VIDYA

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 97-116, jan./jun. - Santa Maria, 2025.

Recebido em: 23.10.2024. Aprovado em: 13.03.2025.
ISSN 2176-4603 | DOI: doi.org/10.37781/vidya.v45i1.5126

TÁ, MAS QUEM É TALES? AÇÕES DE ESTUDO E APRENDIZAGEM DE CONCEITOS RELACIONADOS À SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

OKAY, BUT WHO IS THALES? ACTIONS FOR STUDYNG AND LEARNING CONCEPTS CONCERNING SIMILARITY OF TRIANGLES

VALE, PERO ¿QUIÉN ES TALES? ACCIONES PARA ESTUDIAR Y APRENDER CONCEPTOS SOBRE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULO

BRUNO SILVA SILVESTRE[1]
EVERTON JOSÉ GOLDONI ESTEVAM[2]

RESUMO

O artigo aborda a temática da aprendizagem de conceitos relacionados à geometria e propõe solucionar a questão: quais ações de estudo desenvolvidas pelos estudantes sinalizam aprendizagem Matemática sobre semelhança de triângulos? Conexo à questão, tem-se o objetivo de analisar as ações de estudo desenvolvidas por estudantes do nono ano do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas sobre semelhança de triângulos e suas relações com a aprendizagem dos investigados. Desenvolve-se metodologicamente um Experimento Didático Formativo com doze estudantes do nono ano de uma instituição de ensino da cidade de Goiânia. Os dados produzidos envolvem registros escritos da resolução pelos estudantes de tarefas, que são analisados com base na Teoria Histórico-Cultural. Os resultados demonstram ações relacionadas ao estudo do desenvolvimento histórico do conceito de semelhança, demonstrações das relações métricas no triângulo retângulo e resolução de exercícios que sinalizaram o engajamento dos estudantes ao mobilizarem seus processos de aprendizagem.

Palavras-chave: Semelhança de Triângulos; História da Matemática; Aprendizagem de Conceitos Matemáticos.

ABSTRACT

The article addresses the issue of learning concepts related to geometry and proposes to solve the question: what study actions developed by students indicate mathematical learning about the similarity of triangles? Related to this question, the aim is to analyze the study actions developed by students in the ninth year of elementary school when solving tasks on the similarity of triangles. A formative didactic experiment was carried out with twelve ninth-grade students from an educational institution in the city of Goiânia-Brazil. The data produced involves the students' written records of solving tasks, which are analyzed based on Cultural-Historical Theory. The results show actions related to the study of the historical development of the concept of similarity, demonstrations of metric relations in the right triangle and the resolution of exercises that signaled the students' engagement in mobilizing their learning processes.

Keywords: *Similarity of Triangles; History of Mathematics; Learning Mathematical Concepts.*

RESUMEN

El artículo aborda la cuestión del aprendizaje de conceptos relacionados con la geometría y propone resolver la pregunta: ¿qué acciones de estudio desarrolladas por los alumnos señalan el aprendizaje matemático sobre la se-

1 Doutor em Educação em Ciências e Matemática. Professor da SME Goiânia e Estagiário de Pós-Doutorado na Universidade Estadual do Paraná. Campo Mourão, PR - Brasil. E-mail: brunosilvestre.prof@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3530-3522

2 Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professor Associado da Universidade Estadual do Paraná e do Programa de Pós--Graduação em Educação Matemática. Campo Mourão, PR - Brasil. E-mail: evertonjgestevam@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6433-5289

mejanza de triángulos? En relación con esta cuestión, se pretende analizar las acciones de estudio desarrolladas por alumnos de noveno curso de primaria al resolver tareas sobre la semejanza de triángulos. Se realizó un experimento didáctico formativo con doce alumnos de noveno año de una institución educativa de la ciudad de Goiânia-Brazil. Los datos producidos involucran los registros escritos de los alumnos al resolver tareas, que son analizados con base en la Teoría Histórico-Cultural. Los resultados muestran acciones relacionadas con el estudio del desarrollo histórico del concepto de semejanza, demostraciones de relaciones métricas en el triángulo rectángulo y la resolución de ejercicios que señalaron el compromiso de los alumnos en la movilización de sus procesos de aprendizaje.

