VIDYA

VIDYA, v. 45, n. 2, p. 1-21,
jul./dez. - Santa Maria, 2025.

Recebido em: 05.02.2025. Aprovado em: 25.07.2025.
ISSN 2176-4603 | DOI: doi.org/10.37781/vidya.v45i2.5258

PROBLEMAS ENVOLVENDO CONTRAEXEMPLOS PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NO 7.º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

PROBLEMS INVOLVING COUNTEREXAMPLES FOR THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL REASONING IN THE 7TH GRADE OF MIDDLE SCHOOL

PROBLEMAS CON CONTRAEJEMPLOS PARA EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN EL 7º. GRADO DE PRIMARIA

ELIANE MARIA DE OLIVEIRA ARAMAN[1]
NILVA MARCIA DALLAGO JULIO[2]
ANDRESA MARIA JUSTULIN[3]

RESUMO

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa qualitativa e interpretativa sobre o raciocínio matemático no Ensino Fundamental. O estudo segue o método de Investigação Baseada em Design - (IBD) e tem, como objetivo, identificar se o uso de problemas envolvendo contraexemplos, abordados segundo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pode contribuir para o raciocínio matemático de alunos do 7.º Ano do Ensino Fundamental. Para a obtenção de dados empíricos, foi aplicado um problema para dois trios de alunos desse ano escolar, de uma escola da cidade de Maringá, no estado do Paraná. Os dados foram coletados por meio da gravação de áudios dos diálogos entre os trios e dos registros escritos dos alunos ao resolverem o problema e analisados evidenciando os processos de raciocínio matemático mobilizados. Os resultados indicaram que houve a mobilização dos seguintes processos de raciocínio matemático: conjecturar, exemplificar, justificar e validar.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Raciocínio matemático; Problemas; Contraexemplos; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This paper presents the results of qualitative and interpretative research on mathematical reasoning in Middle School. The study follows the Design-Based Investigation - (DBI) method. It aims to identify whether problems involving counterexamples, addressed according to the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving, can contribute to the development of mathematical reasoning in 7th-grade Middle School. To obtain empirical data, a problem was applied to two trios of students in this grade at a school in the city of Maringá, in Paraná. Data were collected through audio recordings of the dialogue between the trios and written records of the students when solving the problem and analyzed, showing the mathematical reasoning processes mobilized by the students in solving the problem. The results indicated that the following mathematical reasoning processes were mobilized: conjecturing, exemplifying, justifying, and validating.

Keywords: *Mathematics Teaching; Mathematical Reasoning; Problem; Counterexamples; Middle School.*

1 Professora associada do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. E-mail: elianearaman@utfpr.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1808-2599
2 Mestre em Ensino de Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, campi Cornélio Procópio e Londrina. E-mail: nilva.dallago@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9367-2460
3 Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho/ Rio Claro (SP). Professora Adjunta na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Cornélio Procópio, atuando no curso de Licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT). E-mail: ajustulin@utfpr.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4107-8464

RESUMEN

Este artículo presenta los resultados de un estudio cualitativo e interpretativo sobre el razonamiento matemático en la escuela primaria. El estudio sigue un método de Investigación Basada en el Diseño (IBD) y pretende identificar si el uso de problemas que involucran contraejemplos, abordados según la Metodología de Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación de las Matemáticas a través de la Resolución de Problemas, puede contribuir al razonamiento matemático de alumnos de 7º grado. Año de Primaria. Para obtener datos empíricos, se aplicó un problema a dos tríos de alumnos de este año escolar de una escuela de la ciudad de Maringá, en el estado de Paraná. Los datos se recogieron a través de grabaciones de audio de los diálogos entre los tríos y de los registros escritos de los alumnos mientras resolvían el problema, y se analizaron para destacar los procesos de razonamiento matemático movilizados. Los resultados indicaron que se movilizaron los siguientes procesos de razonamiento matemático: conjeturar, ejemplificar, justificar y validar.

Palabras-clave: *Enseñanza de las matemáticas; Razonamiento matemático; Problemas. Contraejemplos; Enseñanza primaria.*

INTRODUÇÃO

Diversas pesquisas apontam o desenvolvimento do raciocínio matemático (RM) como um dos principais objetivos do ensino de matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (Mata-Pereira; Ponte, 2018; Araman; Serrazina, 2020; Stilyanides, 2009; Lannin; Ellis; Elliot, 2011). De modo a contribuir para o raciocínio matemático dos alunos, dois aspectos precisam ser considerados: (1) o tipo de tarefa matemática que os professores proporcionam aos alunos e (2) a forma como tais tarefas são abordadas em sala de aula.

Com relação ao primeiro aspecto, Ponte (2005) destaca a importância da seleção de boas tarefas matemáticas, que contribuam para o pensar e o argumentar (Brodie, 2010). Além disso, raciocinar matematicamente requer se apropriar de conceitos para desenvolver as habilidades, o que se dá por meio de tarefas desafiadoras (Anjos *et al.,* 2022).

Por sua vez, dispor de uma boa tarefa matemática não garante sua contribuição para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, visto que a forma de abordá-la junto aos alunos é relevante e precisa ser considerada. Wood (1997) destaca que criar um ambiente favorável para a aprendizagem matemática supõe inserir, nas aulas, momentos de discussão entre professor e alunos e entre alunos e alunos e que fazer bons questionamentos ajuda os alunos a avançarem em seus entendimentos. Araman; Serrazina; Ponte (2019) elencam uma série de ações de professores que apoiam o raciocínio matemático dos alunos. Tais ações incluem convidar os alunos a contarem como resolveram a tarefa, conduzir e apoiar o pensamento dos alunos e desafiá-los a avançarem em seus entendimentos (Araman; Serrazina; Ponte, 2019).

Diante disso, este artigo traz resultados de uma pesquisa realizada com alunos do 7º. ano do Ensino Fundamental que resolveram problemas matemáticos elaborados a partir do uso de contraexemplos. A escolha pelo uso de contraexemplos se deu pelo fato de ser um tipo de problema pouco usado no Ensino Fundamental e que apresenta um bom desafio cognitivo. Além disso, o uso de contraexemplos está apoiado num dos entendimentos essenciais do raciocínio matemático, conforme estabelece Lannin, Ellis e Elliot (2011). Os problemas foram aplicados aos alunos de acordo com a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Allevato; Onuchic, 2021). Embora tenham sido aplicados três problemas (Julio, 2023), devido a limitação de páginas, este artigo traz os resultados da análise de um deles. A análise possibilitou respondermos ao seguinte objetivo: identificar se o uso de problemas envolvendo contraexemplos, abordados segundo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos do 7º. Ano do Ensino Fundamental. A partir da análise das resoluções (gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas) do problema realizadas por duas duplas de alunos, procuramos destacar os processos de raciocínio matemático mobilizados por eles durante a resolução, de acordo com a categorização apresentada por Jeannotte e Kieran (2017).

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E SEUS PROCESSOS

Há um consenso a respeito da importância de trabalhar com o raciocínio matemático apontado por autores como Jeannotte e Kieran (2017) e Lannin, Ellis e Elliot (2011), mas é preciso aprofundamento e estudo para compreendê-lo e saber como desenvolvê-lo em sala de aula. Diante disso, podemos questionar: o que é o raciocínio matemático? Ao pesquisar sobre o raciocínio matemático, é possível encontrar várias visões sobre a questão que permeia a comunidade matemática. Para Jeannotte e Kieran (2017, p.7), o raciocínio matemático "é um processo de comunicação com os outros que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos". Já Carneiro, Araman e Serrazina (2020, p. 36) indicam "[...] que o raciocínio matemático consiste em produzir um enunciado matemático a partir de outros que são assumidos como verdadeiros".

