

COMO ESTUDANTES DO 8º ANO CONSTROEM A NOÇÃO DE ÁREA: APREENSÕES FIGURAS COM O USO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS

*HOW 8TH-GRADE STUDENTS CONSTRUCT THE CONCEPT OF AREA:
FIGURAL APPREHENSIONS THROUGH THE USE OF MANIPULATIVE MATERIALS*

*CÓMO LOS ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO CONSTRUYEN LA NOCIÓN DE ÁREA:
APREHENSIONES FIGURALES MEDIANTE EL USO DE MATERIALES MANIPULATIVOS*

ANTONIO ALEXANDRE APARECIDO DA SILVA¹

ANGÉLICA DA FONTOURA GARCIA SILVA²

MARIA ELISA ESTEVES LOPES GALVÃO³

RESUMO

Com o objetivo de investigar as possibilidades de apreensões figurais mobilizadas na manipulação de figuras, esta pesquisa analisou as diferentes abordagens de 23 estudantes do 8º ano na resolução de um problema geométrico. Fundamentada na teoria de Duval e em estudos sobre resolução de problemas com materiais manipuláveis, a pesquisa utilizou metodologia qualitativa e intervencionista, durante três sessões, foram observadas as estratégias e comentários dos participantes, utilizando protocolos de tarefas, observações e registros em vídeo e áudio para a coleta de dados. Os resultados destacaram o desenvolvimento do potencial heurístico na exploração das figuras e a emergência das apreensões perceptivas, discursivas, sequenciais e operatórias. A integração de materiais manipulativos facilitou a compreensão e o desenvolvimento das apreensões, promovendo engajamento e criatividade. Contudo, o estudo identificou desafios, relacionados ao desenvolvimento das apreensões figurais, a dificuldade de alguns estudantes em interpretar o problema e aplicar conceitos matemáticos corretamente.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de Matemática; Ensino Fundamental; Apreensões; Resolução de Problemas; Materiais Manipuláveis.

ABSTRACT

This research aimed to investigate the possibilities of figural apprehensions mobilized in the manipulation of figures during the resolution of a geometric problem by 23 eighth-grade students. Grounded in Duval's theory on apprehensions and studies on problem-solving with manipulable materials, the research employed a qualitative and interventionist methodology, over three sessions, participants' strategies and comments were observed, using task protocols, observations, and video and audio recordings for data collection. The results highlighted the development of heuristic potential in the exploration of figures and the emergence of perceptual, discursive, sequential, and operative apprehensions. The integration of manipulable materials facilitated the comprehension and development of apprehensions, promoting engagement and creativity. However, the study identified challenges related to the development of figural apprehensions, such as some students' difficulty in interpreting the problem and correctly applying mathematical concepts.

Keywords: Mathematics Teaching and Learning; Elementary Education; Apprehensions; Problem Solving; Manipulable Materials.

¹ Doutor em Educação Matemática (UNIAN). Colégio Domus Sapientiae. E-mail: alex01166@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4041-8877>

² Doutora em Educação Matemática (PUC-SP). Universidade Norte do Paraná. E-mail: angelicafontoura@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2435-9240>

³ Doutora em Matemática (USP). Departamento de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. E-mail: elisa@ime.usp.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3899-711X>

RESUMEN

Con el objetivo de investigar las posibilidades de aprehensiones figurales movilizadas en la manipulación de figuras, esta investigación analizó las diferentes estrategias adoptadas por 23 estudiantes de octavo grado en la resolución de un problema geométrico. Fundamentado en la teoría de Duval y en estudios sobre la resolución de problemas con materiales manipulativos, el estudio adoptó una metodología cualitativa de carácter intervencionista. A lo largo de tres sesiones, se observaron las estrategias y los comentarios de los participantes, utilizando protocolos de tareas, observaciones y registros en video y audio para la recolección de datos. Los resultados evidenciaron el desarrollo del potencial heurístico en la exploración de las figuras y la emergencia de aprehensiones perceptivas, discursivas, secuenciales y operatorias. La integración de materiales manipulativos favoreció la comprensión y el desarrollo de dichas aprehensiones, promoviendo el compromiso y la creatividad. No obstante, se identificaron desafíos relacionados con la interpretación del problema y la aplicación adecuada de conceptos matemáticos.

Palabras-clave: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; Educación básica; Aprehensiones; Resolución de problemas; Materiales manipulativos.

INTRODUÇÃO

A figura geométrica, segundo Duval (1995), é compreendida como uma organização de contrastes visuais que emerge de um fundo por meio de traços ou manchas, regida pelas leis da percepção da Gestalt e por pistas perceptivas. Essa concepção articula a apreensão perceptiva com a apreensão discursiva (Duval, 1994), atribuindo à figura um potencial heurístico fundamental na resolução de problemas geométricos. Por meio de sua manipulação - que inclui ampliações, reduções, movimentos, subdivisões e recombinações, mantendo propriedades como a área -, a figura oferece um leque de possibilidades analíticas para a construção de estratégias de solução. Um exemplo disso é a operação de mergulhamento, na qual se insere uma figura em outra maior e de compreensão mais imediata, a fim de explorar suas relações geométricas de forma mais clara e sistemática.

