VIDYA

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 135-152, jan./jun. - Santa Maria, 2025.

Recebido em: 28.02.2025. Aprovado em: 21.05.2025.
ISSN 2176-4603 | DOI: doi.org/10.37781/vidya.v45i1.5285

MATERIAIS MANIPULATIVOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CATEGORIZAÇÃO, USOS E EQUÍVOCOS

MANIPULATIVE MATERIALS IN MATHEMATICS EDUCATION

MATERIALES MANIPULATIVOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

EVERALDO SILVEIRA[1]
ARTHUR BELFORD POWELL[2]
REGINA CÉLIA GRANDO[3]

RESUMO

O objetivo deste texto é apresentar uma compreensão acerca de materiais manipulativos na Educação Matemática, bem como discutir seus usos, cuidados e equívocos nas práticas pedagógicas. Esses materiais, que no campo educacional englobam quaisquer objetos físicos, pictóricos ou virtuais utilizados como recursos para o ensino de determinado conhecimento, foram agrupados em três categorias: materiais didaticamente construídos, que incluem todo tipo de material criado artificialmente por educadores para simular objetos e relações matemáticas que estimulem a construção de ideias matemáticas; instrumentos culturais herdados da tradição, que acompanharam e auxiliaram o desenvolvimento teórico da matemática; e objetos retirados da vida cotidiana, que atestam, de certa forma, algum fragmento do conhecimento matemático. São apresentadas distinções entre materiais utilizados no ensino de números e operações, em se tratando da forma como assumem valores e a sua estruturação, além de uma aproximação ou distanciamento entre jogos e materiais manipulativos. Os prós e contras acerca da utilização de materiais manipulativos na educação matemática também são discutidos, com ênfase a possíveis equívocos quanto à produção ou utilização desses materiais. Por fim, concluiu-se que a eficiência e eficácia do uso de manipulativos parecem estar relacionadas a três variáveis: a escolha do material, a clara e participativa instrução do professor e a participação no uso do material pelos estudantes, por meio de um processo matemático, em que o professor e os seus alunos fazem e atribuem sentidos aos objetos manipulativos.

Palavras-chave: Relações matemáticas; Matemática escolar; Jogos; Sistema de Numeração; Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

The aim of this text is to present an understanding of manipulative materials in mathematics education and to discuss their uses, care, and mistakes in pedagogical practices. These materials in the field of education encompass any physical, pictorial, or virtual objects used as resources for teaching specific disciplinary content have been grouped into three categories: didactically constructed materials, which include all types of material artificially created by educators to simulate mathematical objects and relationships that stimulate the construction of mathematical ideas; cultural instruments inherited from tradition, which have accompanied and helped the theoretical development of mathematics; and objects taken from everyday life, which attest, in some way, to some fragment of mathematical knowledge. Distinctions are made between the materials used to teach numbers and operations regarding how they take on values and how they are structured, as well as the closeness or distance between games and manipulative materials.

1 Doutor em Educação Científica e Tecnológica (UFSC). Professor associado da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil. E-mail: evederelst@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2113-2227
2 Doutor em Educação Matemática pela Rutgers University (RU), New Brunswick New Jersey, Estados Unidos da América (EUA). Professor da Rutgers University (RU), Newark, New Jersey, EUA. E-mail: powellab@newark.rutgers.edu. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6086-3698
3 Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora titular da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil. E-mail: regrando@yahoo.com.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2775-0819

The pros and cons of using manipulative materials in mathematics education are also discussed, emphasizing possible misconceptions regarding the production or use of these materials. Finally, it was concluded that the efficiency and effectiveness of the use of manipulatives seem to be related to three variables: the choice of material, clear and participatory instruction from the teacher, and participation in the use of the material by students through a mathematical process in which the teacher and their students make and attribute meanings to the manipulative objects.

Keywords: *Mathematical relationships; School mathematics; Games; Number system; Teaching and learning.*

RESUMEN

El objetivo de este texto es presentar una comprensión de los materiales manipulativos en la Educación Matemática, así como discutir sus usos, cuidados y errores en las prácticas pedagógicas. Estos materiales, que en el ámbito educativo engloban cualquier objeto físico, pictórico o virtual utilizado como recurso para la enseñanza de determinados conocimientos, se agruparon en tres categorías: materiales didácticamente construidos, que incluyen todo tipo de material creado artificialmente por los educadores para simular objetos y relaciones matemáticas que estimulen la construcción de ideas; instrumentos culturales heredados de la tradición, que acompañaron y ayudaron al desarrollo teórico de las matemáticas; y objetos tomados de la vida cotidiana, que dan fe, en cierta manera, de algún fragmento de conocimiento matemático. Se presentan distinciones entre los materiales utilizados en la enseñanza de los números y las operaciones, en cuanto a la forma en que asumen valores y su estructuración, así como una aproximación o distancia entre juegos y materiales manipulativos. También se discuten los pros y los contras del uso de materiales manipulativos en la educación matemática, con énfasis en posibles malentendidos respecto de la producción o uso de estos materiales. Finalmente, se concluyó que la eficiencia y efectividad del uso de manipulativos parecen estar relacionadas con tres variables: la elección del material, la instrucción clara y participativa del docente y la participación en el uso del material por parte de los estudiantes, a través de un proceso matemático, en el que el profesor y sus alumnos crean y atribuyen significados a objetos manipulables.

Palabras-clave: *Relaciones matemáticas; Matemáticas escolares; Juegos; Sistema de numeración; Enseñanza y aprendizaje.*

INTRODUÇÃO

A natureza da matemática escolar desafia tanto os professores quanto os alunos. Os desafios relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem em matemática escolar levam os professores a buscar recursos de ensino que possam contribuir para uma aprendizagem mais significativa pelos estudantes, nos diferentes níveis e modalidades educacionais. Educadores responsáveis por atividades psicopedagógicas também buscam recursos de ensino para que possam minimizar as dificuldades de aprendizagem em matemática. Há ainda um outro grupo de interesse, que são os formuladores de materiais de ensino, de livros didáticos e produtores de materiais que, por meio de representações em seus textos, sugerem utilizá-los.

Dentre os vários recursos, especialmente no que tange ao ensino e à aprendizagem de matemática das crianças nos primeiros anos de escolaridade, os materiais manipulativos e as suas representações costumam estar presentes em livros didáticos e fisicamente nas salas de aula. Pressupostos da Educação Matemática escolar têm evidenciado, ao longo dos anos, que não são somente as crianças que se beneficiam dos materiais manipulativos para o desenvolvimento do pensamento matemático. Estudantes de todas as idades, ao longo de sua escolarização, podem se favorecer dos vários recursos de ensino, inclusive dos materiais manipulativos.

O fato é que, para que o uso de materiais manipulativos contribua realmente para a aprendizagem matemática, precisam ser cuidadosamente construídos, selecionados e utilizados para fins de ensino. Nesse sentido, o objetivo deste texto é apresentar uma compreensão acerca de materiais manipulativos na Educação Matemática, bem como discutir seus usos, cuidados e equívocos nas práticas pedagógicas.