Para Brodie (2010, p. 7), raciocinar é "convencer os outros ou a nós mesmos de uma determinada afirmação; para resolver um problema". Quando raciocinamos, desenvolvemos linhas de pensamento ou argumentação que podem servir a vários propósitos. Raciocinar vai muito além de uma aceitação, é argumentar acerca de questões entendidas como verdadeiras, desencadeando questionamentos e aprendizagens.

Embora os autores apresentem definições distintas, todas elas estão assentadas no entendimento de que raciocinar matematicamente requer construir novos conhecimentos a partir de outros que já possui. Dessa forma, tomamos, nessa pesquisa, a definição de Jeannotte e Kieran (2017), que diz que o raciocínio matemático é um processo de comunicação com os outros e consigo mesmo, que permite inferir, justificadamente, enunciados matemáticos a partir de outros. Diante disso, uma questão relevante merece atenção: como saber se os alunos raciocinaram matematicamente? Para responder a ela, apoiamo-nos em estudos realizados por Jeannotte e Kieran (2017), nos quais, a partir de uma compilação de várias outras pesquisas, elaboraram um quadro analítico para o raciocínio matemático apoiado nos seus processos. Jeannotte e Kieran (2017, p. 9), em seu modelo de raciocínio matemático, conceituam os processos de raciocínio matemático "como processos cognitivos que são meta-discursivos, ou seja, que derivam narrativas sobre objetos ou relações, explorando as relações entre objetos". Elas definem nove processos de raciocínio matemático: cinco deles relacionados à busca por semelhanças e diferenças, que são os processos de generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar, três relacionados à validação (justificar, provar e provar formalmente) e o processo de exemplificar, que dá suporte e apoio aos demais processos, inferindo exemplos que auxiliam na busca por semelhanças, diferenças e validação.

As definições dos processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças encontram-se no Quadro 1, a seguir:

Quadro 1 - Processos relacionados à busca por semelhanças e diferenças.

PROCESSOS	CONCEITOS
Generalizar	Processo, que, pela busca por semelhanças e diferenças, infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto de um subconjunto deste conjunto.
Conjecturar	Processo de raciocínio matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico provável ou muito provável e que tem o potencial para a teorização matemática.
Identificar um padrão	Processo que, pela busca por semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.
Comparar	Processo que infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas.
Classificar	Processo que infere, pela busca de semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos, uma narrativa sobre uma classe de objetos com base na matemática propriedades físicas e definições.

Fonte: Julio (2023), baseada nas definições de Jeannotte e Kieran (2017).

Já as definições dos processos relacionados à validação (provar, provar formalmente e justificar) encontram-se no Quadro 2.

Quadro 2 - Processos relacionados à validação.

PROCESSOS	DEFINIÇÕES
Provar	Um processo de raciocínio matemático que, ao pesquisar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira. Este processo é restringido por: i) Narrativas que são aceitas pela comunidade de classe (conjunto de narrativas aceitas) que são verdadeiras (do ponto de vista do matemático especialista) e disponíveis sem justificativa adicional. ii) Uma reestruturação final de natureza dedutiva. iii) As realizações que são adequadas e conhecidas, ou acessível, para a classe.
Provar formalmente	Um processo de raciocínio matemático que, ao procurar dados, garantia e apoio, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável a verdadeira. Este processo é restringido por: i) Narrativas que são aceitas pela comunidade de classe (conjunto de narrativas aceitas que são verdadeiras (do ponto de vista do matemático especialista) e sistematizadas em uma teoria matemática. ii) Uma reestruturação dedutiva final. iii) Realizações que são formalizadas e aceitas pela classe matemática e comunidade.
Justificar	Um processo de raciocínio matemático que, ao pesquisar dados, garantia e apoio, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa.

Fonte: Julio (2023), baseada nas definições de Jeannotte e Kieran (2017).

Por sua vez, Lannin, Ellis e Elliot (2011) estabelecem nove entendimentos essenciais sobre o raciocínio matemático organizados em três aspectos interrelacionados: conjecturar e generalizar, investigar o porquê e justificar e refutar. Os aspectos são definidos no Quadro 3.

VIDYA, v. 45, n. 2, p. 1-21,
jul./dez. - Santa Maria, 2025.

Quadro 3 - Entendimentos essenciais do raciocínio matemático.

ASPECTOS DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO	ENTENDIMENTOS ESSENCIAIS
Conjeturar e generalizar	1º) Conjecturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras.
	2º) Generalizar envolve identificar semelhanças entre os casos ou estender o raciocínio além do intervalo em que se originou.
	3º) Generalizar envolve identificar a aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante.
	4º) Conjecturar e generalizar envolvem o uso e o esclarecimento do significado de termos, símbolos e representações.
Investigar o porquê	5º) O raciocínio matemático envolve a investigação de vários fatores potenciais que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa.
Justificar e refutar	6º) Uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas.
	7º) Uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa.
	8º) Justificar e refutar envolve avaliar a validade dos argumentos.
	9º) Uma justificativa matemática válida para uma afirmação geral não é um argumento baseado em autoridade, percepção, consenso popular ou exemplos.

Fonte: Julio (2023), baseada nas definições de Lannin, Ellis e Elliot (2011).

Os aspectos do raciocínio matemático evidenciados no Quadro 3 (conjecturar e generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar) ajudam os alunos a compreenderem a essência da matemática e os prepara para a sua futura educação matemática, portanto é necessário que eles sejam desenvolvidos desde os primeiros anos de escolarização (Lannin; Ellis; Elliot, 2011, p. 54). O desenvolvimento do raciocínio matemático, por meio da mobilização de seus processos por parte do aluno, constitui uma capacidade relevante para a aprendizagem matemática, e consideramos que, "só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte do aluno" (Ponte *et al*. 2012, p. 356).

Além disso, "para desenvolver esta capacidade é preciso trabalhar em tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro lado, estimulam o raciocínio" (Ponte *et al*. 2012, p. 356), como é o caso do problema proposto que se relaciona com o sétimo entendimento essencial do raciocínio matemático, conforme consta no Quadro 3.

A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (MEAAMaRP)

Um problema matemático, para Van de Walle (2009), é definido como "qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de solução" (Van De Walle, 2009, p. 57). Apesar de ser pouco utilizado pelos professores, os contraexemplos podem ser entendidos como problemas, pois, por meio deles, os alunos devem pensar a situação matemática e apresentar uma justificativa, com base em conhecimentos prévios. Tal ideia de problema foi considerada na presente pesquisa.

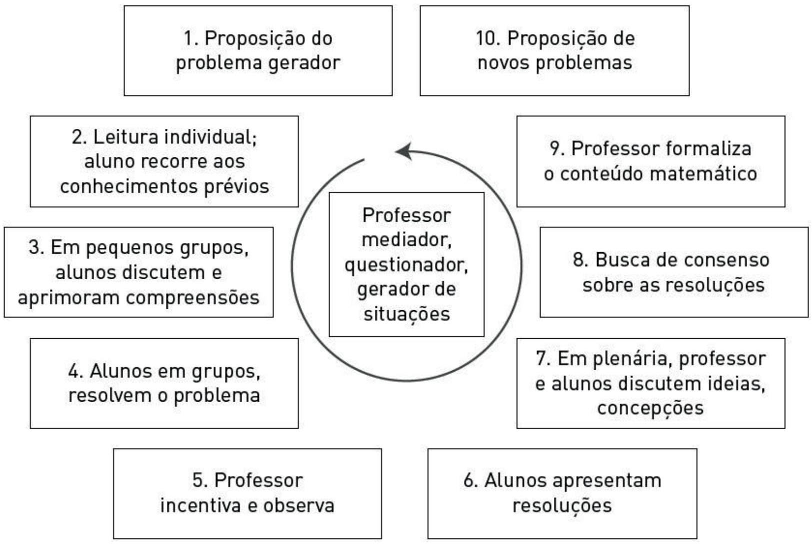
Outro aspecto a ser considerado é a forma de desenvolver os problemas com os alunos e, pensando nisso, optamos pela MEAAMaRP. O uso da palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação

"[...] tem por objetivo expressar uma concepção, em que o ensino, a aprendizagem e avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador" (Allevato; Onuchic, 2021, p. 47).