O fracionamento e o mergulhamento da figura são exemplos de operações de modificações figurais estudadas por Raymond Duval, um renomado pesquisador francês na área da semiótica matemática. Duval (1994) enfatiza a complexidade inerente ao trabalho com a visualização, manipulação e exploração de uma figura durante a resolução de problemas, ressaltando que a interpretação pode variar em função de fatores internos e externos, como a estrutura da figura e as habilidades perceptivas do estudante. Seus estudos (Duval, 1994, 1995, 2006, 2012, 2018) evidenciam o potencial das apreensões figurais provocadas por uma figura na resolução de problemas, além de identificar os obstáculos que podem surgir nesse processo.

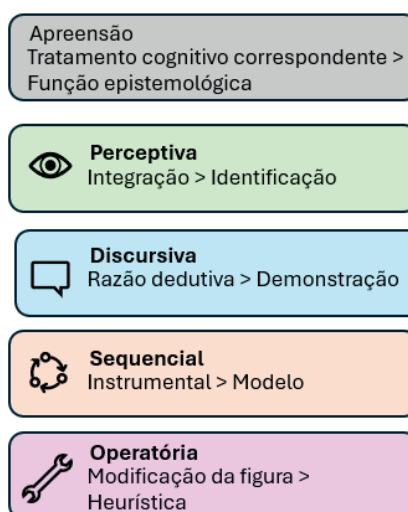
Este artigo fundamenta-se na análise dos dados coletados na tese de Silva (2023) e busca responder à seguinte questão: quais são as estratégias e apreensões figurais mobilizadas pelos estudantes participantes de sessões de resolução de problemas geométricos que utilizam uma figura?

Os registros dos dados, na forma de protocolos de resolução elaborados pelos estudantes em uma das sessões de estudo da pesquisa, fornecerão elementos para sustentar a análise aqui apresentada. A seguir, serão aprofundadas questões relativas à base teórica utilizada nesta investigação, os procedimentos metodológicos, a análise dos dados e as conclusões decorrentes dessa análise.

INVESTIGAÇÕES QUE FUNDAMENTAM ESTE ESTUDO

Esta pesquisa se fundamenta nas teorias de Duval (1994, 1995, 2006, 2012, 2018), cujo trabalho oferece uma análise aprofundada do papel das figuras na resolução de problemas geométricos. Duval enfatiza a importância de desenvolver a habilidade de criar registros semióticos que representem objetos matemáticos e suas situações contextuais. Para ele, a compreensão de um objeto matemático surge da “descoberta, pelo próprio sujeito, do que até então ele mesmo não supunha, mesmo que outros lhe houvessem explicado” (Duval, 1994). O autor identifica e destaca quatro tipos de apreensões - perceptiva, discursiva, sequencial e operatória -, cada uma desempenhando funções cognitivas e epistemológicas específicas, resumidas na Figura 1.

Figura 1 - Tipos de apreensões das figuras geométricas.



Fonte: elaborada pelo autor inspirado nos estudos de Duval.

Segundo o autor, a apreensão perceptiva ocorre de forma imediata ao observar uma figura, enquanto a apreensão discursiva envolve a interpretação do enunciado e sua conexão com a figura para solucionar o problema. A apreensão sequencial está relacionada à construção da figura geométrica com o auxílio de instrumentos de desenho, seguindo princípios específicos para sua criação. Por sua vez, a apreensão operatória engloba modificações na figura, como deslocamentos, ampliações ou divisões, com o objetivo de explorar suas propriedades e facilitar a resolução do problema. Duval enfatiza a importância dessas modificações, que podem aproximar ou afastar o estudante da solução, influenciadas por fatores internos e externos. Com base nessas ideias, este estudo analisa quais apreensões foram mobilizadas pelos estudantes ao resolverem problemas geométricos.

Autores como Nasser e Tinoco (2011), mesmo sem abordar diretamente as apreensões propostas por Duval, ressaltam a importância do tratamento figural e do uso de materiais manipulativos. Em sua discussão sobre estratégias para a sala de aula, eles destacam quatro ações relacionadas às apreensões: (1) incentivo ao manuseio de figuras geométricas, comparação por sobreposição, composição e decomposição de figuras; (2) uso de papel quadriculado, triangulado e pontilhado para facilitar representações, ampliação e redução de figuras; (3) exploração de regularidades e simetrias

por meio de dobraduras; e (4) estímulo às construções com régua e compasso, com ênfase na compreensão e justificação de cada passo (NASSER; TINOCO, 2011).