MATERIAIS MANIPULATIVOS: UMA CATEGORIZAÇÃO

Materiais manipulativos[4], em se tratando do campo educacional, incluem quaisquer objetos físicos, pictóricos - desde que sejam destacados ou recortados para que passem da posição estática nas páginas do texto para o dinamismo da manipulação - ou virtuais, utilizados como recursos para o ensino de determinado conhecimento. Assumimos que a expressão *Materiais Manipulativos*, por ser mais ampla, engloba as demais nomenclaturas[5] utilizadas para esses tipos de recursos, táteis e multissensoriais. Interessa-nos efetivamente discutir sua utilização na Educação Matemática.

Embora seja comum pensar em materiais manipulativos como objetos construídos especificamente para fins didáticos, muitos deles provêm de outros espaços e podem ser adaptados para esses fins. Apesar de não explicitarem exatamente esses fins, Bartolini Bussi e Boni (2003) apresentam uma classificação em que diferenciam, em quatro categorias[6], o que chamam de "[...] instrumentos usados historicamente em experiências matemáticas ou na tradição de ensino" (p. 15). Tal classificação nos serviu de base para que, a partir de adaptações, possamos diferenciar a origem dos mais variados tipos de materiais manipulativos usados como recursos para o ensino de matemática em três categorias:

> 1. *materiais didaticamente construídos,* que incluem todo tipo de material criado artificialmente por educadores para simular objetos e relações matemáticas que estimulem a construção de ideias. Esses materiais podem ser físicos, como é o caso dos Blocos base dez[7], as barras Cuisenaire e o Geoplano; pictóricos, como figuras recortadas para ganharem o dinamismo da manipulação, por exemplo, planificações de superfícies tridimensionais; ou virtuais, como adaptações de blocos base dez ou barras Cuisenaire dinâmicos, habilitados por tecnologia digital;
> 2. *instrumentos culturais herdados da tradição*, que acompanharam e auxiliaram o desenvolvimento teórico da matemática, como o ábaco, o soroban, a régua e o compasso, considerando suas formas originais físicas ou em adaptações virtuais (*softwares* de geometria dinâmica, por exemplo);
> 3. *objetos retirados da vida cotidiana*, que atestam, de certa forma, algum fragmento do conhecimento matemático, como barbante, moedas, brinquedos, gravetos, sementes ou pedras, incluindo suas formas físicas, pictóricas recortadas ou representações virtuais e dinâmicas.

---

4 As expressões "manipulativos", "manipuláveis" e "materiais manipuláveis" serão usadas nesse texto como sinônimos para materiais manipulativos, evitando, portanto, repetições excessivas .

5 Material didático manipulável, material concreto, manipulativos concretos, recursos manipulativos, material manipulativo virtual, ajudas manipulativas etc.

6 As categorias definidas pelos autores são: (a) materiais concretos, projetados artificialmente por educadores; (b) instrumentos culturais herdados da tradição; (c) objetos tecnológicos retirados da vida cotidiana; e (d) *softwares* desenvolvidos pela tecnologia da informação.

7 Doravante chamados de BBD. Esses manipulativos são conhecidos no Brasil como material dourado.

Em nossa classificação, diferentemente daquela proposta por Bartolini Bussi e Boni (2003), os manipulativos virtuais[8] estão distribuídos em todas as três categorias anteriores. Esses são definidos por Moyer-Packenham e Bolyard (2016) como representações visuais interativas e habilitadas por tecnologia de objetos matemáticos dinâmicos, incluindo todos os recursos programáveis que permitem que sejam manipulados, e apresentam oportunidades para a construção do conhecimento matemático. Para esses autores, futuramente, "[...] é muito provável que os manipulativos virtuais não sejam mais baseados em nenhuma tecnologia (por exemplo, podem ser objetos 3D projetados ou imagens holográficas)" (Moyer-Packenham; Bolyard, 2016, p. 06). Nós, por outro lado, entendemos que é da natureza de um manipulativo virtual ser baseado em uma tecnologia, mesmo que essa seja mais avançada que aquelas que possuímos atualmente. Entendemos ainda que a criação de manipulativos holográficos ou em realidades virtuais ampliadas, por exemplo, não impedem a existência dos manipulativos virtuais baseados em tecnologias, conforme conhecidos e utilizados atualmente.

Quanto aos manipulativos pictóricos incluídos entre os materiais didaticamente construídos, há considerações importantes a serem feitas. Blocos base dez (BBD), que aparecem excessivamente representados em livros didáticos do Brasil, por exemplo, podem ou não ser considerados manipulativos. Entretanto, figuras estáticas nas páginas de texto dos livros são apenas imagens, pois não possuem dinamicidade, ou seja, não podem ser manipulados fisicamente. Nesse caso, são apenas ilustrações estáticas de representações manipuláveis, que podem desencadear na mente do leitor ideias matemáticas. Algumas coleções de livros didáticos, porém, trazem encartes com representações pictóricas dos BBD para que os alunos recortem e manipulem. Esses são exemplos de manipulativos pictóricos conforme a nossa primeira categoria.

Quanto aos manipulativos pictóricos incluídos em nossa terceira categoria, que se refere aos objetos retirados da vida cotidiana, podemos pensar de forma análoga àquela exposta no parágrafo anterior. Figuras estáticas nas páginas de texto dos livros didáticos não devem ser consideradas como manipuláveis. São apenas representações estáticas de objetos provenientes da vida cotidiana. Por outro lado, ao lidar com figuras recortadas de livros, encartes, revistas, entre outros, as crianças têm a possibilidade de manipular. Nesse caso, essas figuras representariam manipulativos pictóricos de objetos retirados da vida cotidiana.

SOBRE MATERIAIS MANIPULATIVOS TRADICIONALMENTE UTILIZADOS PARA O ENSINO DE NÚMEROS E OPERAÇÕES

Tratando de materiais manipulativos não posicionais pensados para o ensino de números e das quatro operações matemáticas básicas, Silveira (2021) afirma que eles podem ser divididos em dois grupos: *materiais com valores evidente*s e *materiais com valores convencionados*. Os *materiais com valores evidentes* são aqueles em que, além de as peças componentes trazerem os seus valores evidentes na sua forma ou agrupamento, esses valores são organizados proporcionalmente, segundo potências de 10, ou seja, uma peça que vale 10 unidades tem valor 10 vezes maior que uma peça que vale 1 unidade. A peça que vale 100 unidades é 10 vezes maior que a peça que vale 10 unidades ou 100 vezes maior que a peça que vale 1 unidade. BBD, amarradinhos de palitos, *Digi-Blocks* e Cubos de encaixe são bons exemplos de materiais com valor evidente. Van de Walle *et al.* (2013) nomeiam essa categoria de materiais como "modelos proporcionais".

8 Segundo Moyer-Packenham e Bolyard (2016), os termos "manipulativos digitais", "manipulativos de computador" e ""manipuladores virtuais" têm sido comumente usados como sinônimos.

Materiais com valores convencionados não têm evidente o valor de cada peça componente do material. Há a dependência de uma convenção preestabelecida, que garante que uma peça valha uma determinada quantidade. Fichas verdes[9], dinheirinho, fichas coloridas, anilhas de ábaco[10] coloridas de diferentes cores são exemplos de materiais com valores convencionados. Esse tipo de material é chamado de "modelos não-proporcionais" em Van de Walle *et al.* (2013).