O ponto de partida da MEAAMaRP é a seleção ou elaboração do chamado problema gerador, "[...] pois visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento" (Allevato; Onuchic, 2021, p. 49). Assim, ao considerarmos a definição de problema gerador e de contraexemplos, entendemos que este último pode ser um problema gerador, pois o professor ao partir dos conhecimentos prévios de seus alunos e, sem apresentar o conteúdo matemático em sala de aula, pode fazer uso de um contraexemplo para construir conhecimento sobre o conteúdo planejado por ele para aquela aula.

Além disso, "[...] a resolução de problemas tem sido a força propulsora para construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes e importantes problemas" (Allevato; Onuchic, 2021, p. 37). Com vistas a auxiliar o trabalho dos professores em sala de aula, as autoras oferecem um roteiro em dez etapas com sugestões para que os professores utilizem a MEAAMaRP, conforme a Figura 1:

Figura 1 - Síntese das dez etapas para desenvolver a MEAAMaRP.



Fonte: Allevato e Onuchic (2021).

A MEAAMaRP ocorre em um "processo espiral, possibilitando que o professor resgate conhecimentos prévios dos alunos, com participação ativa dos mesmos" (Justulin, 2014, p. 65). Na presente pesquisa, os problemas foram trabalhados de acordo com as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021). É de se destacar que a escolha pelo referido problema (Figura 2) se deu pelo fato dele possibilitar que os alunos busquem um exemplo que refute a afirmação feita no problema. Este é um aspecto relevante do raciocínio matemático e pouco trabalhado na educação básica, que parte da ideia de que "uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa" (Lannin; Ellis e Elliot, 2011, p. 41), ou seja, basta o aluno encontrar um único exemplo que não satisfaça a afirmação dada para que ela seja refutada. Na busca por uma solução para o problema, o aluno mobiliza diversos processos de raciocínio matemático e diversos conhecimentos que já possui, além de desenvolver novos.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa qualitativa e interpretativa (Bogdan; Biklen,1994) que está inserida em um projeto amplo intitulado “Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática” (aprovado pelo comitê de Ética sob o parecer nº 5.161.835) - desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - PPGMAT, *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

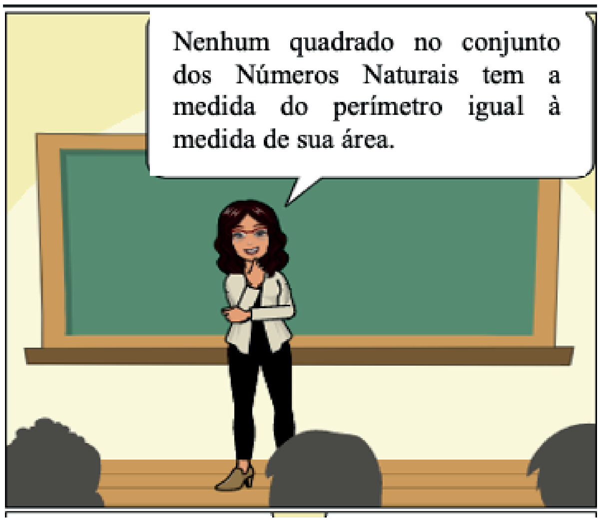
A coleta de dados aconteceu no 2.º semestre de 2022, em uma escola privada na cidade de Maringá, Paraná, em uma turma de 7.º Ano do Ensino Fundamental composta por 22 alunos. Os participantes foram organizados em trios e o registro dos dados se deu por meio da gravação de áudios e das resoluções escritas realizadas pelos alunos.

Lembramos que os problemas foram selecionados e adaptados, tendo em consideração o sétimo entendimento essencial proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 41) ‘‘uma refutação matemática envolve demonstrar que uma afirmação particular é falsa”. Além desse aspecto, outros estão envolvidos na resolução do referido problema. O aspecto de raciocínio matemático “Investigar o porquê” é pontuado por Lannin, Ellis e Elliot, (2011) como um entendimento essencial do raciocínio matemático que envolve a investigação de vários fatores potenciais, que podem explicar por que uma generalização é verdadeira ou falsa. “Investigar o porquê envolve dar atenção a características particulares que fornecem insights sobre relacionamentos que podem explicar se uma generalização é verdadeira ou falsa” (Lannin, Ellis, Elliot, 2011, p. 30).

Outro aspecto do raciocínio matemático que faz parte dos entendimentos essenciais é o “Justificar e Refutar”. Esses processos são considerados “[...] partes desafiadoras da matemática, porque muitas vezes recebemos regras na escola sem que nos sejam oferecidas oportunidades de raciocinar sobre elas” (Lannin, Ellis, Elliot, 2011, p.41). Um problema matemático que desafia o aluno gera novos conhecimentos e possibilita desenvolver processos de raciocínio matemático como a justificação. Quando um aluno refuta uma afirmação particular, significa que ele identificou argumentos que vão justificar o porquê de algumas declarações serem falsas, o que aponta que uma refutação matemática envolve demonstração e justificativas que venham a validar uma declaração.

Além desses aspectos, foram considerados os objetos de aprendizagem e as habilidades da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018), conforme consta na Figura 2:

Figura 2 - Problema 1.



A afirmação da professora está correta?
Por quê? Você consegue utilizar
contraexemplos para verificar a afirmação?

Fonte: Adaptado de Mathias e Gontijo (2021).

O problema 1 (Figura 2) tinha, como objetivo, trabalhar com área e perímetro de figuras planas. O aluno analisa a afirmação, não é um exercício de cálculo de área e perímetro, mas um problema que envolve estratégias de resoluções. Logo, o problema exige, do aluno, exemplificações. Ele aborda a habilidade da BNCC (EF06MA29): analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área (Brasil, 2018).

A aplicação do problema seguiu a MEAAMaRP, de acordo com as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021). Em um primeiro momento, foi entregue o problema 1 (Figura 2) e propusemos que os alunos fizessem a leitura e iniciassem a resolução do problema. Nesse momento, tiveram início as gravações de áudios. Os alunos, nos pequenos grupos, discutiram o problema e tentaram resolvê-lo, enquanto a professora circulava pela sala, observando-os e incentivando-os.

Após a etapa de resolução dos grupos, iniciamos as apresentações dos resultados e o momento da plenária. Os alunos foram convidados a expor suas resoluções na lousa, independentemente de estarem corretas ou não, indicando as resoluções e as justificativas encontradas pelo grupo. Após a plenária, chegamos a um consenso quanto ao problema proposto, e, em seguida, ocorreu a formalização do conceito proposto em cada problema, a fim de sanar as dúvidas que surgiram no decorrer da plenária. Esclarecemos que a resolução do problema se deu durante as atividades usuais de sala de aula, em duas aulas de cinquenta minutos.

Depois da aplicação do problema e obtenção dos áudios, o material foi organizado. O primeiro movimento foi ouvir os áudios e separar os audíveis. Em seguida, transcrevemos as discussões realizadas pelos alunos, bem como as estratégias de resoluções e os processos de raciocínio mobilizados por eles. A transcrição foi realizada na íntegra, mantendo o anonimato dos alunos. Optamos por chamá-los de alunos A1, A2, A3 e, assim, por diante. As falas foram organizadas em trechos e identificadas entre colchetes. Por exemplo: em [1,2], o trecho referido é o de número 1, já a fala correspondente seria a número 2, respectivamente, em um esquema *[trecho, fala]*.