Acredita-se que essas práticas e recursos didáticos podem promover o desenvolvimento de operações figurais, alinhando-se com o potencial heurístico da figura proposto por Duval. O estímulo a essas atividades pode favorecer a emergência das apreensões e a construção de um caminho que leve à solução do problema. Para realizar este estudo, A pesquisa buscou proporcionar aos estudantes experiências com materiais manipulativos.

Nesta pesquisa, assim como Bartolini e Martignone (2020), entendemos como manipulativos artefatos utilizados na Educação Matemática, que são manuseados pelos estudantes para explorar, adquirir ou investigar conceitos ou processos matemáticos e para realizar atividades de resolução de problemas com base em evidências perceptíveis (visuais, tátteis ou, mais geralmente, sensoriais). Sobre o tema, além de Bartolini e Martignone (2020), pesquisas de Lorenzato (2010), Galvão e Passonian (2022) e Passos (2010) fornecem elementos para reconhecer o papel dos materiais manipulativos no desenvolvimento das apreensões figurativas discutidas por Duval.

A utilização de materiais manipuláveis na Educação Matemática tem uma longa história, com educadores reconhecendo sua importância para contextualizar abstrações matemáticas e facilitar a aprendizagem. Materiais manipuláveis são definidos como objetos que os estudantes podem sentir, tocar, manipular e movimentar (Reys, 1982), incluindo tanto objetos do cotidiano quanto aqueles especificamente desenhados para representar ideias matemáticas.

Apesar de sua reconhecida importância, o uso de materiais manipuláveis nem sempre foi consistente ou adequado ao longo do tempo. No entanto, autores como Fiorentini (1995) destacam que a concepção empírico-ativista na educação matemática, que valoriza o aluno como centro do aprendizado, a descoberta, o “aprender fazendo” e atividades que envolvem ação, manipulação e experimentação, impulsionou o uso desses materiais.

O próprio Duval (1995) argumenta que a eficácia de figuras geométricas no aprendizado da geometria está ligada à forma como os estudantes apreendem essas figuras, e os materiais manipuláveis podem ser ferramentas valiosas nesse processo.

Bartolini e Martignone (2020) destacam a importância da mediação do professor na utilização desses materiais, enfatizando a necessidade de uma abordagem que considere o potencial semiótico dos artefatos. Lorenzato (2010) ressalta que o envolvimento ativo do aluno com os materiais é essencial para a aprendizagem efetiva, enquanto Galvão e Passonian (2022) observam que, embora os materiais manipulativos sejam considerados divertidos, ainda é necessário vinculá-los aos conceitos matemáticos. Passos (2010) argumenta que o uso adequado desses recursos pode facilitar a construção de conhecimento matemático, mas alerta para a necessidade de mediação por parte do professor.

Em conjunto, esses estudos destacam a importância dos materiais manipulativos como ferramentas para promover a compreensão e a aprendizagem significativa em Matemática. Eles ressaltam que, embora o uso de materiais manipuláveis tenha oscilado ao longo da história da educação matemática, sua aplicação eficaz, especialmente quando aliada à mediação pedagógica adequada, pode enriquecer a experiência de aprendizado e a compreensão dos estudantes.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo, de natureza qualitativa, aprofunda as reflexões sobre os resultados obtidos na tese de doutorado conduzida pelo autor principal, Silva (2023). Previamente à sua execução, foi obtida

a aprovação ética do sistema CEP/CONEP CAAE: 45236821.3.0000.549. As atividades de pesquisa foram desenvolvidas ao longo do segundo semestre de 2021, durante três sessões de estudo, realizadas em horários alternativos ao período regular de aulas dos estudantes na instituição em que estavam matriculados.

A pesquisa contou com a participação de todos os estudantes do oitavo ano que concordaram em colaborar (totalizando 23 estudantes), em uma escola privada da cidade de São Paulo. Para preservar a identidade dos participantes, optou-se por utilizar nomes de flores para referenciá-los.

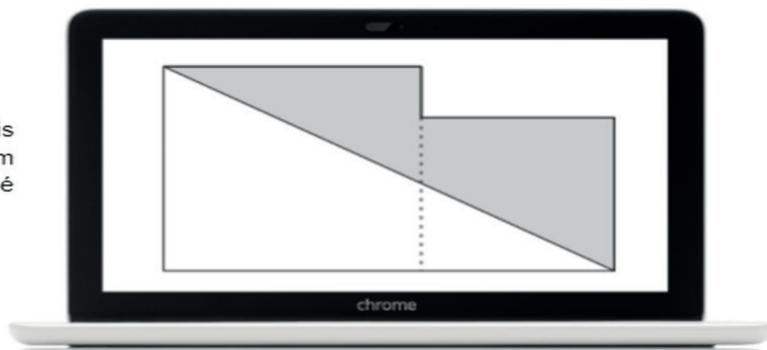
As sessões foram conduzidas de forma híbrida, com alguns estudantes participando presencialmente e outros online, em decorrência dos impactos da pandemia de Covid-19. Para a coleta de dados, foram utilizados diversos instrumentos, incluindo observações com registros escritos e audiovisuais, além de protocolos de resolução elaborados pelos próprios estudantes.

