. No entanto, aos poucos foram avançando e compreendo as ideias de razão.

Nas análises das cinco situações para verificar se possuíam uma relação proporcional, observamos que alguns professores tiveram dificuldade de perceber que algumas situações não eram proporcionais e sim pseudoproporcionais, e que conforme Silvestre (2012) um dos aspectos do raciocínio proporcional diz respeito à capacidade de distinguir uma relação de proporcionalidade direta das pseudoproporcionais. Nesse sentido, é fundamental que os professores compreendam a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e possam perceber quando são situações proporcionais ou não, pois uma frágil compreensão dessas ideias pode produzir consequências no ensino, podendo gerar dificuldades nos alunos.

Nos problemas de proporção, preferimos não falar sobre o método da regra de três, porque tínhamos interesse que os professores usassem o raciocínio proporcional para resolver os problemas e não apenas aplicassem um método memorizado. Durante o processo de resolução do problema

observamos que usaram a ideia de comparação de razão, no entanto percebemos que alguns dos participantes da pesquisa tentaram resolver pela regra de três. A diferença é que agora parecia que o método fazia mais sentido para eles, visto que tinham estudado a ideia de razão e procuraram usá-la. Assim, o estudo de conceitos de razão e proporção quando relacionados a outros conceitos possibilitou aos professores uma ampliação dos seus conhecimentos, pois como afirma Davis (2012) o estudo de conceito realizado com professores tem como intenção influenciar a maneira como eles pensam, sentem e se envolvem com conceitos matemáticos - individualmente, com colegas e com seus alunos, melhorando assim suas práticas de ensino em sala de aula.

Ademais, Norton (2005), Lamon (2012) e Silvestre (2012) concordam que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é sustentado pela sofisticação do raciocínio multiplicativo e pela capacidade de comparar duas quantidades em termos relativos, em vez de em termos absolutos como no raciocínio aditivo. Esses autores apontam que o conhecimento frágil das noções de multiplicação, divisão, frações e decimais influencia negativamente para a compreensão das noções de razão e proporção e do desenvolvimento do raciocínio proporcional. Logo durante o processo formativo dos professores procuramos abordar conceitos que os ajudariam a compreender melhor a ideia de proporcionalidade para que depois pudessem ensinar para seus alunos.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi o de investigar a contribuição da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para trabalhar o conteúdo de razão e proporção e abordar o desenvolvimento do raciocínio proporcional junto aos professores que atuam no ensino fundamental anos iniciais.

A metodologia adotada trouxe contribuições positivas para os participantes da pesquisa, visto que ficaram satisfeitos e empolgados com as experiências que tiveram. Primeiro pelos conhecimentos matemáticos e metodológicos apreendidos durante a formação e, depois, por terem vivenciado o uso da metodologia em sala com os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

A experiência com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução possibilitou aos participantes uma reflexão para repensar suas práticas, crenças e conceitos e lhes ofereceu oportunidades de desenvolver conhecimentos para superar suas dificuldades e limitações promovendo assim um ensino de matemática mais eficaz para seus alunos. Nesse sentido, as formações Inicial e/ou Continuada para os professores que ensinam matemática devem oportunizar situações nas quais possam discutir conteúdos matemáticos e metodologias de ensino que lhes permitam repensar suas práticas de sala de aula fazendo um ensino de matemática mais dinâmico e interativo para os alunos.

Por fim, acreditamos que a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas seja uma proposta de ensino que possibilite aulas mais interessantes tanto para os professores, visto que avaliam ao mesmo tempo que ensinam, como para os alunos, que se tornam ativos no processo de aprendizagem. Assim, nessa proposta o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente e a avaliação integrada ao ensino deve promover a aprendizagem.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N.S.G. Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática. **REnCiMa**. v. 9, n. 6, p. 47, 2018.

COSTA, S. **O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do Ensino Básico** (Dissertação de mestrado). Universidade de Lisboa, 2007

DAVIS, B. Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge, *Science* 332, 6037, 2011

DAVIS, B. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. **12th International Congress on Mathematical Education Program**. 8 July - 15 July. Seoul, Korea, 2012

FALVO, S. R.; JUCÁ, R. S. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais. **Com a Palavra, o Professor**, [S. l.], v. 7, n. 18, p. 135-152, 2022.

ISODA, M.; ARCAVI, A.; LORCA, A. M. **El Estudio de Clases Japonés em Matemáticas: sua importancia para el mejoramiento de los aprendizajes em el escenario global**. 3. Ed. Chile: Valparaíso, 2013

LAMON, S.J. **Teaching Fractions and Ratios for Understanding Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teacher**. 1º first published. Nova York: Routledge, 2012.

LANGRALL, C. W.; SWAFFORD, J. Three Balloons for Two Dollars: Developing Proportional Reasoning. **Mathematics teaching in the middle school**. NCTM: USA, v. 6, n. 4. 2000.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. *In*: HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.), **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, p. 93-118. USA, 1989

LESTARI, M. p. NURHASANAH, F.; ARYUNA, D.R.; . CHRISNAWATI, H..E.; KURNIAWATI, I.; KUSWARDI, Y.; WULANDARI, A.N. Proportional Reasoning and Belief of Pre-Service Mathematics Teachers: The Use of Modified Authentic Investigation Activities (AIA). **The 2 International Conference on Science, Mathematics, Environment, and Education**. 2019.

LESTER, F. K. Thoughts About Research On Mathematical Problem- Solving Instruction. **The Mathematics Enthusiast**. v. 10, n. 1, Article 12., p. 245-278.

LESTER, F.; CAI, J. Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from Thirty Years of Research. *In*: **Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and perspectives**. Buenos Aires: Springer, 2015

LORENZUTTI, A.O.F. & PAIVA, M.A.V. **Saberes (re)significados a partir de discussões coletivas: multiplicação e proporcionalidade**. [recurso eletrônico] Vitória, ES: Editora Ifes, 2020

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, **Thinking Mathematically**. 2. ed. Harlow: Pearson, 2010.



NORTON, S. J. The construction of proportional reasoning. **Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Melbourne: PME, v. 4., p. 17-24, 2005.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos e para onde iremos? **Anais da IV jornada de Educação Matemática**. Universidade de Passo Fundo, 2012

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. de La R.; ALLEVATO, N. NOGUTI, F.C.H.; JUSTULIN, A.M. (orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2021

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Revista Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, nº 41, p. 73-98, dez. 2011.

PIRONEL, M.; VALLILO, S. A. M. O papel da Avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Livraria da Física, 2017. p. 279-304.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciências, 1995.

PONTE, J.P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, n.30, v.56, 2016, p. 868-891

SILVESTRE, A. I. **O desenvolvimento do raciocínio proporcional: percursos de aprendizagem de alunos do 6º ano de escolaridade**. (Tese de Doutorado). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2012.

WALLE, J.A. Van de. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Porto Alegre: Artmed, 2009.