A escolha dos grupos apresentados se deve à qualidade do áudio e a quantidade de interação entre os alunos enquanto desenvolviam estratégias de resolução do problema. Os dados foram analisados de acordo com a categorização proposta por Jeannotte e Kieran (2017), organizada nos Quadros 1 e 2. Para este artigo, consideramos apenas os áudios e as resoluções realizadas na etapa da resolução em grupos.

RESULTADOS

O grupo 1 era formado pelos alunos A1, A2 e A3 e o grupo 2, por alunos A4, A5 e A6. Apresentamos trechos da discussão realizada pelos grupos durante a resolução do problema 1, conforme segue.

PROBLEMA 1 - GRUPO 1

Neste primeiro momento, observamos que os alunos iniciam a leitura do problema para buscar um entendimento da afirmação proposta no problema da Figura 2 e que uma única leitura não foi suficiente para interpretação e entendimento do problema proposto. Não há indícios de processos de raciocínio matemático, apenas uma organização.

TRECHO 1

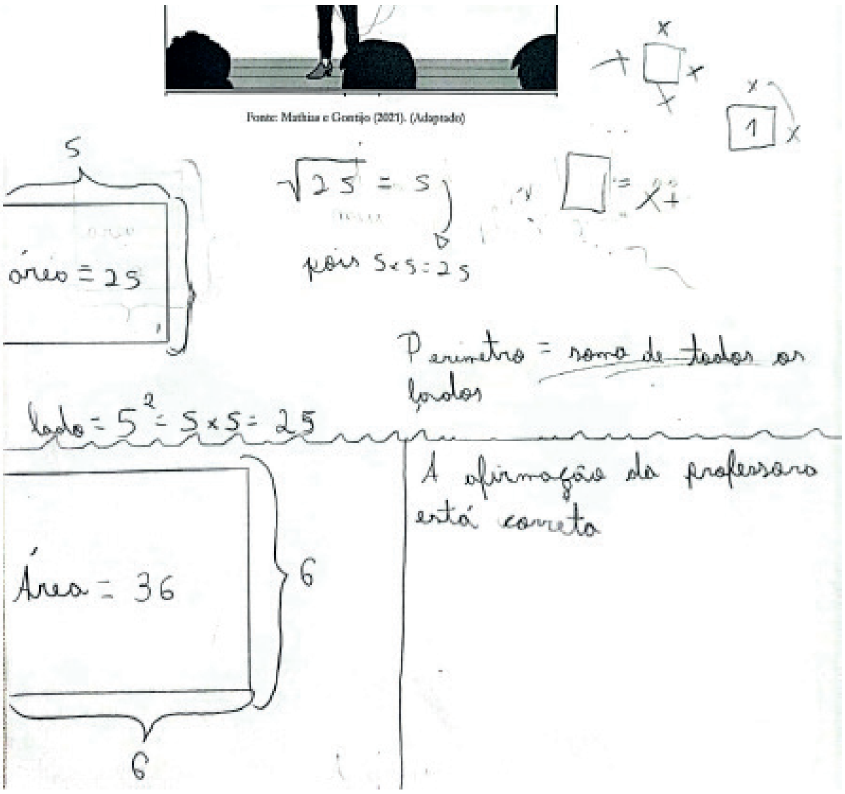
O aluno A1 inicia a resolução, chamando atenção dos colegas ao dizer:

> *[1.1] Aluno A1: Vamos começar, estou fazendo desenhos, (mostrando os desenhos, Figura 3).*
> *[1.2] Aluno A1: Mas vamos analisar o que você colocou aqui. Como você colocou aqui a gente pode supor o $x + x + x + x$, tem quatro x aqui, e que cada x equivale a 1. (Aluno A 1 referindo-se à resolução do aluno A2 Figura 4).*
> *[1.3] Aluno A1: Mas a gente tem que descobrir o perímetro, o perímetro nada mais nada menos, entretanto é a soma de todos os lados do quadrado.*
> *[1.4] Aluno A1: Então pensa o x equivale a 1, tem quatro lados, então $x + x + x + x$ vai dar 1. Mas $1 + 1 + 1 + 1 = 4$*
> *[1.5] Aluno A2: Bugou um pouquinho (risos).*
> *[1.6] Aluno A1: Só que aqui está dizendo que nenhum quadrado tem perímetro igual a sua área, é possível?*

Neste primeiro momento, os alunos A1 e A2 começam a interagir a fim de descobrir o que fazer para verificar a afirmação proposta no problema 1, enquanto o aluno A3 observa e faz anotações na folha individual. A1 faz desenhos de retângulos, mas fica evidente que é um esboço para exemplificar sua estratégia de resolução, pois ele indica os lados dos quadrados como iguais na Figura 3. São desenhados dois quadrados: um de lado 5 cm e outro de lado 6 cm. Os alunos elaboram, assim, a primeira conjectura da discussão, baseada na propriedade de figuras planas de que um quadrado possui todos os lados iguais. Mais estratégias são apresentadas. A1 continua sua estratégia de resolução, apresentando conhecimentos prévios de algumas operações matemáticas como: potenciação, multiplicação e radiciação. Ele as utiliza para exemplificar sua estratégia de resolução, como mostra a Figura 3, enquanto os alunos A2 e A3 observam a sua estratégia de resolução.

Ao calcular a área do quadrado, o aluno A1 recorre à potenciação, mostrando conhecimentos sobre a operação, pois ele, ao exemplificar, chama a base de “cinco”, que é equivalente ao lado, e o expoente de “dois”, para justificar que são lados iguais. Ele mostra saber que utilizar a operação da potenciação em um quadrado é equivalente a realizar a multiplicação dos lados por serem iguais. A1 continua sua estratégia de resolução, justificando seu raciocínio sobre área ao utilizar a operação da radiciação, ou seja, a raiz quadrada para justificar o cálculo de potenciação realizada. O aluno aponta que *lado x lado* equivale a *(lado)*^{2}, e que a raiz quadrada é a operação inversa da radiciação, evidente quando ele extrai a raiz quadrada de 25 em um dos exemplos apresentados para justificar a resolução. É importante salientar que o aluno A1 indicou a área dentro do quadrado e demonstrou saber diferenciar área de perímetro, conforme a Figura 3.

Figura 3 - Resolução apresentada pelo aluno A1 ao resolver o problema 1.



Fonte: Acervo da pesquisa.

A1, utilizando de conhecimentos prévios de matemática, apresentou processos de raciocínio matemático válidos, como a conjectura, a exemplificação e a justificação. Ele comparou as áreas encontradas para aceitar a afirmação da professora no problema 1. Embora a justificação seja válida para os exemplos dados por ele, não podem ser considerados um processo de generalização válido, considerando os poucos elementos apresentados, mas que poderia ser um processo válido se ele

VIDYA, v. 45, n. 2, p. 1-21,
jul./dez. - Santa Maria, 2025.

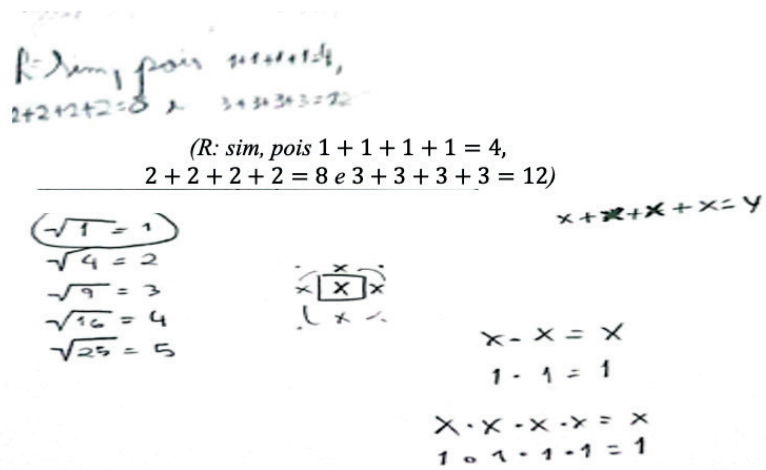
continuasse suas exemplificações. No entanto, o aluno A1 abandona sua estratégia de resolução e passa a analisar as resoluções do aluno A2. Ao abandonar o processo de exemplificação, o aluno A1, em [1.2], opta pela resolução do aluno A2, como mostram as falas transcritas.