Neste artigo, o foco da análise são os dados provenientes da resolução de um problema geométrico apresentado durante a segunda sessão de estudo. A escolha desse problema específico (ver Figura 2) foi motivada pela expectativa de que ele provocasse uma variedade de interpretações e abordagens por parte dos estudantes, promovendo o desenvolvimento de apreensões figurais. Esse problema ilustra como o desenvolvimento inadequado da apreensão perceptiva levou a apreensões discursivas alternativas e à dificuldade em alcançar o resultado correto esperado.

Figura 2 - Situação problema apresentada aos estudantes.

Juntando quadrados

A figura é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região cinza?



Fonte: OBMEP 2014 - N1, Q07, F1.

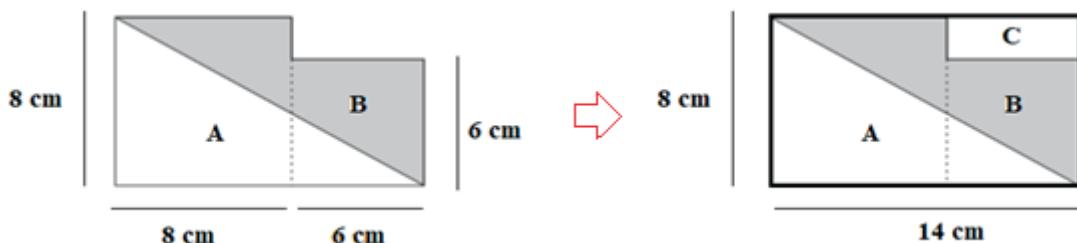
Este problema é adequado para o nível de escolaridade dos estudantes devido aos conceitos envolvidos em sua resolução, como o cálculo da área do quadrado e do triângulo, e a compreensão da noção de diagonal de um quadrilátero. Além disso, o problema permite a criação de um modelo manipulativo utilizando papel quadriculado da figura, o que pode potencializar a resolução.

POTENCIAL HEURÍSTICO DA FIGURA

No problema “Juntando quadrados”, os estudantes exploram modificações figurais como “mergulhamento” e “fracionamento” (Duval, 2012). A apreensão operatória, conforme descrito por Duval (1995), é a forma como se obtém uma visão da solução ao observar uma figura, e envolve a capacidade de modificar a figura de diversas maneiras.

O “mergulhamento” consiste em integrar a figura em um contexto maior, facilitando a interpretação e resolução do problema. Ao utilizar essa estratégia, os estudantes podem encontrar um caminho mais claro para a solução. No caso da figura, os dois quadrados são inseridos em um retângulo, revelando novas possibilidades de resolução. Essa operação de mergulhamento reestrutura a apreensão discursiva ao apresentar uma nova figura. Na figura inicial, identificam-se os quadrados A e B, cada um com uma região cinza; o mergulhamento revela um retângulo com lados 8 cm e 14 cm dividido em três regiões A, B e C (Figura 3).

Figura 3 - Operação de mergulhamento.



Fonte: OBMEP 2014 - N1, Q07, F1, adaptado

A operação de mergulhamento, ao reorganizar a figura, permite que a solução do problema seja encontrada através do fracionamento e reagrupamento das partes:

$A_B = A_{\text{retângulo}} - (A_A + A_C)$, uma forma de modificação mereológica (Duval, 1994). Duval (1995) detalha que a apreensão mereológica envolve dividir a figura em partes e combiná-las de diferentes formas: “a forma mereológica: você pode dividir a figura inteira dada em pares de várias formas (faixas, quadrados, retângulos ou qualquer outra forma) e você pode combinar essas partes em outra figura ou subfiguras”. Essa habilidade de fracionar e recombinar é fundamental na resolução de problemas geométricos, pois a solução muitas vezes depende de reorganizar os elementos da figura para revelar relações ou propriedades ocultas.

Existem diversas formas de apreender uma figura em um contexto geométrico, e cada tipo de apreensão promove uma aprendizagem específica, baseada em uma perspectiva matemática particular (Duval, 1994). A expectativa é que a exploração desse problema permita identificar e discutir coletivamente diferentes apreensões a partir das ações dos estudantes, ampliando seu repertório e capacitando-os a utilizar essas apreensões em estratégias de resolução de outros problemas.

DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS DADOS

O modelo estruturado para esta pesquisa foi desenvolvido com base em Allevato *et al.* (2021) e seguiu as seguintes etapas: (1) proposição do tema gerador; (2) leitura individual utilizando conhecimentos prévios; (3) discussão coletiva mediada pelo pesquisador para aprimorar as compreensões; (4) resolução do problema em grupos; (5) apresentação das soluções para discussão e verificação da compreensão.