Palabras-clave: *Semejanza de triángulos; Historia de las Matemáticas; Aprendizaje de conceptos matemáticos.*

INTRODUÇÃO

Interessados em proporcionar profícuos momentos de estudo com o conhecimento matemático, preocupamo-nos com os processos de aprendizagens dos estudantes do nono ano. Os motivos são diversos, como por exemplo, o futuro muito próximo para o ingresso no Ensino Médio, a carga de estudos sobre os conhecimentos científicos previstos neste último ano do Ensino Fundamental, sobretudo, pelo rápido esquecimento de conteúdos escolares matemáticos basilares, recentemente vistos pelos alunos. Atentamos, ainda, à erradicação de frases comumente presentes em momentos de aula, em que o professor realiza um resgate conceitual, como: “Professor, mas eu não estudei isso!”.

A superficialidade com que os estudantes se envolvem com os estudos na modernidade, cada vez mais digital, a falta de motivação para o estudo, a sobrecarga de trabalho dos professores, tudo isso pode conduzir à má organização do ensino de Matemática e, consequentemente, a uma aprendizagem que não gera desenvolvimento. Os estudantes até se envolvem com os estudos, mas não conseguem, de fato, apropriar-se e incorporar os conhecimentos matemáticos (Oliveira; Chummo, 2015). Como consequência, no contexto de semelhança de triângulos, mesmo estudantes de cursos de graduação em Matemática evidenciam concepções equivocadas sobre os critérios de semelhança, erros na compreensão dos conceitos e na execução dos procedimentos necessários à resolução, bem como dificuldades em interpretar corretamente as situações (Oliveira; Chummo, 2015).

Na busca por superar essa situação, defendemos um ensino que transcenda a racionalidade técnica - que produz somente o conhecimento e pensamento empírico - para um ensino que promova a apropriação efetiva de conceitos matemáticos, extrapolando a condição empírica para o desenvolvimento do pensamento teórico (Davydov, 1982; Davidov; Márkova, 2021).

Nesse sentido, neste trabalho, investigamos a aprendizagem matemática nas ações desenvolvidas por estudantes do nono ano, ao resolverem tarefas de estudo sobre semelhança de triângulos, procurando analisar o que os estudantes sinalizam como indícios da apropriação dos conceitos relacionados à semelhança de triângulos. Desenvolvemos, assim, um Experimento Didático Formativo (EDF) por meio de algumas tarefas, que visaram proporcionar a apropriação de conceitos matemáticos, relacionados à geometria, procurando desvelar os processos relacionados à aprendizagem.

O texto está estruturado em quatro momentos. No primeiro, apresentamos nossa concepção de ensino e de aprendizagem por meio da Atividade, ressaltando os processos de humanização por meio da escolarização, evidenciados nos conceitos relacionados à semelhança de triângulos e o modo como os estudantes podem se apropriar de tais conceitos. No segundo, descrevemos o EDF. Em seguida expomos alguns dados oriundos da produção dos estudantes e apresentamos nossa Unidade de Análise. Por fim, descrevemos algumas considerações.

A ORGANIZAÇÃO DO ENSINO SOBRE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS QUE OBJETIVA A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Com vistas à superação da racionalidade técnica, que abarca conhecimentos puramente experimentais e caracteriza somente o pensamento empírico (Davydov, 1982), defendemos uma educação humanizadora que, em linhas gerais, consiste em “um conjunto de ações pessoais e coletivas para garantir a apropriação da condição humana” (Silvestre, 2022, p. 18). Para além das relações imediatas com o conhecimento, percebemos os agentes dos processos educativos - professor e aluno - como sujeitos capazes de desenvolver o pensamento teórico, nas situações de ensino e de aprendizagem.