A1 analisa a estratégia de resolução do aluno A2 em [1.2], [1.3] e [1.4], em que A2 atribuiu os lados de um quadrado a uma variável x, indicando que o x representa um número qualquer, mesmo não tendo conhecimento de álgebra, pois, quando foram aplicadas as tarefas em sala de aula, o conceito de álgebra não havia sido apresentado formalmente aos alunos. O aluno A2 elabora uma conjectura ao propor , baseado na adição dos lados, ou seja, no perímetro do quadrado. A elaboração em questão indica que o aluno conjectura por meio da comparação entre os termos, mesmo não conhecendo os conceitos de álgebra formalmente.

Em contrapartida, quando o aluno A1 recorre ao processo de justificação, faz uma confusão ao dizer que, se $x = 1$, logo $x + x + x + x = 1$, uma conjectura errada. Para Lannin, Ellis e Elliot (2011), embora desejemos conjecturas corretas, as incorretas geralmente contêm alguma forma de raciocínio válido que pode levar ao desenvolvimento de afirmações válidas. A confusão é percebida logo em seguida ao substituir a variável x por 1 e adicionar $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, surgindo uma dúvida quanto à justificativa apresentada pelo aluno A2, que parece não saber justificar o exemplo colocado no problema (1). Um desafio é lançado na fala do aluno A1 em [1.6], o que sugere que ele conhece a definição de área e perímetro e suas diferenças.

O aluno A2, diferentemente do aluno A1, inicia a resolução por meio da radiciação, o que indica que ele sabe que a raiz quadrada de um número é ele mesmo ao quadrado. Ele expressa seu raciocínio matemático com exemplos numéricos e recorre aos conhecimentos prévios de radiciação. A2 calcula a raiz quadrada de alguns números de raiz exata e, em seguida, desenha um quadrado e chama os lados de x. Ele mostra uma noção de conhecimentos algébricos ao chamar o lado do quadrado de x, relacionando o perímetro do quadrado com a adição do valor de cada um de seus quatro lados. O aluno utiliza a mesma notação para calcular a área do quadrado e, assim, demonstra saber a diferença entre área e perímetro. Nessa linha, ao substituir o x por 1, a relação de igualdade se manteve, mas o mesmo não aconteceu com o perímetro, o que causou estranheza ao aluno A1 e fez com que o aluno A2 pensasse, de acordo com a fala [1.5], em um polígono, como mostra a Figura 4.

Figura 4 - Resolução apresentada pelo aluno A2 ao resolver o problema 1.



Fonte: Acervo da pesquisa.

TRECHO 2

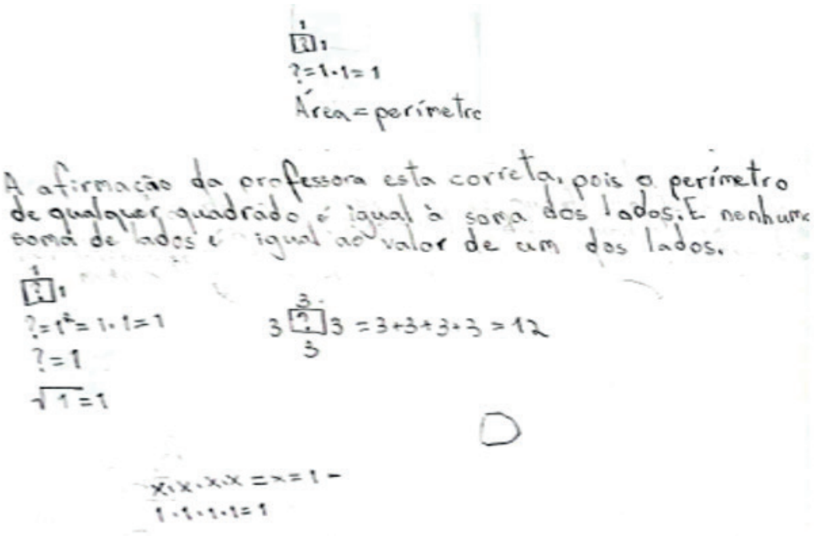
Assim como A1, em [1.6], desafiou os colegas, o aluno A3 que, até então, estava observando as explicações dos colegas, recorreu à exemplificação numérica para definir os conceitos de perímetro e área.

> *[2.1] Aluno A3: Perímetro é igual à soma de todos os lados.*
> *[2.2] Aluno A1: Foi o que eu disse. (risos).*
> *[2.3] Aluno A3: Se é igual à soma de todos os lados, por exemplo: perímetro de um quadrado é igual à 3.*
> *[2.4] Aluno A2: Como assim? Não! A área do quadrado é 9 o lado é 3, então 3 + 3 + 3 + 3.*
> *[2.5] Aluno A3: Sim o lado de um quadrado é 3. Como descobrir o perímetro? Você soma os 4 lados, 3 + 3 + 3 + 3 = 12. O perímetro vai ser 12 a área é 9, o perímetro não vai ser igual a área, o perímetro é maior que a área, a área está dentro do perímetro, o perímetro é maior.*
> *[2.6] Aluno A2: Exemplo, 2 + 2 + 2 + 2 = 8 e se for 1 + 1 + 1 + 1 = 4.*
> *[2.7] Aluno A3: Exato, então a afirmação da professora no problema (1) é verdadeira.*
> *[2.8] Aluno A1: Mas enfim, então a gente descobriu que a afirmação está correta, que nenhum quadrado no conjunto dos números naturais tem perímetro igual a sua área, porque perímetro é a soma de todos os lados, mas pensa poderia ser zero. Não! o zero é vácuo, não tem nada, então afirmação é verdadeira.*

Neste trecho, observamos que o aluno A3, apresenta sua estratégia de resolução por meio da exemplificação numérica. Em [2.5], A3 elabora uma conjectura, concluindo que o “perímetro não vai ser igual a área, pois o perímetro é maior que a área, a área tá dentro do quadrado o perímetro é maior”, com base em conhecimentos matemáticos prévios, relacionando as operações matemáticas, como a adição em [2.5] (Figura 5), e a multiplicação feita ao determinar a área do quadrado de um lado três.

Ademais, o aluno A2 colabora com a exemplificação do aluno A3, citando outros números para determinar o perímetro, mas não apresenta exemplos para área. Em seguida, o aluno A3 confirma o exemplo do aluno A2, avançando para a comparação entre medidas para justificar a afirmação da professora no problema 1 (“Nenhum quadrado no conjunto dos números naturais tem perímetro igual a sua área”). A3, em [2.7], aceita a afirmação mediante os exemplos apresentados, induzindo A1, em [2.8], a aceitá-la também, mesmo questionando o zero. A1 levanta a conjectura do lado valer zero, mas, em seguida, invalida-a por considerar que o “zero é vácuo, que não tem nada”, e que o lado, por medir zero, não mudaria a resposta.

Figura 5 - Resolução apresentada pelo aluno A3 ao resolver o problema 1.



Fonte: Acervo da pesquisa.