Inicialmente, o problema foi apresentado aos estudantes, que tiveram tempo para explorá-lo e propor soluções de forma individual. Após esse período, o pesquisador conduziu uma conversa

coletiva com o grupo, incentivando os estudantes a compartilharem as estratégias pensadas para a resolução e as dificuldades ou os obstáculos encontrados. Essa etapa foi realizada coletivamente para encorajar os estudantes a exporem suas ideias e dificuldades, mostrando que essas questões poderiam ser comuns a vários deles.

Na sequência, o pesquisador retomou o trabalho com foco direcionado aos estudantes que apresentaram soluções (completas ou incompletas) para socializar as estratégias pensadas. O objetivo era ouvir os relatos dos estudantes e encorajar a utilização de estratégias que considerassem as apreensões por meio da utilização de materiais manipulativos. Essa fase buscou compartilhar as interpretações dos estudantes sobre o problema e possíveis estratégias de resolução.

Na etapa 4, o pesquisador conduziu uma tentativa de resolução do problema, organizando os participantes em grupos conforme a afinidade com a estratégia escolhida. Essa fase foi um desdobramento da etapa 3, baseada na discussão sobre as estratégias apresentadas pelos estudantes e no incentivo do pesquisador para o uso de materiais manipulativos, favorecendo o desenvolvimento das apreensões.

Nosso objetivo foi observar as apreensões desenvolvidas nessa tentativa de resolução para, a seguir, discutir coletivamente sua influência na resolução da situação. Acreditamos que esse design e a mediação do professor podem estimular os participantes a construírem novas apreensões a partir das apresentadas na exploração inicial do problema.

Consideramos que o modelo proposto para o desenvolvimento da pesquisa poderia ser flexibilizado para atender às demandas dos participantes e às necessidades e condições do modelo híbrido. Isso significa que ele poderia ser adaptado para se adequar às necessidades específicas dos estudantes tanto no ambiente da sala de aula quanto no virtual.

No Quadro 1, apresentamos a quantidade de estudantes que realizaram ou não o registro da resolução durante o desenvolvimento da etapa 2 da pesquisa, além daqueles que conseguiram resolvê-la completamente ou não. As soluções apresentadas pelos participantes foram apresentadas para discussão coletiva.

Quadro 1 - Registro quantitativo da resolução do problema juntando quadrados.

Problema	Estudantes		
	Total	Usou a figura na resolução	Não usou a figura na resolução
Resposta completa	10	7	3
Resposta incompleta	6	1	5
Sem resposta	3		
Total	19		

Fonte: Elaboração do Pesquisador

Com base na distribuição dos 19 estudantes, organizados em cinco trios e duas duplas, os resultados foram: quatro grupos (dois trios e as duas duplas) apresentaram a resposta completa para o problema, sendo que um desses trios não utilizou a figura. Dois trios apresentaram a resposta incompleta, um dos quais também não fez uso da figura e o outro teve inconsistências nos dados devido à nomeação de um representante para postar a resolução. Por fim, um trio não resolveu o problema, explicando apenas que “não conseguiram fazer o problema”.

A partir das observações iniciais dos estudantes foi possível identificar a dificuldade na compreensão do enunciado do problema. Dentre os 19 participantes, 9 relataram ter lido o enunciado mais de uma vez e recorreram à discussão para entender o que o problema solicitava. Durante a discussão na etapa 3, o pesquisador percebeu que os estudantes tinham compreendido o que era solicitado no problema. Ficou evidente que a dificuldade foi não conhecer um procedimento resolutivo para colocar em prática. Os estudantes enfrentavam dificuldades em mobilizar a apreensão discursiva e operatória para visualizar um caminho para a solução.

Após a análise desse quadro, verifica-se que os estudantes encontraram dificuldades em transitar da apreensão perceptiva para a apreensão discursiva. Embora tenham sido capazes de identificar as informações visuais relevantes, eles enfrentaram dificuldades na interpretação adequada dessas informações e na habilidade de estabelecer conexões com outros conhecimentos para auxiliar na resolução do problema. Essa constatação é consistente com os resultados obtidos por Karpuz e Atasoy (2019) em seu estudo.