Nessas condições, a Atividade de Ensino que objetiva o pensamento teórico na Atividade de Estudo deve reproduzir “[...] o desenvolvimento, o processo formativo do sistema, da integralidade, do concreto e somente dentro desse processo revela[r] as particularidades e conexões dos objetos singulares” (Davydov, 1982, p. 308- 309).

Com base na psicologia histórico-cultural, recorremos à Teoria da Atividade como um meio de apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos ao longo da história da humanidade. Com base em Leontiev (2021), a Teoria da Atividade “tem por objetivo explicar os processos psíquicos na transformação da realidade objetiva em realidade subjetiva por meio da consciência no par dialético realidade objetiva-consciência num processo histórico de transformação” (Silvestre, 2022, p. 61). Assim, advogamos por um processo de escolarização capaz de (re)produzir o movimento lógico-histórico de conceitos com os estudantes de modo que estes compreendam a realidade objetiva de produção do conhecimento e, nas relações dialéticas com a consciência, sejam capazes de refletir, por meio desse movimento, as manifestações de pensamento, sobretudo o pensamento teórico.

Concebemos, ainda, os esforços dos estudantes nos momentos de aprendizagem como Atividade de Estudo, que tem por conteúdo “a assimilação dos modos generalizados de ação na esfera dos conceitos científicos e as mudanças qualitativas no desenvolvimento psíquico [...]” (Davidov; Márkova, 2021, p. 199). Essas condições conferem papel determinante ao professor diante de sua intencionalidade em produzir os modos de generalização. Para isso, este trabalho assume a perspectiva de inter-relacionar três componentes à organização do ensino: a incorporação do *movimento lógico-histórico* dos conceitos, *processos de demonstração* - ou provas que confluam na consistência ou não de determinado comportamento de um objeto matemático - que fomente as formas generalizantes da aprendizagem e *exercícios e/ou problemas* que viabilizam o pensamento teórico dos estudantes em superação à condição do pensamento empírico (Davydov, 1982; Davidov; Márkova, 2021).

Nesse sentido, para produção das tarefas que envolvem os conceitos de semelhança de triângulos, utilizamos referências que abordam sobre a produção do conhecimento matemático na perspectiva de elucidar o movimento lógico-histórico, utilizando-se de quatro referenciais, conforme Quadro 1:

Quadro 1 - Historiografias sobre a semelhança de triângulos.

Autores	Síntese sobre o processo histórico de semelhança de triângulos
Boyer (1996)	Preocupado em caracterizar os indícios históricos da produção de conhecimento matemático, descreve que não há uma precisão sobre como a geometria teve o seu prelúdio, mas destaca que "o desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem" (Boyer, 1996, p. 5). Assim, apresenta os primeiros indícios, formais, da caracterização do que se tem registro sobre semelhança de triângulos com as escolas gregas, visto que nestas estavam presentes diversos estudos sobre a geometria plana como conhecemos atualmente.
Eves (2004)	Em descrição cronológica da produção do conhecimento matemático, atribui à Tales de Mileto o título de "primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas" (Eves, 2004, p. 95), inclusive, aos casos de semelhança de triângulos por meio da velha história em medir a altura de uma pirâmide. Ele acrescenta sua interpretação diante das duas versões que apresenta: "O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide - isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide" (Eves, 2004, p 115).
Karlson (1961)	Com uma linguagem poética, escreve com riqueza de detalhes quando Tales de Mileto resolveu calcular a medida da altura de uma pirâmide por meio da relação de semelhança oportunizada pela projeção das sobras ocasionadas pelos raios solares entre a pirâmide e uma estaca fincada na areia do deserto. Estabelece, dessa forma, os primeiros indícios da semelhança de triângulos viabilizada por Tales de Mileto. "Como se vê facilmente nem sequer é necessário que o sol se encontre na prosição mais favorável. Os dois triângulos que aí se formam são evidentemente semelhantes. Se fizessemos crescer o bastão de Tales, e ao mesmo tempo o aproximássemos da pirâmide, de modo que sua extremidade permanecesse sempre sobre o raio luminoso por nós desenhado - como se este raio fosse um cabo de aço - veríamos que a extremidade da sombra permaneceria sempre fixa ao mesmo ponto. A razão entre o comprimento do bastão e o de sua sombre permaneceria constante, enquanto o sol não mudasse de posição; terá que ser o mesmo, ainda quando o bastão coincidir com a própria pirâmide" (Karlson, 1961, p. 84).
Ribinikov (1987)	Em sua interpretação dialética da produção do conhecimento Matemático, descreve que as relações com os objetos Matemáticos relacionados à geometria apresentam indícios iniciais com os povos babilônicos, egípcios e gregos, destacando que "nesta época os problemas práticos relacionados com a necessidade de cálculos aritméticos, medições e construções geométricas continuaram tendo um papel importante" (Ribnikov, 1987, p. 51). Assim, o surgimento de conceitos geométricos, inclusive de semelhança de triângulos, provavelmente se estabeleceu na necessidade humana de mensurar medidas e aplicá-las às suas construções geométricas.