TRECHO 3

> *[3.1] Aluno A2: E se a gente pensar na raiz quadrada?*
> *[3.2] Aluno A3: E se a gente parar para pensar em tudo que a gente falou? Pensa na raiz quadrada de 16, a de 15 não é exata, a de 14, não é exata, a de 10 não exata.*
> *[3.3] Aluno A2: Não é melhor fazer igual à que a professora fez, como por exemplo, conta ao quadrado, tipo 2 elevado ao quadrado, tipo isso aqui deixar eu fazer aqui (aluno faz um exemplo) se a raiz quadrada de 16 é 4, a de 4 é 2 é melhor do que fazer a raiz quadrada de 15, 14 eu acho... e demora mais também, se a gente já encontrou a raiz de 16,9, 4 falta ver quanto é 1 elevado ao cubo.*
> *[3.4] Aluno A3: Você quer dizer um elevado ao quadrado (risos).*

Neste trecho, os alunos passam a questionar as justificativas apresentadas por eles durante a resolução do problema e, a partir disso, começam a surgir novas conjecturas. Em [3.3], A2 conjectura ao sugerir que é melhor calcular “2 elevado ao quadrado”, referindo-se à operação de potenciação, e exemplifica a ideia ao calcular a raiz quadrada de 16 e de 4. Ainda em [3.3], A2 sugere realizar os cálculos das raízes exatas, demonstrando que a raiz de 16 equivale a 4 e que a raiz de 4 resulta em 2. A partir da sugestão, concluiu-se que seria melhor utilizar a potenciação de números exatos ao se referir a operações ao quadrado, afinal o aluno considerou as raízes já conhecidas, citando a resolução que a professora propôs, como sugerido em [3.3] pelo aluno A2, para a elaboração de possíveis respostas. A2 aconselha resoluções por meio de potenciação e raiz quadrada, por ser uma operação cuja solução o grupo já estava familiarizado, uma vez que resolver a raiz quadrada de 14 e 15 iria demorar mais por conta de serem raízes não exatas. Ademais, também levaram em conta que a solução precisaria estar no conjunto dos números naturais. Embora os alunos tentem justificar que a raiz quadrada pode resolver a tarefa, não conseguem validar a conjectura formulada levantada.

TRECHO 4

[4.1] Professora: E aí pessoal compreenderam o problema?
[4.2] Aluno A3: Sim, estamos explicando para o aluno A1.
[4.3] Aluno A3: Quanto é 1 ao quadrado? Quanto é ? (se referindo ao aluno A1)
[4.4] Aluno A1: Um.
[4.5] Aluno A2: O que o exercício está pedindo?
[4.6] Aluno A3: O perímetro é igual a área, existe algum número?
[4.7] Aluno A2: Se $x = 1$ então $1.1 = 1$.
[4.8] Aluno A1: Quer dizer que o perímetro do quadrado vezes o perímetro tem que dar a área? Só tem um número que vezes os quatro perímetros vão dar ele mesmo no caso o 1 a afirmação está errada.
[4.9] Aluno A3: A afirmação está errada porque existe um número, pois 1 ao quadrado da 1 que é a área, se o perímetro for 1. Eu achava que a minha anotação estava errada agora eu acho que está certa.
[4.10] Aluno A2: Quatro cantos ou quatro lados?
[4.11] Professora: Vou fazer uma pergunta para vocês. O que é o perímetro?
[4.12] Aluno A2: São os lados, eu não sabia tive dúvidas, perguntei no começo para a professora.
[4.13] Professora: Sim, são os lados? Ou é a soma dos quatro lados?
[4.14] Alunos A1, A2 e A3: Os quatro lados. Vamos arrumar a resposta.
[4.15] Professora: Ok.

No trecho, a professora acompanha o diálogo entre os alunos e observa que, mesmo ao afirmarem que estava tudo bem e que não haviam dúvidas, as conversas entre eles denunciavam o contrário. Nesse contexto, a professora sentiu necessidade de fazer intervenções, aproveitando o momento em que o aluno A2, em [4.10], questionava-se em voz alta: “quatro cantos ou quatro lados?”.

Questionando o grupo ao perguntar, em [4.11], o que é perímetro, a professora intromete-se, encorajando os alunos a refletirem sobre o que seriam lado e perímetro. Em seguida, a professora faz, novamente, uma intervenção quando o aluno A2, em [4.12], afirma que o perímetro corresponde ao que são os lados, e a professora questiona se “são os lados ou a soma dos quatro lados”. Por meio da intervenção, foi possível auxiliar os alunos e, em seguida, validar a resposta correta em [4.15].

TRECHO 5

[5.1] Professora: Quantos lados tem um quadrado?
[5.2] Todos os alunos respondem: Quatro!
[5.3] Aluno A2: 1x1=1 é a área do quadrado.
[5.4] Professora: Qual é o perímetro desse quadrado?
[5.5] Aluno A2: Então está correta a afirmação porque se for $1 \times 1 = 1$ e $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ não é igual.
[5.6] Aluno A1: Porque o perímetro é a soma dos lados e não o lado. (confirmando a resposta do colega).
[5.7] Professora: Vocês conseguiram encontrar mais resultados?
[5.8] Alunos A1, A2 e A3: Não.

Neste trecho, a professora continua a intervenção ao questionar os alunos em [5.1], de forma que conduz o grupo para a justificação que recorre a um exemplo numérico, como mostra a transcrição da fala de A2 em [5.2], o que resulta na elaboração de uma conjectura a partir da multiplicação de dois números iguais como a área de um quadrado. Em [5.4], a professora questiona os alunos e pergunta: “Qual é o perímetro desse quadrado?”, referindo-se ao quadrado de lado equivalente a 1 que o aluno A2 propôs. Em sequência, A2 se manifesta antes dos outros alunos e em [5.5] concorda com a afirmação da professora no problema 1. A2 justifica o raciocínio por meio do exemplo numérico de que a área é diferente do perímetro, afinal a área corresponde a 1 e o perímetro, a 4, como indica a transcrição da fala em [5.5]. O aluno A1 confirma a justificativa do aluno A2 na fala [5.6], afirmando que o perímetro é a soma de todos os lados e não o lado.

PROBLEMA 1 - GRUPO 2

TRECHO 1

No momento apresentado abaixo, o aluno A4 inicia a resolução, chamando a atenção dos colegas:

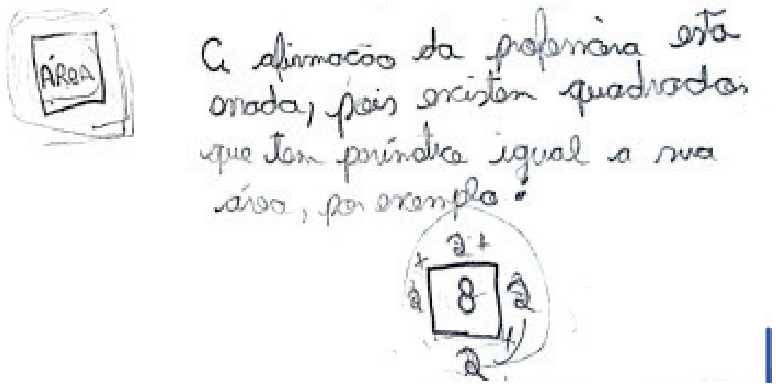
> *[1.1] Aluno A4: Eu só pensei, uma noção não tenho certeza ainda, mas associe o perímetro com os lados de um quadrado. Aí pensei assim, aqui tá falando nenhum, então nenhum é nada, nenhum vai poder fazer o valor da área. Daí desenhei um quadrado, Figura 6. Daí desenhei um quadrado, escrevi a área e esses riscos que só eu entendo são como se fosse o perímetro que são os quatro lados do quadrado. Depois pensei assim; ali tá falando nenhum, então é nada não dá para formar nada no conjunto dos números naturais. Vocês lembram o que são os conjuntos dos números naturais?*
> *[1.2] Aluno A5: Mais ou menos (risos).*
> *[1.3] Aluno A4: Então fala o que vocês lembram (risos)*
> *[1.4] Aluno A5: Ah, nada (risos).*
> *[1.5] Aluna A4: Eu associei os números naturais ao zero, um, dois, três...*
> *[1.6] Aluna A5: Agora lembrei!*

Em suma, observa-se que os alunos conversaram sobre a resolução do problema, e o aluno A4 elaborou uma conjectura em [1.1], ao associar o perímetro com os lados do quadrado e utilizar o desenho de uma figura plana (no caso, um quadrado) para demonstrar seu raciocínio sobre a afirmação proposta no problema 1, conforme a Figura 6 apresenta. O próprio aluno se questionou sobre a chance de não ser “possível formar nada”, mas abandonou a ideia e iniciou uma discussão com os outros alunos. Assim, A4 pergunta para os outros alunos, A5 e A6, se eles se lembram do que seriam os “conjuntos numéricos naturais”, mas obtém respostas incertas. O aluno A5 diz que “mais ou menos”, mas não consegue justificar-se. Já o aluno A4, em [1.5], apenas informa que associou os números naturais a números como zero, um e dois.