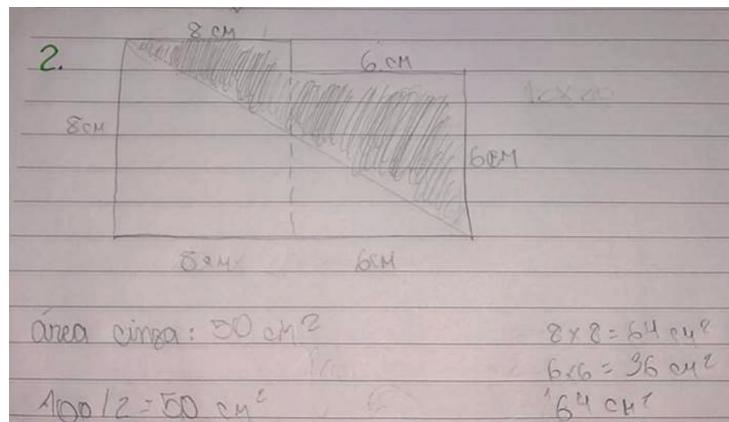
A partir dos dados analisados, foi constatado que os tipos de apreensão perceptiva, discursiva e operativa de mais da metade dos estudantes não estavam em um nível suficiente para a geometria do ensino médio. A maioria dos estudantes não conseguiu reconhecer as várias subfiguras presentes em uma figura geométrica, transformar informações verbais em informações visuais, derivar informações verbais com base em informações visuais, chegar a conclusões sem ser influenciado pela aparência de uma figura e decompor e recompor figuras geométricas. Isso mostra que os professores precisam se concentrar não apenas no conhecimento conceitual, mas também na estrutura dos processos de apreensão de figuras dos estudantes antes das aulas de geometria.” (KARPUZ; ATASOY, 2019).

Segundo Duval (2012) o desenvolvimento da apreensão perceptiva embora fundamental no processo resolutivo do problema não é suficiente para conduzir o aluno a sua solução.

Ainda durante as discussões na etapa 3 os estudantes tiveram dificuldades em relatar suas limitações, nas análises das produções os relatos também não ajudavam a compreender o fato, a estudante Azaleia relata nas observações que “*percebeu que tinha entendido errado*”, mas não esclareceu o que tinha entendido errado e nem como tinha interpretado a situação, essa informação iria fornecer pistas sobre a transição da apreensão perceptiva para a apreensão discursiva.

A resolução apresentada por esse grupo desenvolveu o raciocínio que pode ser observado na Figura 4 pertencente as anotações do integrante Ipê, um exemplo da dificuldade na articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva.

Figura 4 - Desenvolvimento da resolução do problema D.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Na resolução percebe-se o caminho seguido na resolução: o grupo calculou e adicionou as áreas dos dois quadrados, a seguir entendeu que a área sombreada corresponderia a metade da soma das áreas dos quadrados. Essa apreensão discursiva se conecta com a apreensão perceptiva de outro modelo figural de problema, como por exemplo o apresentado na Figura 5:

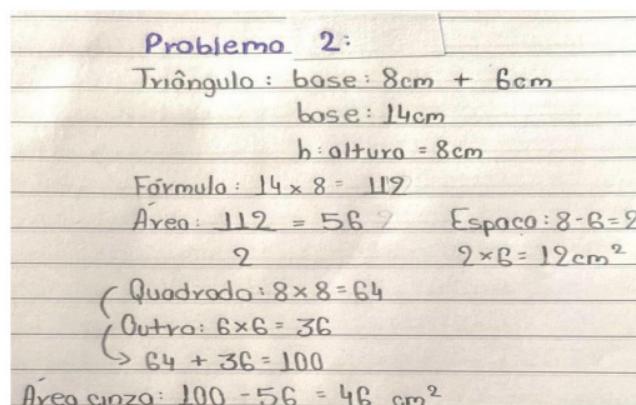
Figura 5 - Possível representação figural associada a apreensão discursiva apresentada na Figura 4.



Fonte: Elaboração do Pesquisador.

O outro grupo, cuja resolução está ilustrada na Figura 6 abaixo, também cometeu um erro na solução.

Figura 6 - Solução apresentada pelo segundo grupo.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Observando a resolução apresentada, constatamos que ela envolve o cálculo das áreas de um triângulo, dois quadrados, a área cinza e um “espaço”. Essa organização sugere que o grupo conseguiu desenvolver a apreensão discursiva, interpretando as informações reveladas pela apreensão perceptiva. Além disso, o grupo demonstrou a apreensão operatória ao obter, por meio de manipulação mental, as quatro subfiguras apresentadas a seguir:

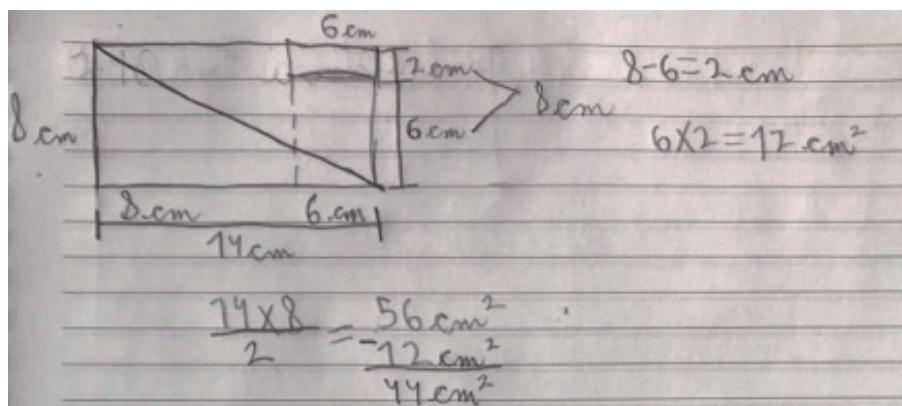
Figura 7 - Subfiguras utilizadas pelo grupo.