Fonte: elaborado pelos autores por meio de interpretações fundamentadas nas obras referidas.

Acrescentamos às descrições históricas, do Quadro 1, acerca da produção do conhecimento sobre semelhança de triângulos, com destaque à produção grega personificada, até onde se tem registro, na pessoa de Tales de Mileto. A generalização dos conceitos sobre semelhança caracteriza-se pelas necessidades daquela época em mensurar objetos matemáticos que faziam parte do contexto humano social. "A matemática como ciência é uma das formas da consciência social [...] apesar da conhecida singularidade qualitativa, as leis que regem seu desenvolvimento, fundamentalmente, são generalizantes para todas as formas da consciência social" (Ribnikov, 1987, p 15).

Além de oportunizar aos estudantes o estudo do movimento lógico-histórico dos conceitos, consideramos a importância de realizar com eles os processos de demonstração dos objetos matemáticos presentes no ensino. A demonstração consiste em alguns construtos - axiomas, premissas que perpassam em verdades evidentes ou que se julga como verdade - com os quais "através da argumentação lógica, passo a passo, é possível chegar a uma conclusão. Se os axiomas estiverem corretos e a lógica for impecável, então a conclusão será inegável. Esta conclusão é o teorema" (Singh, 2004, p. 41).

Criar espaços de aprendizagem com os estudantes na resolução de situações pode motivar e criar interesses em sua resolução. Por meio da situação problema "os estudantes aprendem gradualmente a buscar, em primeiro lugar, frente a um problema particular, o princípio geral de solução de problemas semelhantes” (Davidov; Márkova, 2021, p. 204). Nessas condições, os alunos podem desenvolver ações e operações para o desenvolvimento do pensamento teórico (Davidov; Márkova, 2021).

Assim, a organização do ensino permeando o movimento lógico-histórico, os processos de demonstrações e a problematização das ações e operações de estudo determina o que consideramos por *tarefa de estudo*, compondo-se de um “agregado das condições em que um objetivo é definido. Uma tarefa é um objetivo nas condições concretas de sua realização. Por essa razão, qualquer atividade é um processo de resolução de tarefas” (Davidov; Márkova, 2021, p. 226). No próximo tópico, evidenciamos as tarefas de estudo desenvolvidas no EDF.

O EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO (EDF) E A (RE)ORGANIZAÇÃO DOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

“Tá, mas quem é Tales?”. A frase surge no momento em que apresentamos aos estudantes o que seria estudado em geometria naquela e nas próximas aulas do EDF. Entendemos a proposta metodológica como uma “concepção do ensino desenvolvimental e, consequentemente, a sua lógica de organização e estruturação da atividade de estudo dos alunos” (Freitas; Libâneo, 2022, p. 7).