Materiais com valores evidentes podem ainda ser divididos em dois grandes grupos, conforme propostos por Van de Walle *et al.* (2013): (a) *materiais agrupáveis e desagrupáveis* e (b) *materiais pré-agrupados*[11]. *Materiais agrupáveis* são compostos por peças que sempre valem uma unidade, ou seja, sempre valem 10^0. Com essas unidades, porém, é possível criar grupos de quantidades coincidentes com outras potências de 10. Palitos de picolé são um bom exemplo para esse tipo de material. Cada palito de picolé sempre vale uma unidade, mas é possível juntar 10 desses palitos, colocar um elástico, e fazer um "feixinho", que representa uma dezena. Ainda é possível juntar 10 desses "feixinhos" com outro elástico, e formar um "feixão", que representa uma centena. Da mesma forma, é possível "desagrupar" essas coleções apenas retirando o elástico. Isso facilitaria, por exemplo, em casos de subtração com reagrupamento. Entre os materiais agrupáveis e desagrupáveis destacam-se os próprios palitos de picolé, canudinhos de refrigerante, *Digi-Blocks*, cubos de encaixe, feijões.

Materiais pré-agrupados são compostos por peças que, originalmente, possuem valores evidentes, propositalmente coincidentes com diferentes potências de 10. Essas peças não podem ser desagrupadas, dada a sua forma de fabricação. Os BBD são exemplos de manipulativos pré-agrupados, pois possuem blocos que valem uma unidade (cubinho), dez unidades ou uma dezena (barras), cem unidades ou centena (placas), mil unidades ou uma unidade de milhar (cubo). Ao manipular esse material, não é possível desmontar uma placa para obter dez barras ou juntar dez barras e formar uma placa. Quando essas ações são necessárias, no caso de uma adição ou subtração com reagrupamentos ("vai um" ou "empresta um"), a criança precisa retirar um ou dez blocos do sistema. Na adição, quando ocorre um "vai um", retiram-se 10 blocos de uma ordem de grandeza e trocam-se por um bloco de uma ordem de grandeza maior, que representa a mesma quantidade de unidades. Na subtração, quando necessário, faz-se o contrário: faz-se uma troca externa de um bloco por dez blocos e, finalmente, reinsere-se a nova quantidade de blocos no sistema. Manipulativos de papel, cartolina ou cartão, usados no ensino de números decimais, também são exemplos de materiais pré-agrupados.

RELAÇÕES ENTRE MANIPULATIVOS E JOGOS

Moyer-Packenham e Bolyard (2016) descrevem a relação entre manipulativos virtuais e jogos, considerando que ela ocorre quando manipulativos virtuais são incorporados em ambientes de jogos. A partir das discussões desses autores, propomos estabelecer aproximações e distanciamentos entre materiais manipulativos físicos ou virtuais e jogos. Em muitos casos, manipulativos físicos ou virtuais são incorporados a um jogo como sua parte integrante, sem a qual tal jogo não existiria. Há casos em que jogos são criados a partir de um determinado material manipulativo, visando a tornar seu uso mais atraente e significativo para os alunos, uma vez que a manipulação do material acontece em um ambiente de jogo, disputa, com regras associadas à manipulação.

9 Material verde que simula a base 10, apresentado e disponibilizado nos livros didáticos da coleção Ápis Matemática da Editora Ática.
10 Somente as anilhas, sem a estrutura do ábaco.
11 Os autores usam as expressões *Groupable Models* e *Pregrouped Models*, ou seja, Modelos agrupáveis e Modelos pré-agrupados.

Para exemplificar, podemos pensar no jogo “Nunca 10”. Nele, blocos dos BBD vão sendo acumulados pelos jogadores, a partir de valores obtidos em lançamentos de dados, respeitando-se a regra de nunca acumular 10 blocos de mesmo modelo, por exemplo, dez cubinhos ou dez barrinhas. Isso pode levar a criança jogadora a se familiarizar com as trocas de grupos de dez objetos por um objeto com valor equivalente. É importante ressaltar que nem tudo no jogo pode ser considerado como material manipulativo, mas, muitas vezes, como no exemplo anterior, o jogo só pode ser jogado quando se manipulam objetos que estão embutidos nele. Podemos considerar que essa incorporação de materiais manipulativos em ambientes de jogos físicos ou virtuais pode gerar ganhos para a aprendizagem matemática.

MATERIAIS MANIPULATIVOS: UMA CATEGORIZAÇÃO

Pesquisadores em Psicologia Educacional, como Piaget, Gattegno[12] e Bruner, estão entre os primordiais defensores da utilização de manipulativos no ensino e na aprendizagem de matemática. Para além de defenderem o uso desse tipo de recurso, Cuisenaire, Gattegno, Dienes e Montessori desenvolveram materiais manipulativos que, com modificações ou não, ainda fazem sucesso atualmente, tais como as barras de Cuisenaire, de Georges Cuisenaire, os Geoplanos de Gattegno e os BBD ou blocos de Dienes[13], ou o material de pérolas[14] de Montessori.

Em continuidade aos trabalhos pioneiros desses educadores, pesquisadores na Educação Matemática têm se dedicado a estudar os efeitos da utilização de materiais manipulativos. Ladel e Kortenkamp (2016) entendem que a base para promover processos de aprendizagem matemática está nas operações com manipulativos. Para alguns pesquisadores esses materiais podem fornecer conexões para ajudar os estudantes a relacionar seu conhecimento e sua experiência informal com abstrações matemáticas (Kilpatrick *et al.*, 2001), ou mesmo ajudar os alunos a entender conceitos matemáticos abstratos, que os auxiliam na conexão entre conceitos e ideias concretas informais, intuitivas (Uribe-Flórez; Wilkins, 2010).

Os materiais manipulativos ajudam a tornar visíveis os conceitos de matemática invisíveis (Golafshani, 2013), ou a possibilitar uma matemática mais real para os alunos (Baroody, 1989). Para Moyer-Packenham e Jones (2004), esses materiais também auxiliam os alunos que têm dificuldades para compreender símbolos abstratos. Furner *et al.* (2005) entendem que o uso de manipulativos contribui para os estudantes criarem conexões entre o concreto e o abstrato. Nessa perspectiva, há uma falsa ideia de que seja possível conceber uma matemática concreta. Na verdade, as conexões são criadas entre a concretude do material sendo manipulado e as relações matemáticas, que são

12 É importante observar que, em 1950, Caleb Gattegno fundou a *Commission internationale pour l’étude et l’amélioration de l’enseignement des mathématiques* (CIEAEM), da qual foi secretário até 1960. Entre os membros do CIEAEM estavam Jean Piaget, Jean-Louis Nicolet, Emma Castelnuovo, Trevor J. Fletcher, Gustave Choquet e Jean Dieudonné, um dos matemáticos franceses mais influentes do século XX, especialmente por sua associação com o famoso grupo Bourbaki (Powell, 2007). Também, em 1952 na Inglaterra, Gattegno foi um dos fundadores da *Association for Teaching Aids in Mathematics* (que mais tarde se tornou a *Association of Teachers of Mathematics*) e atuou como o primeiro editor de sua revista, *Mathematics Teachings* (Powell, 2007). Em 1953, o CIEAEM pediu a Gattegno que avaliasse o valor dos materiais de Emile-Georges Cuisenaire. Cuisenaire descobriu que havia conseguido algo raro: seus alunos gostavam do seu trabalho e o entendiam. Com suas proezas aritméticas em conformidade com o rigoroso programa de estudos europeu, seus alunos surpreenderam os educadores (Trivett, 1959). Em 1952, Cuisinaire publicou seu trabalho em um livreto, intitulado *Les Nombres en Couleurs*. No entanto, por cerca de 23 anos, seu trabalho e suas invenções permaneceram praticamente desconhecidos fora de seu vilarejo de Thuin, Bélgica. Em contrapartida, um ano após a publicação de seu livro, um encontro providencial desse professor com Gattegno resultou no uso de seus materiais em salas de aula em todo o mundo (Powell, 2007).