Fonte: Elaboração do Pesquisador.

O grupo no qual a aluna Iris fez parte apresentou uma solução correta para o problema utilizando a figura para desenvolver o raciocínio Figura 8.

Figura 8 - Resolução correta utilizando a figura apresentada pelo grupo da estudante Iris.



Fonte: Acervo da pesquisa.

A solução apresentada pelo grupo sugere a sequência de operações figurais da apreensão operatória mostradas a seguir- Figura 9.

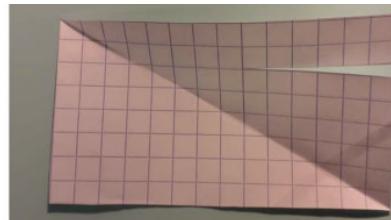
Figura 9 - Subfiguras utilizadas pelo grupo.



Fonte: Elaboração do Pesquisador.

Após a discussão, o pesquisador deu continuidade à etapa 4 do trabalho, solicitando aos estudantes que resolvessem o problema utilizando materiais manipulativos. Os estudantes tiveram a opção de escolher entre papel sulfite e papel quadriculado, sendo que todos optaram pelo papel quadriculado. Após confeccionarem os modelos e investigarem a solução utilizando esse material, o pesquisador conduziu a seção da etapa 5, na qual os estudantes puderam apresentar as abordagens utilizadas e verificar a compreensão sobre a resolução do problema e a utilização dos materiais manipulativos. Durante essa etapa, os estudantes compartilharam os modelos construídos no papel quadriculado, sendo apresentados aqui dois exemplos representativos do mergulhamento da figura.

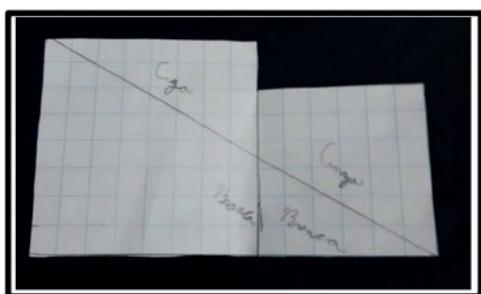
Figura 10 - Exemplos de modelos manipulativos criados pelos estudantes.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Nos dois modelos apresentados os estudantes evidenciaram que a figura construída não era a mesma do problema, e a parte que não fazia parte da figura original estava destacada de alguma forma. Nas análises dos registros o pesquisador encontrou o material enviado por um estudante Jasmim que tentou resolver o problema manipulando a figura original por meio de dobraduras. O relato desse estudante foi relevante pois ele havia obtido sucesso na resolução do problema anterior por meio desse recurso.

Figura 11 - Observação do aluno Jasmim sobre a resolução do problema D.



Nesse caso as dobraduras não me ajudaram muito pois eu tinha feito corretamente, mas me ajudou a fazer de outra forma.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Encerramos a intervenção observando que aproximadamente metade dos participantes acertou cada um dos dois problemas propostos. As discussões e registros apresentados revelaram indícios de que os estudantes encontraram dificuldades em articular a apreensão perceptiva com as apreensões discursiva e operatória, resultando na criação de um modelo que pudesse conduzi-los à solução

dos problemas. Essas observações são consistentes com os resultados encontrados por Karpuz e Atasoy (2019), que indicam que a apreensão operatória não atingiu o nível esperado para a turma estudada. Como indícios dessa constatação, destacam-se o fato de os estudantes fazerem inferências por meio de medições ou sob a influência do aspecto visual da figura.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo se dedicou a investigar a seguinte questão: Quais são as estratégias e apreensões figurais mobilizadas pelos estudantes participantes de sessões de resolução de problemas geométricos que utilizam uma figura? Após a análise dos dados coletados, foi possível concluir que os estudantes empregaram uma variedade de abordagens e estratégias para solucionar o problema proposto. Desde a observação da figura até a aplicação de conceitos matemáticos complexos, os participantes demonstraram diferentes níveis de compreensão e habilidades na manipulação de figuras geométricas.

É importante ressaltar que a figura é uma ferramenta com potencial significativo para auxiliar na resolução de problemas de Geometria. No entanto, a utilização eficaz dessa ferramenta não ocorre naturalmente; os estudantes precisam aprender a empregá-la. Verificamos essa necessidade nos depoimentos, quando um aluno relata “tinha entendido errado” ao conduzir uma solução incompleta, evidenciando uma falha na correta interpretação e uso da representação visual.