Consonante ao ensino desenvolvimental e à Atividade de ensino e de estudo, o EDF foi realizado ao longo de quinze aulas, em uma escola da cidade de Goiânia (GO), Brasil. Participaram do experimento doze estudantes de uma turma de nono ano, o qual foi conduzido pelo primeiro autor do artigo, que acumulou a função de professor. O EDF contemplou, em linhas gerais, três momentos principais, conforme sintetiza o Quadro 2.

Quadro 2 - Momentos de desenvolvimento do Experimento Didático Formativo.

Problematização	Vivências e experiências com o conhecimento matemático	Resolução de exercícios e/ou problemas em suas interconexões
Início do estudo, apresentação dos objetos do conhecimento (conteúdos) geométricos envolvidos no EDF e proposição de uma situação que estimulasse possíveis soluções.	Desenvolvimento de tarefas de estudo, envolvendo os conceitos sobre semelhança de triângulos e seus desdobramentos por meio de situações coletivas com vistas a favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático.	Exercícios e problemas contextualizadas que colocam os estudantes para o desenvolvimento das ações de pensamento (empírico/teórico) para resolução das diversas situações que exploram diferentes contextos.

Fonte: elaborado pelos autores

Ressaltamos que os três momentos não estão desconexos, mas interligados nas ações dos estudantes e professor ao desenvolverem suas Atividades. Assim, sua separação busca apenas elucidar a organização do EDF.

A produção de dados contou com o diário de campo e registros das ações dos estudantes, por meio de escrita resolutiva de tarefas ao longo das quinze aulas do EDF.

Para exemplificar o modelo de tarefas e o que elas contemplavam, destacam-se nas figuras 1 e 2 duas das tarefas impressas que originaram, substancialmente, nossa produção de dados:

VIDYA

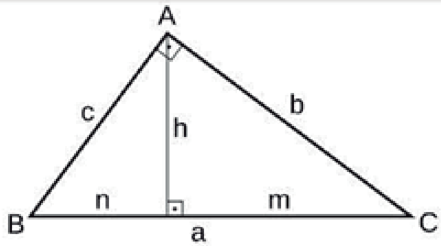
VIDYA, v. 45, n. 1, p. 97-116,
jan./jun. - Santa Maria, 2025.

Figura 1 - Tarefa I.

AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO (Parte 1)

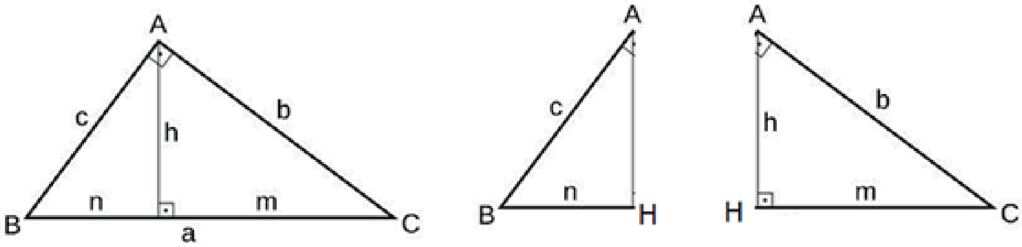
Para inicio de conversa..
Você já ouviu a palavra "semelhança"? Em quais contextos? Sabe como ela se aplica à Matemática? Nesta atividade de investigação matemática, vamos estudar as relações métricas no triângulo retângulo e como eles podem estar presentes no nosso dia a dia.
A seguir, temos uma imagem relacionada a esse assunto.
O que você enxerga em comum na imagem? Quais polígonos você consegue identificar em cada uma das imagens? Na imagem, existem polígonos com o mesmo formato? Como você concluiu isso? Que semelhanças e diferenças você destacaria entre os polígonos identificados na imagem?