13 Os BBB preexistem a Dienes. Apenas exemplificando, Zbigniew Antony Lubienski, também conhecido como Roland A. Lubienski Wentworth, criou e trabalhou com BBB a partir da década de 1930.

14 Conhecido como “material dourado” ou “*golden beads*”.

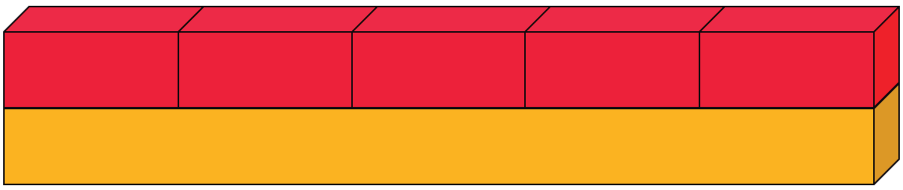
abstratas. Lembramos que a concretude não está simplesmente relacionada ao fato de o objeto ser concreto, mas à significação que esse objeto possui, mesmo que seja, por exemplo, virtual.

Com efeito, Uttal *et al.* (1997) defendem que pode ser contraproducente utilizar materiais manipuláveis que não possibilitem aos alunos entender a relação entre o material e o conceito matemático a ser ensinado. Sem essa compreensão, as crianças podem pensar que estão aprendendo duas coisas diferentes ao mesmo tempo e sentir-se sobrecarregadas cognitivamente. Brown *et al.* (2009), na mesma linha de raciocínio, entendem que, ao usar manipulativos, os alunos precisam compreender que não estão adentrando a um novo sistema isolado da matemática. Ao contrário, precisam ter claro que estão usando esses materiais para auxiliar na compreensão do sistema simbólico - matemático - que estão estudando.

Ainda pensando nas possíveis limitações na utilização de manipulativos, Thompson e Lambdin (1994) afirmam que não é fácil usá-los de forma profícua e, ao contrário, é muito fácil empregá-los inadequadamente. Kilpatrick *et al.* (2001) alertam que eles não possuem um fim em si mesmos, mas, para objetivos pedagógicos, esses materiais são meios que permitem aos estudantes construírem significados e estabelecerem conexões entre diferentes ideias matemáticas.

É importante considerar esta distinção: embora os materiais manipulativos sejam projetados ou emprestados para representar explícita e concretamente ideias matemáticas abstratas (Moyer-Packenham, 2001), eles mesmos não incorporam significados matemáticos, ou seja, a matemática não é inerente a esses objetos. Meira (1998) argumenta sobre o que ele chama de *transparência* dos materiais manipulativos como um índice de acesso a conhecimentos e atividades matemáticas - mais do que um fator inerente aos objetos - e que se desdobra por meio de um processo mediado pelo uso dos materiais dentro de uma prática sociocultural específica. Por exemplo, na sala de aula o comprimento de uma barra de Cuisenaire de cor vermelha pode representar para os estudantes 1/5 do comprimento da barra de cor laranja (Figura 1) apenas se eles, anteriormente, tiverem desenvolvido atividades matemáticas com as barras e compreendido a comparação entre os comprimentos de cinco barras de cor vermelha e uma barra cor de laranja. Caso contrário, a barra é simplesmente um objeto de madeira ou plástico cuja cor é vermelha ou laranja e não transmite a alguém um significado matemático específico.

Figura 1 - Comparação entre os comprimentos das barras Cuisenaire vermelha e laranja.



Fonte: construção dos autores.

Uttal *et al.* (1997, p. 50) entendem que o uso de manipulativos pode até ser positivo, mas tais objetos não contêm na sua concretude a chave para “desbloquear os mistérios da matemática”. Outros pesquisadores também aderem à noção de que os manipulativos não carregam em si o significado da ideia matemática (Clements; Mcmillen, 1996). Nessa direção Moyer-Packenham (2001) afirma que esses materiais não são inerentemente portadores de significados quaisquer. É a reflexão dos estudantes sobre suas ações com os manipulativos que pode ajudá-los na construção de significados. Eles constroem o significado para os manipulativos, agindo com eles, por meio da manipulação, dentro de sua prática sociocultural específica.

EQUÍVOCOS QUANTO À PRODUÇÃO E AO USO DE MATERIAIS MANIPULATIVOS

Silveira (2021), em um exercício de tentar mapear possíveis problemas relacionados ao trabalho com materiais manipulativos, propõe a criação de três categorias: manipulativos construídos ou elaborados de forma errada, manipulativos usados de forma equivocada e manipulativos usados para funções inadequadas.

MANIPULATIVOS CONSTRUÍDOS OU ELABORADOS DE FORMA ERRADA

Nesta categoria estão incluídos aqueles materiais manipulativos que, graças à inserção de características irrelevantes ou descuido na fabricação ou nomenclatura inadequada, não podem cumprir sua função. Nessa perspectiva, Kaminski e Sloutsky (2013) afirmam que projetistas de materiais para o ensino devem limitar a inserção de *informações perceptivas estranhas* em suas criações, evitando que esses materiais funcionem para desviar a atenção dos aprendizes da informação que se deseja ensinar. Manipulativos desprovidos de características perceptivas ou de atributos irrelevantes ajudam as crianças a concentrarem melhor sua atenção na relação com o conceito matemático que representam (Laski *et al.*, 2015).

Para exemplificar, Silveira (2021) apresenta o caso dos ábacos coloridos conforme imagem seguinte:

Figura 2 - Ábaco de pinos ou ábaco aberto.

Fonte: *Internet*: modelo de ábaco padrão em lojas de brinquedos educativos.