As apreensões perceptivas, discursivas, sequenciais e operatórias, conforme propostas por Duval, emergiram como elementos cruciais na resolução do problema. Os estudantes mobilizaram essas apreensões de maneiras diversas, evidenciando a importância de considerar a interação entre fatores cognitivos e contextuais no ensino e na aprendizagem da Geometria. Observou-se que a apreensão perceptiva não desenvolvida de maneira adequada conduz o aluno ao desenvolvimento equivocado da apreensão discursiva. Em alguns casos, o aluno apresenta cálculos corretos, mas eles se referem a uma figura diferente da apresentada no enunciado, indicando uma transição inadequada da percepção para a interpretação. Além disso, outro grupo que resolveu o problema sem o auxílio da figura não conseguiu desenvolver corretamente a apreensão discursiva, comprometendo a apreensão operatória e impedindo a obtenção do resultado esperado.

Adicionalmente, a integração de materiais manipulativos, como papel quadriculado e dobraduras, desempenhou um papel significativo no estímulo ao desenvolvimento das apreensões figurais, auxiliando na busca por um caminho para a resolução de problemas geométricos. Os participantes demonstraram engajamento e criatividade ao explorar esses recursos. Os materiais manipulativos se mostraram facilitadores para o desenvolvimento das apreensões, possibilitando que os estudantes pudessem testar hipóteses de resolução com maior facilidade. Essa experimentação concreta parece ter fornecido uma base mais sólida para a construção do conhecimento geométrico.

No entanto, o estudo também apontou desafios, como a dificuldade de alguns estudantes em interpretar o enunciado do problema e em aplicar corretamente os conceitos matemáticos. Tais questões evidenciam a importância de uma abordagem pedagógica que promova não apenas a manipulação de figuras, mas também o desenvolvimento de habilidades de interpretação e raciocínio matemático. É fundamental que os estudantes aprendam a extrair informações relevantes das figuras, a relacioná-las com o contexto do problema e a utilizar essas informações de forma eficaz em suas soluções.

Em resposta à questão de pesquisa, afirmamos que os estudantes abordaram a resolução do problema geométrico de maneiras diversas, mobilizando diferentes apreensões e estratégias

cognitivas. A integração de materiais manipulativos mostrou-se uma ferramenta valiosa para facilitar o desenvolvimento das apreensões, embora desafios ainda persistam e destaquem a necessidade contínua de aprimoramento das práticas pedagógicas no ensino da Geometria. As conclusões apontam para a necessidade de um ensino que enfatize a importância da figura como ferramenta cognitiva, que auxilie os estudantes a desenvolverem uma apreensão perceptiva robusta e que explore o potencial dos materiais manipulativos para promover uma aprendizagem mais significativa e eficaz.

REFERÊNCIAS

- ALLEVATO, N. S. G. et al. **Resolução de problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Pacto Educacional, 2021.
- BARTOLINI, M. G.; MARTIGNONE, F. Manipulatives in mathematics education. In: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of mathematics education**. Cham: Springer, 2020. p. 487-493.
- DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012. DOI: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>.
- DUVAL, R. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, [s. l.], v. 61, p. 103-131, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>.
- DUVAL, R. Geometrical pictures: kinds of representation and specific processings. In: SUTHERLAND, R.; MASON, J. (ed.). **Exploiting mental imagery with computers in mathematics education**. Heidelberg: Springer, 1995. p. 39-57. (NATO ASI Series, v. 138).
- DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères-IREM**, [s. l.], n. 17, p. 121-138, 1994. Disponível em: https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/17_article_119.pdf. Acesso em: 1 jul. 2022.
- DUVAL, R. Registers of semiotic representation. In: LERMAN, S. (ed.). **Encyclopedia of mathematics education**. Cham: Springer, 2018. p. 724-727.
- GALVÃO, M. E. E. L.; PANOSIAN, M. L. **Recursos didáticos em aulas de matemática**: o proposto pelas pesquisas e o praticado. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022. *E-book*.
- KARPUZ, Y.; ATASOY, E. Investigation of 9th grade students' geometrical figure apprehension. **European Journal of Educational Research**, [s. l.], v. 8, n. 1, p. 285-300, 2019. DOI: <https://doi.org/10.12973/eu-jer.8.1.285>.
- LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (org.). **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2010. p. 3-38.
- MILAUSKAS, G. A. Problemas de geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas criativos. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Tradução de H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 86-105.
- NASSER, L.; TINOCO, L. (coord.). **Curso básico de geometria**: enfoque didático. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011. Módulo 1. (Projeto Fundão-SPEC-PADCT/CAPES).

OBMEP. **Prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - Nível 1.** [S. I.]: OBMEP, 2014. Disponível em: <http://www.obmep.org.br>. Acesso em: 12 jun. 2024.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. (org.). **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2010. p. 77-92.

SILVA, A. A. A. **Possibilidades de apreensões mobilizadas na manipulação de figuras na resolução de problemas de geometria**. 2023. 147 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro Universitário Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2023. Disponível em: <https://repositorio.pgsscognna.com.br/handle/123456789/67114>. Acesso em: 4 maio 2024.