Casas vizinhas similares.
Fonte: Shutterstock

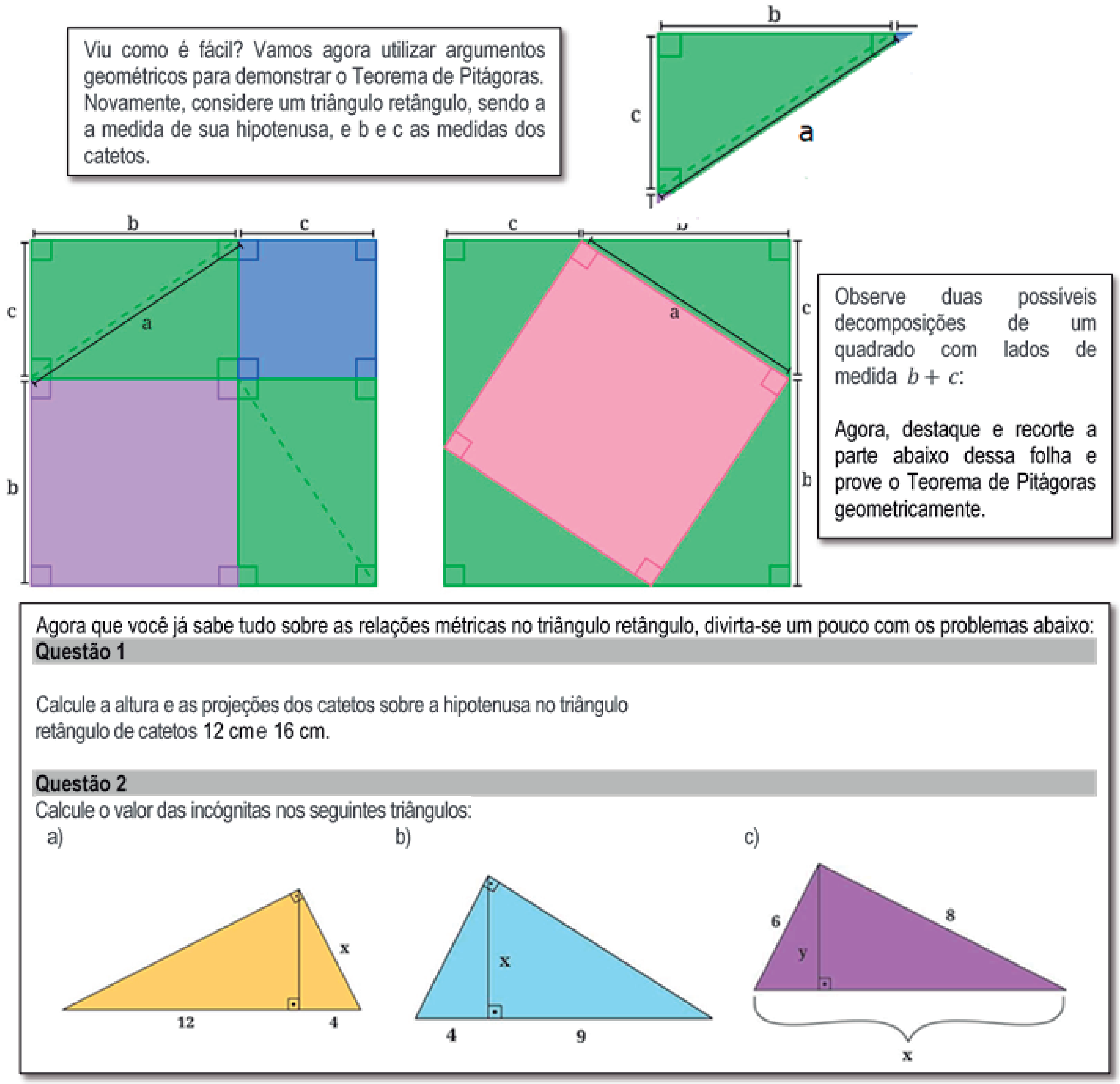


Agora é com você!
Observe com muita atenção o triângulo retângulo ABC:
Neste triângulo ABC, **h** é a altura referente a base **a**. Perceba que a base **a** quando projetada a sua altura, tem medidas **m** e **n** que são projeções dos catetos sobre a hipotenusa do triângulo.
Qual é a relação que você consegue estabelecer entre as medidas **m**, **n** e **a**?