É quase impossível encontrar, em lojas físicas ou virtuais, um ábaco de pinos em que todas as anilhas ou contas possuam a mesma cor. Via de regra, nos ábacos, todas as anilhas devem valer uma unidade. Ao serem adicionadas a uma ou outra posição, passam a contar potências da base

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 135-152,
jan./jun. - Santa Maria, 2025.

em questão, no nosso caso, base 10, próprias daquela posição. Quando as anilhas são coloridas com diferentes cores, abre-se a possibilidade para entender que os valores de diferentes potências de 10 sejam atribuídos às diferentes cores, em um tipo de convenção. Não é difícil concluir que as anilhas bege, na figura 2, são, mesmo que de forma indesejada pelo professor, associadas ao valor de 100 unidades cada, independentemente de estarem inseridas na posição das centenas no ábaco. Na realidade, o projetista desse material imagina que aquela anilha valha uma unidade, mas a ideia de unidade será associada às anilhas verdes. Nesse caso o ábaco perde a sua serventia e função, pois basta amontoar a quantidade de anilhas correspondentes, sem o uso do ábaco, para obter o numeral desejado (Bartolini Bussi, 2011; Silveira, 2014; Silveira, 2016). Por exemplo, se houver um montinho com uma anilha azul, duas anilhas beges e cinco anilhas verdes, sabendo em que hastes do ábaco cada uma das cores é usada, é possível deduzir que a quantidade representada é 1205. Para que se eliminem possibilidades de interpretações equivocadas e para que o material cumpra o papel esperado, os ábacos devem possuir todas as anilhas em uma única cor, sendo irrelevante a cor escolhida.

Em outra situação, ainda na categoria manipulativos construídos ou elaborados de forma errada, podemos apontar o caso dos Blocos Lógicos. Apresentados por Dienes e Golding (1966)[15], eles tinham o objetivo de auxiliar os estudantes no desenvolvimento de estruturas matemáticas elementares, como a compreensão de teoria dos conjuntos.

Figura 3 - Blocos lógicos de Dienes.

Fonte: arquivo pessoal dos autores.

Ao apresentarem os blocos lógicos ou "blocos de atributos", Dienes e Golding (1966) falam a respeito da influência da obra de Vygotsky e de William Hull sobre a sua criação e afirma que esse último autor foi o primeiro a dar uma contribuição prática para o uso de blocos no desenvolvimento do pensamento lógico de alto nível de crianças a partir dos 5 anos. Dentre as condições impostas por Hull para que isso acontecesse, havia a consideração de que se tomasse muito cuidado para que o *verbalismo excessivo* não atrapalhasse a formação do conceito (Dienes; Golding, 1966). Os blocos,

15 Neste texto não temos o objetivo de discutir as influências de William Hull ou Vygotsky na criação de Dienes ou sua "disputa" com Maria Montessori.

formas geométricas 3D, possivelmente por "simplificação" em relação a um "verbalismo excessivo", foram nomeados por Dienes e Golding (1966) segundo as formas de suas maiores faces ou suas bases. Assim, foram chamados de quadrados, retângulos, triângulos e círculos ou *squares, oblongs, triangle* e *circles* (Dienes; Golding, 1966).

Certamente Dienes e Golding (1966) sabiam que essa nomenclatura não correspondia aos blocos utilizados, especialmente por se tratar de um conhecimento matemático muito elementar. Parece-nos que essa nomenclatura é utilizada, de fato, na ilusão de que a criança entenderá que, ao ser solicitada a pegar um círculo vermelho, pequeno e fino, o professor está se referindo apenas ao formato da base do cilindro vermelho, pequeno e fino. Nesse caso, é provável que todas as crianças pegarão o objeto "correto", e é possível que algumas entendam que o nome do objeto se refere apenas à figura geométrica da sua base, porém, é provável que outras passem a entender que aquele objeto é, de fato, um círculo. É possível que passem a entender, inclusive, que há círculos finos e círculos grossos, por exemplo. Nesse caso, podemos estar diante de dois problemas: o primeiro é que a criança pode entender que esses objetos (e não suas bases) possuem esses nomes. Assim, passam a chamar um cilindro, por exemplo, de círculo. O segundo é que círculo já é o nome de outro objeto matemático.

Possivelmente, por se tratar de um material que pode ser utilizado no ensino e na aprendizagem de matemática desde a Educação Infantil, existe a preferência por nomear os blocos de forma mais "simplificada". Seria ruim para atividades com crianças muito pequenas, por exemplo, chamar um bloco de "prisma de base triangular", e isso teria levado o idealizador e seus seguidores a nomearem tal bloco como "triângulo". No caso do trabalho com crianças na Educação Infantil, nomear os blocos com nomes mais gerais, que remetem à ideia da tridimensionalidade, poderia resolver essa confusão. Os blocos poderiam ser chamados de bloco redondo, bloco retangular, bloco triangular e bloco quadrado. Nos Anos Iniciais, a nomenclatura correta de cada bloco deve ser ensinada e utilizada.

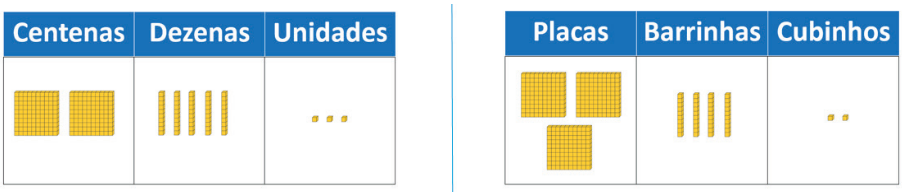
Algo parecido acontece também com o quebra-cabeças Tangram. Nele as peças, que são blocos 3D, são nomeadas como figuras de duas dimensões. Normalmente diz-se que o Tangram é composto por dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. A resolução dessa questão perpassa pelo mesmo tipo de resolução sugerido para o caso dos blocos lógicos.

MANIPULATIVOS USADOS DE FORMA EQUIVOCADA

Esta categoria trata dos casos em que, mesmo materiais bem construídos e livres de características irrelevantes, ou seja, adequados para a utilização em aulas de matemática, são utilizados de forma equivocada. Um bom exemplo para essa categoria é a utilização de materiais com valor diferente de um, evidente ou convencionado, sobrepostos a quadros de valor de lugar no ensino do Sistema de Numeração Decimal e suas quatro operações básicas (Silveira, 2014, 2016, 2018, 2019, 2020, 2021), conforme apresentado na Figura 4.

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 135-152,
jan./jun. - Santa Maria, 2025.

Figura 4 - Blocos base dez sobrepostos a QVL ou a tabelas rotuladas.



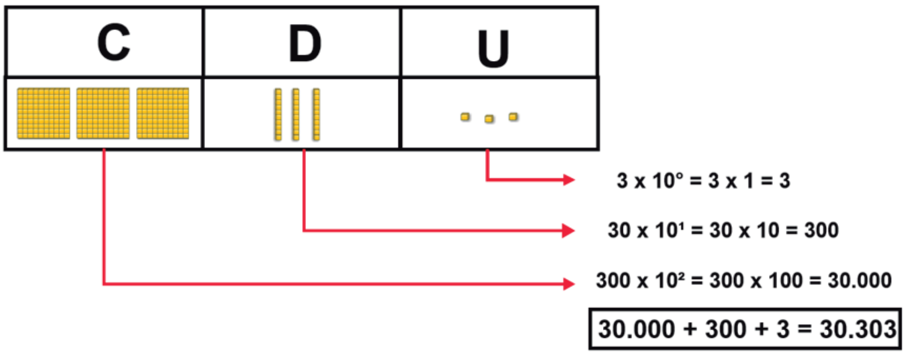
Fonte: construção dos autores..