TRECHO 2

[2.1] Aluna A4: Aí eu pensei assim, são quatro lados, não sei por que eu pensei no 2, depois do 1 foi o que pensei. Daí coloquei, 2,2,2 e 2 (mostrando a Figura 6). Daí eu fiz assim $2 + 2 + 2 + 2 = 8$ ou seja a área vai ser oito, cheguei à conclusão de que esta afirmação está errada porque esse quadrado aqui é um exemplo, (Figura 6).

Figura 6 - Resolução apresentada pelo aluno A4 ao resolver o problema 1.



Fonte: Acervo da pesquisa.

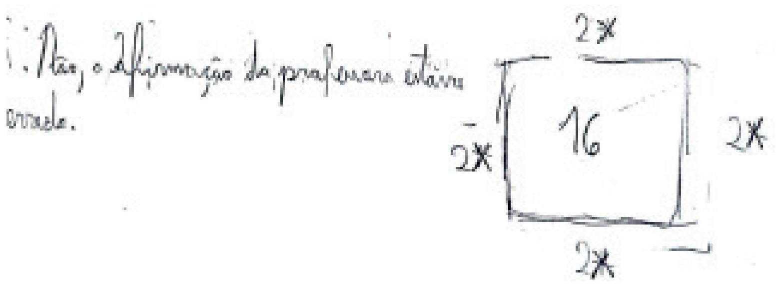
O Aluno A4 explicou que associou os números naturais ao "zero, um, dois…" e elaborou outra conjectura ao associar os números naturais com o zero e os números positivos. Em seguida, recorreu a um exemplo com um número, cuja seleção foi aleatória. Em [2.1], A4 apresentou um bom exemplo no qual realiza a adição 2+2+2+2=8, mas se engana ao dizer que o cálculo apresentado é referente à área, quando, na verdade, está determinando o perímetro com a adição dos lados. As discussões continuam, como segue nas transcrições:

> *[2.2] Aluno A4: Dá para fazer assim "duas vezes dois é igual a quatro", e quatro vezes quatro é igual a dezesseis que dá para ser a área também de 16.*
> *[2.3] Aluno A5: Então pensei que estava errado e apaguei, mas eu tinha feito por multiplicação.*
> *[2.4] Aluno A4: o perímetro vai ser o que do quadrado? (perguntando para a aluna A5).*
> *[2.5] Aluno A4: Eu associei o perímetro com o lado do quadrado. Então eu fiz 2 + 2 + 2 + 2 = 8 todos os lados e deu a área. (Figura 8)*
> *[2.6] Aluno A5: Então eu pensei logo no 2 por ser mais fácil, só que ao invés de somar eu multipliquei 2 x 2 x 2 x 2 = 16 (Figura 7).*
> *[2.7] Aluno A6: Eu pensei no 4, somei e deu 16. (Figura 8)*
> *[2.8] Aluno A4: A afirmação está errada pois encontramos três exemplos diferentes.*

Neste trecho, os alunos conversam sobre a resolução do problema. Na fala do aluno A5, também foi elaborada uma conjectura a partir do uso da multiplicação com a justificativa de julgá-la como mais fácil, mas o aluno comete um equívoco ao calcular a área utilizando os quatro lados, como apresentado na transcrição em [2.3]. Ainda, neste trecho, o aluno A6 afirma que se restringiu a uma soma que resultou em 16, conforme [2.7], entretanto não explicou seus cálculos.

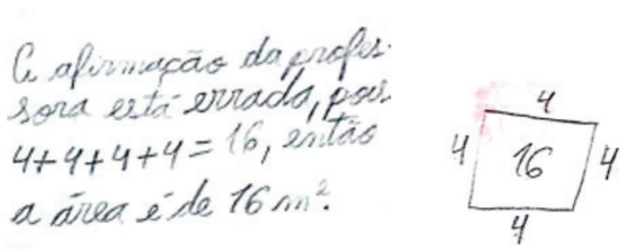
Por fim, eles associaram resultados diferentes aos exemplos apresentados e, por isso, A4 aponta que a professora está errada em sua afirmação. Os alunos não conseguiram validar os exemplos que apresentaram, mas conseguiram mobilizar processos de raciocínio matemático como conjecturar, exemplificar e comparar.

Figura 7 - Resolução apresentada pelo aluno A5 ao resolver o problema 1.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 8 - Resolução apresentada pelo aluno A6 ao resolver o problema 1.



Fonte: Acervo da pesquisa.

DISCUSSÃO

Ao trabalhar com contraexemplos, de acordo com o sétimo entendimento essencial, proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011) e que consta no Quadro 3, foi possível identificar indícios de processos de raciocínio matemático como sugere o modelo de Jeannotte e Kieran (2017). Os alunos elaboraram conjecturas ao estabelecerem estratégias de resolução para o problema. De acordo com Araman e Serrazina (2020), ao elaborarem uma estratégia de resolução, os alunos necessitam de mais elementos matemáticos para justificar se aquela estratégia elaborada por eles é válida ou não. Tais conjecturas, à medida em que foram sendo aprimoradas na tentativa de justificá-las ou não, apoiaram-se em diversos conhecimentos matemáticos, como o de que o quadrado possui todos os lados iguais, que o perímetro é a soma de todos os lados, que a área de um quadrado corresponde a multiplicação dos seus lados entre si, que raiz quadrada é operação inversa da potenciação, entre outros.

Tais conjecturas foram foco da intensa atividade matemática dos alunos, evidenciando entendimentos essenciais sobre o raciocínio matemático propostos por Lannin, Ellis e Elliot (2011) relativos à investigação do "porquê" e ao justificar/refutar. Ainda, para apoiar o processo de validação, no caso do problema 1, em que ocorre a refutação da afirmação da professora, os alunos recorreram a outros processos de raciocínio matemático, como comparar e justificar. Para Jeannotte e Kieran (2017), a comparação é um processo de raciocínio matemático que infere, em busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas.

No caso do problema 1, os alunos recorreram à construção de quadrados com diferentes medidas e calcularam o perímetro e a área deles, num processo de exemplificação que apoiou a comparação. Para Jeannotte e Kieran (2017), a exemplificação é um processo de raciocínio matemático que dá suporte aos demais. Tais processos foram relevantes para que os alunos refutassem a afirmação da professora no problema 1, como ocorreu quando calcularam a área e o perímetro de um quadrado de lado 3 e observaram que, neste caso, a área era menor que o perímetro, ou quando calcularam a área e o perímetro de um quadrado de lado 4, e concluíram que a área e o perímetro eram iguais.

Além disso, destacamos que os alunos recorreram ao processo de justificação para refutar a conjectura apresentada pela professora no problema 1. Como apontam Lannin, Ellis e Elliot (2011), quando um aluno refuta uma afirmação particular, significa que ele identificou argumentos que vão justificar o motivo pelo qual algumas declarações serem identificadas como falsas. Em resumo, uma refutação matemática envolve demonstração e justificativas que venham a validar uma declaração.