Vamos avançar um pouco?
Quantos triângulos retângulos você consegue ver? Escreva quais são eles no espaço abaixo.



Agora que você já sabe quantos triângulos retângulos existem na imagem, vejamos aqui com mais detalhes. Perceba que temos 3 triângulos:
Você acha que é possível estabelecer alguma relação entre eles? Caso afirmativo qual?
Para resolver ao problema, vamos considerar as relações de semelhança de triângulos entre todos os três triângulos acima, você encontrará três fórmulas a cada relação de semelhança. Faça você mesmo:
Relações de semelhança entre o maior triângulo e o menor triângulo ($\Delta ABC \sim \Delta ABH$)
Relações de semelhança entre o maior triângulo e o triângulo médio ($\Delta ABC \sim \Delta AHC$)
Relações de semelhança entre o triângulo menor e o triângulo médio ($\Delta ABH \sim \Delta AHC$)
Será que é possível demonstrar o Teorema de Pitágoras por meio da relação de semelhança entre os triângulos?
Vamos pensar um pouco...
Tente você mesmo fazer essa demonstração! Vamos mostrar um caminho e você será o protagonista desse processo. Inicie com a soma: $(b^2 = m \cdot n) + (c^2 = m \cdot n)$



Fonte: elaborado pelos autores.

Nessa primeira tarefa, inicialmente, destaca-se o estimulo visual de uma composição de casas que, arquitetonicamente, exemplifica a ideia de semelhança, com intenção de resgatar o conceito com os estudantes. Após esse primeiro momento, os estudantes têm acesso ao triângulo retângulo ABC, que apresenta uma altura (AH) relativa à hipotenusa, BC, com projeções de catetos m e n.

Por meio de desenhos que demonstram a composição do maior triângulo por meio dos triângulos ABH e ACH, os estudantes são orientados a realizar a aplicação Matemática de semelhança de triângulos nas três combinações possíveis (dois a dois) dos triângulos para perfazer, assim, a determinação das fórmulas como possíveis generalizações das relações métricas no triângulo retângulo.

Com a tarefa, objetiva-se a atribuição de sentido à ideia de *generalização* das fórmulas, contemplando o conceito, amplamente defendido por nós, sobre tarefa de estudo (Davydov, 1982; Davidov; Márkova, 2021).

VIDYA

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 97-116,
jan./jun. - Santa Maria, 2025.

A demonstração algébrica e geométrica do Teorema de Pitágoras é destacada visando, ainda, ao fortalecimento da proposição da tarefa de estudo, para que os educandos, por meio do processo de generalização, tenham possibilidades de desenvolvimento do pensamento teórico em superação do pensamento empírico.

Contempla-se também a soma de duas fórmulas encontradas pelos estudantes diante das relações métricas demonstradas por meio da semelhança dos triângulos, seguida de uma das demonstrações geométricas, utilizando-se de recorte e colagem de figuras que compõem e demonstram o Teorema de Pitágoras.

A tarefa é finalizada com exercícios particulares, que constituem meios de generalização das fórmulas matemáticas para resolução de situações em que estão ausentes determinados valores e que devem ser calculados.

Figura 2 - Tarefa II.

AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO (Parte 2)

Você já demonstrou algebricamente as relações métricas no triângulo, então, escreva sobre o seu processo de estudo, faça um pequeno texto que explique o que é semelhança de triângulos, se esse conteúdo é importante, como foi sua experiência em demonstrar e realizar os cálculos que determinaram tantas fórmulas matemáticas partindo de conceitos algébricos e geométricos.