Silveira (2021) argumenta que "[...] os BBD se diferenciam dos ábacos porque neles cada modelo de bloco já traz em si, gravado na sua forma, de maneira evidente, um valor que traduz uma potência de dez. Cubinhos valem unidades, barrinhas valem dezenas, placas valem centenas e o cubo vale uma unidade de milhar" (p. 06), 10°, 10^1, 10^2 e 10^3, respectivamente. Já os quadros de valor de lugar são arquitetados sobre os princípios aditivo e multiplicativo do nosso sistema de numeração. O autor argumenta que, quando blocos são introduzidos no interior dos QVL, cria-se um conflito.

> Se um bloco que vale 100 unidades (placa) é inserido na ordem das centenas em um QVL, o que deveria acontecer? Das duas, uma: ou passa-se a considerar que seu valor absoluto agora é 1 unidade, o que é absolutamente incoerente, dado que insistentemente os alunos são lembrados que uma placa vale 100 unidades, ou seu valor relativo passa a ser 10.000 unidades, pois 100 (valor agregado da placa) vezes 100 (fator multiplicativo da ordem das centenas) é igual a 10.000 (Silveira, 2021, p. 07).

A Figura 5 pode oferecer uma melhor compreensão.

Figura 5 - Blocos base dez sobrepostos a um QVL e possíveis consequências.



Fonte: Silveira, 2021, p. 07.

Em Silveira (2021) também é possível encontrar uma explicação para as dificuldades que podem ser criadas também nos casos em que os blocos são inseridos em tabelas com rótulos. A Figura 6 elucida a discussão.

VIDYA
VIDYA, v. 45, n. 1, p. 135-152,
jan./jun. - Santa Maria, 2025.

Figura 6 - Blocos base dez sobrepostos a uma tabela com rótulos e possíveis consequências.

Fonte: Silveira, 2021, p. 08.

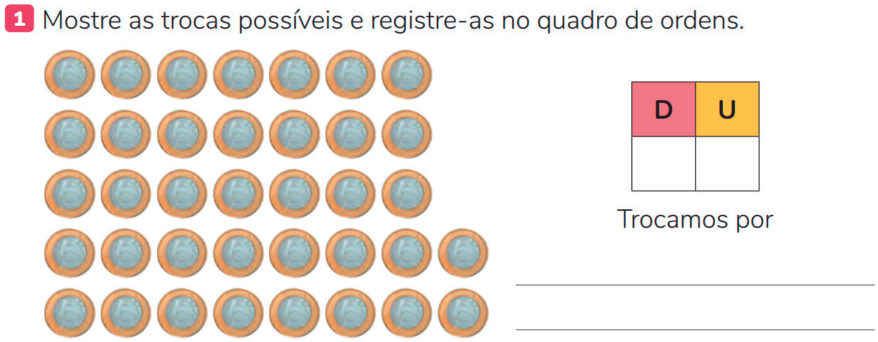
Há outros casos similares em que, ao invés de BBD, são usados amarradinhos de palitos ou as fichas verdes[16], dentre outros materiais de base dez. Todos esses materiais, incluindo os BBD, não podem ser inseridos em quadros de valor de lugar, pois possuem valores agregados diferentes de uma unidade.

MANIPULATIVOS USADOS PARA FUNÇÕES INADEQUADAS

Na terceira categoria, Silveira (2021) trata de manipulativos usados para funções inadequadas. No caso em que os manipulativos são usados para funções inadequadas, um material manipulativo adequado para auxiliar na aprendizagem de um determinado conteúdo matemático é utilizado para ensinar outros conteúdos, criando uma zona de possibilidades para o surgimento de problemas de compreensão. No caso da repetição de uso, um material manipulativo já utilizado para ensinar determinado conteúdo matemático volta a ser utilizado para ensinar outro conteúdo, obrigando a criança a ressignificar a representação do material. Para exemplificar um material manipulativo usado em uma função inadequada, Silveira (2021) cita a utilização do “dinheirinho” para ensinar o conceito de base dez, conforme apresentado na Figura 7:

16 Material exclusivamente apresentado na coleção Ápis/Matemática, da Editora Ática, para os Anos Iniciais.

Figura 7 - Dinheirinho sendo utilizado para ensinar agrupamentos de dez.



Fonte: Rubinstein *et al.*, 2021, p. 26.

Quando o objetivo é ensinar base dez para os estudantes, interessam apenas materiais em que se agrupam dez unidades de uma ordem de grandeza, para que possam ser trocadas por uma unidade de ordem de grandeza maior. No caso do dinheirinho, faz sentido apenas que os estudantes façam trocas de dez moedas de R$ 1,00 por uma nota de R$ 10,00, ou que troquem dez notas de R$ 10,00 por uma nota de R$ 100,00, ou o inverso dessa ordem. Acontece que, no nosso sistema monetário, de onde são retirados os modelos conhecidos como notinhas de brincadeira, existem também notas de R$ 2,00, R$ 5,00, de R$ 20,00, de R$ 50,00 e R$ 200,00. No encarte do livro citado anteriormente, há, inclusive, notas de todos esses valores, exceto R$ 200,00, para que sejam recortadas e utilizadas pelos estudantes na manipulação.

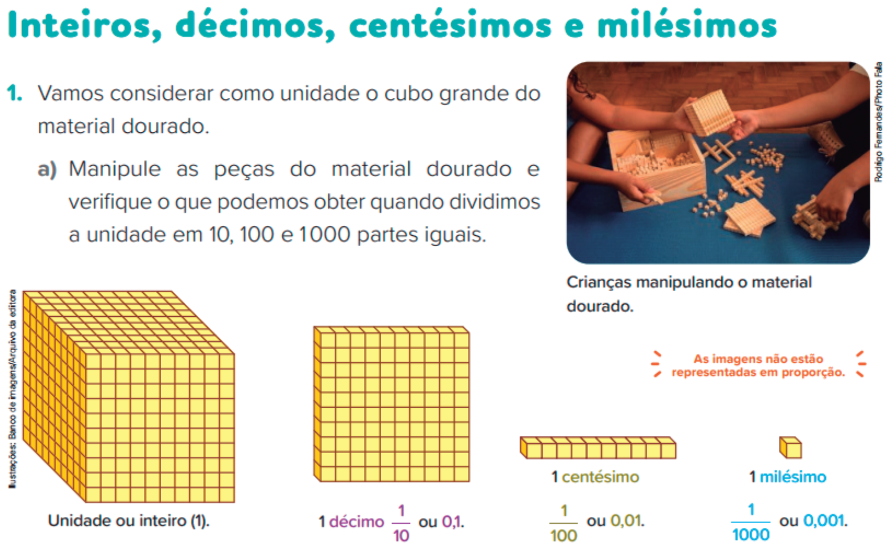
Como todas essas notas são conhecidas e até utilizadas corriqueiramente por estudantes, problemas podem surgir se uma criança decidir que pode trocar duas moedas de R$ 1,00 por uma nota de R$ 2,00, ou cinco moedas de R$ 1,00 por uma nota de R$ 5,00. Embora as notas de R$ 2,00 e R$ 5,00 façam parte do sistema monetário e estejam disponíveis para recorte no encarte do livro, elas não são adequadas ao objetivo de compreensão do Sistema de Numeração Decimal, pois apenas as notas de R$ 1,00, R$ 10,00 e R$ 100,00 representam potências de dez. Uma nota de R$ 5,00, por exemplo, vai atrapalhar a relação utilizada, pois R$ 5,00, nessa atividade, sempre será representado por 5 moedas de R$ 1,00. Nos BBD, por exemplo, material similar a esse, diferenciando-se apenas pelo fato de possuir valores evidentes e não convencionados, não há um bloco para cinco unidades. Assim, embora o dinheirinho seja um bom material para o trabalho com a aritmética básica, só será eficiente para o trabalho com base dez se o professor introduzir uma moeda fictícia que só possua notas de R$ 1,00; 10,00; 100,00 e, quem sabe, R$ 1.000,00.