No caso do problema 1, as justificativas apresentadas pelos alunos foram pautadas nos conhecimentos de que a área de um quadrado é encontrada a partir da medida do seu lado ao quadrado e o perímetro é a soma da medida de todos os seus lados. Para Jeannotte e Kieran (2017) ao justificar, os alunos procuram verdades que permitam alterar o valor epistêmico da narrativa de provável para mais provável ou para falso por meio de dados coletados, sempre tendo em vista os conceitos matemáticos que já são de seu conhecimento.

Por fim, consideramos que os alunos conseguiram refutar a afirmação proposta no problema 1 por meio dos seguintes processos de raciocínio: conjecturar, exemplificar, comparar e justificar (no caso, para refutar). Diante disso, organizamos um quadro síntese (Figura 9) que sintetiza os processos de raciocínio matemático envolvidos durante a resolução do problema 1 pelos dois grupos:

Figura 9 - Processos de raciocínio envolvidos na discussão dos grupos 1 e 2 na resolução do problema 1.

PROCESSOS	PROBLEMA 1
Formular conjecturas	Propriedade das figuras planas: um quadrado possui todos os lados iguais. O perímetro nada mais nada menos é a soma da medida de todos os lados. Área de um quadrado é lado x lado = (lado)^2. Utilizou a álgebra para representar o perímetro, chamando os lados de x + x + x + x Raiz quadrada de um número é ele mesmo ao quadrado. O perímetro não vai ser igual a área. Raiz quadrada é a operação inversa da potenciação. Perímetro é o contorno do quadrado. O conjunto dos números naturais acima do zero infinitamente (0, 1, 2, 3...) O zero é o elemento neutro da adição.
Justificar	Se um quadrado tem lado cinco, a sua área é vinte cinco. Logo a área de um quadrado é l^2. A potenciação é a operação inversa da radiciação $\sqrt{l^2} = l$. pois $\sqrt{25} = 5$, pois 5x5=25 $\sqrt{36} = 6$ pois 6 x 6 = 36 Para um quadrado de lado 3, temos área de 9, pois $3^2 = 9$

Comparar	Um quadrado de lado três, possui perímetro 12 e área 9, logo a área é menor que o perímetro. Podemos chamar o lado de x para representar o lado de um quadrado, assim x + x + x + x = perímetro. Se o lado de um quadrado for um, a área será 1 X 1=1 e o perímetro 1 + 1 + 1 + 1 = 4. $S < P$ O perímetro é maior que a área Se o lado do quadrado for 4, área e o perímetro são iguais. A= 4 x 4= 16 P= 4 + 4 + 4 + 4 = 16, temos: área=perímetro S = P

Fonte: Dados da pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do objetivo maior proposto nesta pesquisa, - o de verificar se o uso de problemas envolvendo contraexemplos pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático de alunos do 7º. Ano do Ensino Fundamental quando abordados segundo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas - destacamos alguns resultados relevantes para as pesquisas em Educação Matemática, direcionadas ao ensino de Matemática no Ensino Fundamental.

Ao trabalhar com contraexemplos, de acordo com o sétimo entendimento essencial, proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011), nossa intenção era que os alunos recorressem aos seus conhecimentos anteriores e mobilizassem diversos processos de raciocínio matemático como os propostos por Jeannotte e Kieran (2017), na tentativa de encontrar um único exemplo que refutasse a afirmação dada no problema. Ou seja, o “problema” a ser resolvido consistia no desafio de encontrar um contraexemplo. Mas esta não era uma tarefa óbvia, já que os alunos tiveram de buscar compreender o enunciado matemático e mobilizar e desenvolver diversos conhecimentos matemáticos. Em consequência desse processo, os alunos desenvolveram seu raciocínio matemático (manifestado por meio dos processos que mobilizaram) e, assim, aprenderam matemática.

Os trechos com a discussão entre os alunos durante a resolução do problema 1 evidenciam que eles elaboraram conjecturas e buscaram alternativas para justificá-las. Lembramos que, de acordo com Araman e Serrazina (2020), ao criar estratégias de resolução de tarefas para os que ainda não sabem como resolver, os alunos fazem conjecturas ao concluir que determinadas estratégias podem conduzir a uma resposta válida.

Na tentativa de refutar a afirmação apresentada no problema 1, os alunos mobilizaram vários processos de raciocínio matemático, apoiados em conceitos matemáticos que já possuíam, conforme apresentamos no quadro da Figura 11. A articulação entre esses processos contribuiu de forma primordial para o sétimo entendimento essencial do raciocínio matemático. Como pontuam Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 43), “em matemática, entretanto, é importante reconhecer que um único contraexemplo pode invalidar a conjectura”.

Os resultados discutidos até aqui evidenciam um dos aspectos que precisam ser considerados para o desenvolvimento do raciocínio matemático, que é o tipo de tarefa matemática que os professores proporcionam aos alunos. A escolha de uma tarefa com potencial para gerar discussão entre os alunos, em que não há uma única forma de resolução, traz elementos profícuos para a aprendizagem matemática. A escolha de problemas não estereotipados que não tenham “um método já estabelecido” propicia, ao aluno, o interesse em dar sentido à resolução. Esta forma de envolver e dar sentido aos problemas vem ao encontro da ideia de que a “resolução de problemas não é uma aplicação da aprendizagem e sim uma orientação para a aprendizagem” (Brasil, 2018, p. 41).

Nessa direção, além de propor uma boa tarefa, um segundo aspecto que deve, também, ser considerado, é a forma como tais tarefas são abordadas em sala de aula. A opção pela MEAAMaRP, que foi o encaminhamento metodológico para se trabalhar com o problema proposto, apoiou o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, pois o professor, ao recorrer às etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2021), concedeu aos alunos a autonomia para encontrarem estratégias para solucionar uma situação não usual, tal qual o problema sugerido. Ainda, o desenvolvimento do trabalho em grupo viabilizou a independência dos alunos ao passo que permitiu que atuassem como sujeitos ativos, o que contribuiu para o desenvolvimento do espírito colaborativo e da autoconfiança.

AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece ao CNPq pelo apoio recebido para a realização da pesquisa.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 40-62.

ANJOS, L. Q.; JULIO, N. M. D.; JUSTULIN, A. M.; ARAMAN, E. M. O. Resolução de problemas: uma abordagem sobre o ensino da potenciação e expressões algébricas nos anos finais do ensino fundamental. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 7, n. 1, p. 1-21, 2022.

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3.º ano de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 118-136, 2020.

ARAMAN, E.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, 2019.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. Dordrecht: Springer, 2010.

CARNEIRO, L. F.; ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Processos do raciocínio matemático mobilizados por estudantes de 6.º ano do Ensino Fundamental ao resolverem uma tarefa de Geometria. **JIEEM**, v. 13, n. 1, p. 35-45, 2020.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 1-16, 2017.

JULIO, N. M. D. **Processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 7.º ano durante a resolução de problemas**. 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/31547.

JUSTULIN, A. M. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas**. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/127631.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOTT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: NCTM, 2011.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **BOLEMA**, v. 32, n. 62, 2018.

MATHIAS, C.; GONTIJO, C. **Educação matemática e criatividade**. [S. l.: s. n.], 2021. 1 vídeo (18 min). Disponível em: https://youtu.be/94qLQQik5MA.

PONTE, J. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Praxis Educativa**, v. 7, n. 2, p. 355-377, 2012.

STYLIANIDES, G. An analytic framework of reasoning-and-proof. **For the Learning of Mathematics**, v. 28, n. 1, p. 9-16, 2008.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Trad. P. H. Colonhese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WOOD, T. Creating classroom interactions for mathematical reasoning: beyond “natural teaching”. In: ABRANTES, P.; PROFÍRIO, J.; BAÍA, M. (Orgs.). **The interactions in the mathematics classroom: proceedings of the CIEAEM 49**. Lisboa: Escola Superior de Educação, 1997. p. 34-43.