Casos em que um material manipulativo é estendido para ensinar um novo conteúdo matemático apresentam a noção de materiais multivalentes, conforme proposto por Gattegno (1958) e Puig Adam (1956-1957). Segundo a nossa compreensão, é necessário tratar esse conceito de materiais manipulativos que possuem variados usos no sentido que pode ser empregado para representar múltiplos objetos matemáticos e, por meio da sua manipulação, exemplificar, com bastante cuidado, múltiplas relações entre os objetos.

Entendemos, por exemplo, que as barras de Cuisenaire podem ser usadas para representar múltiplos objetos matemáticos, como números naturais, inteiros e racionais (frações e decimais), e as manipulações desse material são capazes de simular várias operações aritméticas, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão, exponenciação, logaritmos, permutações e combinações, além de propriedades e fórmulas algébricas (Cuisenaire & Gattegno, 1954; Gattegno & Hoffman, 1976). Mas é preciso ter cuidado e criar um ambiente seguro para questionamentos e investigações na sala de aula. Não é trivial encontrar e lidar com vários usos matemática e pedagogicamente legítimos para um mesmo material manipulativo.

Para exemplificar, veremos o caso em que os BBD são usados para ensinar números racionais na representação decimal. Nesses casos, ou toma-se o cubo (unidade milhar) como uma unidade, considerando uma placa (centenas) como um décimo, uma barrinha (dezena) como um centésimo e um cubinho como um milésimo, ou toma-se a placa (centena) como o inteiro, trabalhando com barrinhas e cubinhos como décimos e centésimos. A figura 8 expõe essa ideia presente em alguns livros didáticos.

Figura 8 - Blocos base dez sendo utilizados para ensinar números decimais.


Inteiros, décimos, centésimos e milésimos

1. Vamos considerar como unidade o cubo grande do material dourado.

a) Manipule as peças do material dourado e verifique o que podemos obter quando dividimos a unidade em 10, 100 e 1000 partes iguais.

Fonte: Dante & Viana, 2021, p. 172.

Normalmente, os próprios livros didáticos introduzem os BBD no primeiro ou no segundo ano. Nesses casos o objetivo é que o material auxilie no ensino e na aprendizagem do sistema de numeração e das quatro operações aritméticas básicas. Acontece que não é tão simples a ressignificação simbólica de um material. Segundo DeLoache (2000), "[...] para usar um objeto simbólico como um modelo, mapa ou imagem, deve-se alcançar a representação dual; isto é, deve-se representar mentalmente tanto o próprio símbolo quanto sua relação com seu referente" (p. 329). Nesse caso, o "símbolo", que seriam os BBD, além de serem objetos próprios, representando a si mesmos (blocos de madeira), foram utilizados durante os primeiros anos dos Anos Iniciais para se referirem a unidades, dezenas, centenas e unidades de milhar. Quando voltam a ser utilizados, é necessário que o estudante tenha a capacidade de, novamente, significar (ressignificar) o "símbolo", que, desse momento em diante, passa a ser uma representação tripla, significando a si mesmo; as quatro primeiras ordens de números inteiros e a unidade; e as três maiores ordens de números menores que um. Para que haja sucesso nessa tarefa, é preciso que a criança substitua um referente por outro. Isso pode ser acessível para algumas crianças, mas pode não ser para outras. Nesses casos, o ideal seria utilizar algum material manipulativo ainda não utilizado para outras funções.

De certa forma, nessa categoria de manipulativos usados de forma equivocada depende-se, em grande parte, do trabalho pedagógico desenvolvido em sala de aula, pelo professor, ou mesmo de como os materiais manipulativos são sugeridos para serem trabalhados nos manuais e nos livros didáticos. Podemos falar em uma cultura de aula de matemática, na perspectiva da problematização, em que os estudantes sejam habituados a manipular materiais em diferentes contextos matemáticos. Por exemplo, uma prática com o uso de barrinhas Cuisenaire em aulas de matemática, em que os estudantes experimentam significar e ressignificar as barras, segundo o seu valor, variando as que representam a unidade, e as demais barras vão assumindo valores variáveis vai criando uma cultura de significação e ressignificação dos materiais. Nesse processo os limites e as potencialidades de cada material também se tornam variáveis. Um estudante habituado a essas ressignificações possivelmente não encontre problema em compreender que, no BBD, o cubo grande, que no sistema de numeração decimal representa 1000, pode passar a valer 1, e, assim, a placa vale 1/10, a barrinha, 1/100 e o cubinho, 1/1000.

Uttal (2003) afirma que o papel do professor é determinante para definir se os materiais manipulativos ajudarão, prejudicarão ou não farão diferença às crianças na tarefa de compreender matemática. Para ele, é papel do professor fazer essa orientação de forma eficaz. Se usados de forma rotineira, mesmo que executem as etapas corretamente, podem não potencializar a aprendizagem das crianças (Clements & Mcmillen, 1996).

Dessa forma, para que o uso de materiais manipulativos seja favorável à aprendizagem matemática, é necessário estar atento às suas construções e características, aos limites, potencialidades e usos pedagógicos dentro do contexto cultural da sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo neste texto foi trazer uma compreensão de materiais manipulativos na Educação Matemática, com destaque para seus usos, cuidados e equívocos em sua construção e no uso nas práticas pedagógicas. As preocupações estiveram centradas tanto nas questões relacionadas à sua construção, quanto na apropriação/adaptação, nas ressignificações e em seu uso.

Baseados em outros autores, construímos e apresentamos nesse texto uma proposta de categorização dos mais diversos tipos de materiais manipulativos na educação matemática. Essas categorias se constituem de materiais didaticamente construídos, instrumentos culturais herdados da tradição e objetos retirados da vida cotidiana. Incluem, além de objetos físicos, também objetos pictóricos, que seriam aqueles recortados de livros, encartes, e outros para que o aluno possa manipular, e virtuais, entendidos como representações visuais interativas de objetos matemáticos dinâmicos habilitados por computadores.

Os materiais manipulativos são importantes na educação matemática, mas seu uso não garante sucesso. Sua eficiência e eficácia parecem estar relacionadas a três variáveis: a escolha do material, a clara e participativa instrução do professor e a participação dos estudantes no uso do material, por meio de um processo matemático. Quanto à escolha do material, discutimos no texto alguns equívocos relacionados à sua produção e usos, quais sejam: manipulativos construídos ou elaborados de forma errada, manipulativos usados de forma equivocada e manipulativos usados para funções inadequadas. Esse texto se articula a outras pesquisas que vem sendo desenvolvidas (Silveira, 2014, 2016, 2018, 2019, 2021) e que evidenciam uma série de problemas no que tange aos usos equivocados de materiais manipulativos com os estudantes. Consideramos fundamental que professores e pesquisadores levem em conta essas discussões na pesquisa e prática em Educação Matemática.

Destacamos que, para qualquer uso que se proponha com um material, talvez o momento mais importante seja que os estudantes experimentem manipular os materiais de forma livre, conhecendo suas características e propriedades, para que possam fazer um melhor uso quando provocados pelas problematizações propostas pelo professor ou pelo autor de livro didático.

Consideramos que esse texto apresenta uma categorização possível para os materiais manipulativos, seus usos e equívocos, abrindo possibilidades para o exercício de outras categorizações, bem como, ampliações dessas. Outras pesquisas poderiam abordar as compreensões de professores acerca dos materiais manipulativos e seus usos em práticas pedagógicas, e ainda, os impactos do mau uso ou dos equívocos nesses/desses materiais no processo de aprendizagem matemática dos estudantes.

REFERÊNCIAS

Baroody, A. J. (1989, October). Manipulatives don’t come with guarantees. **National Council of Teachers of Mathematics**, 37(2), 4-5.

Bartolini Bussi, M. G. (2011). Artefacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 14(2), 93-112.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni, M. (2003, July). Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms. **For the Learning of Mathematics**, 23(2), 15-22.

Brown, M. C., Mcneil, N. M., & Glenberg, A. M. (2009). Using concreteness in education: Real problems, potential solutions. **Child Development Perspectives**, 3(3), 160-164.

Clements, D. H., & Mcmillen, S. (Jan. 1996). Rethinking “concrete” manipulatives. **National Council of Teachers of Mathematics**, 2(5), 270-279.

Cuisenaire, G., & Gattegno, C. (1954). **Numbers in colour: A new method of teaching the process of arithmetic to all level of the Primary School**. Hienemanns.

Dante, L. R., Viana, F. (2021). **Ápis Mais: Matemática, 5º ano** (1th ed.). Editora Ática S. A.

Deloache, J. S. (2000). Dual representation and young children’s use of scale models. **Child Development**, 71(2), 329-338.

Dienes, Z., & Golding, E. (1966). **Learning logic, logical games**. New York: Herder & Herder.

Furner, J. M., Yahya, N., & Duffy, M. L. (2005, September). Teach mathematics: strategies to reach all students. **Intervention in School and Clinic**, 41(1), 16-23.

Gattegno, C. (1958). Les matériels multivalents. In: C. Gattegno et al. (1958), **Le matériel pour l'enseignement des Mathématiques** (pp.191-201). Delachaux et Niestlé.

Gattegno, C. (1958/2009). **Geometry**. Educational Solutions Worldwide.

Gattegno, G. C., & Hoffman, M. R. (1976). **Handbook of activities for the teaching of mathematics at the elementary school**. Human Education.

Golafshani, N. (2013). Teachers' beliefs and teaching mathematics with manipulatives. **Canadian Journal of Education/ Revue Canadienne de L'Éducation**, 36(3), 137-159.

Kaminski, J. A., & Sloutsky, V. M. (2013). Extraneous perceptual information interferes with children's acquisition of mathematical knowledge. **Journal of Educational Psychology**, 105(2), 351-363.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). **Adding it up: Helping children learn mathematics**. National Academy Press.

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2016). Artifact-centric activity theory - a framework for the analysis of the design and use of virtual manipulatives. In: P. Moyer-Packenham (org.), **International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives**. Mathematics education in the digital era. Springer International Publishing, 7, 25-40.

Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C., & Murray, A. K. (2015). What Makes Mathematics Manipulatives Effective? Lessons From Cognitive Science and Montessori Education. **SAGE Open**, 5(2), 1-8.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in Mathematical activity. **Journal for Research in Mathematics Education**, 29(2), 121-142. https://doi.org/10.2307/749895

Moyer-Packenham, P. S., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the Definition of a Virtual Manipulative. In: Moyer-Packenham, P. (eds) **International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives**. Mathematics Education in the Digital Era, vol. 7. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_1

Moyer-Packenham, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 47(2), 175-197. www.jstor.org/stable/3483327

Moyer-Packenham, P. S., & Jones, M. G. (2004). Controlling choice: teachers, students, and manipulatives in mathematics classrooms. **School Science and Mathematics**, 104(1), 16-31.

Powell, A. B. (2007). Caleb Gattegno (1911-1988): A famous mathematics educator from Africa? **Revista Brasileira de História da Matemática**, número especial Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, 199-209. https://doi.org/10.47976/RBHM2007vn17.

Puig Adam, P. (1956-1957). Les mathématiques et le concret [Mathematics and the concrete]. **Mathematica & Paedagogia**, (12), 62-65.

Rubinstein, C., França, E., Ogliari, E., Miguel, V., & Resende, E. (2021). **Bem Me Quer - Mais Matemática, 3º ano** (1th ed.). Editora do Brasil.

Silveira, E. (2014). Afinal, estamos ensinando matemática errado? In: **Anais do 10ª ANPED SUL**, Florianópolis-SC, Brasil: Universidade do Estado de Santa Catarina.

Silveira, E. (2016). Materiais manipuláveis e alguns riscos que envolvem sua utilização. In: Silveira, E. et al. (orgs.). **Alfabetização na perspectiva do letramento: letras e números nas práticas sociais** (vol. 1, pp. 221-240). NUP-CED--UFSC.

Silveira, E. (2018). Afinal, está certo ou errado? Um estudo sobre indicações de uso de blocos base dez em livros didáticos de matemática no Brasil. In: **Anais do 7º Seminário Internacional de Educação Matemática**. Foz do Iguaçu-PR, Brasil: SBEM. http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/schedConf/presentations

Silveira, E. (2019). Materiais manipuláveis e alguns riscos que envolvem sua utilização. In: **Anais do 13º Encontro Nacional de Educação Matemática**. Cuiabá-MT, Brasil: SBEM.

Silveira, Everaldo (2021). A Study on the indications to the use of base ten blocks and green chips in mathematics textbooks in Brazil. **The Mathematics Enthusiast**, (18) 3, 469-501. DOI: https://doi.org/10.54870/1551-3440.1534

Silveira, E. (2021). Materiais manipulativos: apresentando três chances de dar errado. In: **Anais do 8º Encontro Catarinense de Educação Matemática**. Regional Santa Catarina (evento virtual), Brasil: SBEM/SC.

Thompson, P. W., & Lambdin, D. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. **The Arithmetic Teacher**, 41(9), 556-558. http://www.jstor.org/stable/41196106

Trivett, J. V. (1959). The coloured sticks: A teacher's description of the Cuisenaire-Gattegno approach to the teaching of mathematics. **The New Scientist**, 6(160), 1183-1186.

Uribe-Flórez, L., & Wilkins, J. (2010). Elementary school teachers' manipulative use. **School Science and Mathematics**, 110(7), 363-371.

Uttal, D. H. (2003). On the relation between play and symbolic thought: The case of mathematics manipulatives. In: Saracho, O. N., & Spodek, B. (orgs.), **Contemporary perspectives on play in early childhood education** (pp. 97-114). Information Age Publishing.

Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997, January 01). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. **Journal of Applied Developmental Psychology**, 18(1), 37-54.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). **Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally** (8th ed.). Pearson.