Agora, vamos aprofundar um pouco mais nossos estudos, compreendendo um pouco melhor a **história da matemática**?

Tales mede as Pirâmides

Costuma-se tomar, hoje em dia, como protótipo do cientista, ou — mais ainda — do matemático, um sábio distraído e ingênuo — e jamais um "gentleman" brilhante e realizador, embora reconhecendo que existem exceções.

Imagine-se agora um grande e próspero negociante, hábil e até mesmo um pouco inescrupuloso em seus empreendimentos comerciais, homem do mundo, grande político diante dos senhores da terra, engenheiro provecto e culto, astrônomo, tendo, entre outras coisas, predito o eclipse do sol ocorrido a 28 de maio de 585 a.C., famoso além disso pela sua cultura filosófica — e ter-se-á assim o retrato de Tales de Mileto, a primeira personalidade entre os conhecidos matemáticos da história. Tales (nascido por volta do ano 640 e falecido cêrca de 550 a.C. em Mileto, cidade da Ásia Menor) foi incluído entre os sete sábios da antiguidade. Seu saber não abrangia apenas os fenômenos celestes, mas também as coisas terrenas, como o demonstra a engraçada anedota sôbre sua mula. Êste animal levava um carregamento de sal quando, ao atravessar certo rio caudaloso, caiu nêle, e descobriu que uma parte da pesada carga se dissolvera na água, desaparecendo. No primeiro curso d'água que surgiu, o esperto quadrúpede repetiu a manobra — rolou-se na torrente, a fim de aliviar ainda mais a carga. Tales ordenou então que carregassem o muar com enorme quantidade de esponjas, que evidentemente intumesceriam na água, aumentando extraordinàriamente seu pêso quando dela saía. Esta lição fêz com que o animal não mais se aventurasse em experiências desta ordem.

Tales, por sua vez, nada ficava devendo ao muar no que se refere à facilidade de aprender. Uma de suas viagens de negócios o levou ao Egito. Estrangeiro rico e respeitável, um sábio — não admira que êle tenha entrado em contato direto com os sacerdotes do país. Acontece que no Egito jamais se extinguira uma certa tradição matemática — mantida pràticamente inalterada durante milênios; um dêstes casos estranhos, comuns porém, na história, em que a

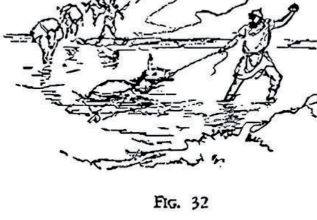


FIG. 32

matemática se desenvolve num país até um determinado grau e sùbitamente tem seu desenvolvimento paralisado. É de supor-se que os sacerdotes egípcios, ao revelarem seus conhecimentos aos estrangeiros, — conhecimentos que abrangiam a aritmética e a geometria — o fizessem não sem um certo orgulho eivado de má vontade e ao mesmo tempo de desprêzo. Do manual de aritmética de Ahmes já falamos. Além dêle, porém, os egípcios conheciam alguns teoremas de geometria, provàvelmente por imposições de natureza prática. Ano após ano o Nilo transbordava do seu leito natural, espalhando um rico limo sôbre os campos ribeirinhos, o que constituía uma bênção, a base da existência do país dos Faraós, que na época se circunscrevia a uma estreita faixa de terra às margens do rio divino e vivificador. O lôdo trazido pelo Nilo era veículo de fertilidade e opulência — mas também de confusão e incerteza, porque a inundação fazia desaparecer os marcos de delimitação entre os campos. Tão logo a água retrocedia, vinham então os "puxadores de corda", os "harpedonaptas", para demarcarem novamente os limites. Êstes agrimensores baseavam tôda sua arte essencialmente num único conhecimento — a noção que tinham do teorema de Pitágoras. Êles sabiam que um triângulo com os lados 3, 4, 5 era forçosamente retângulo. Eis por que davam uma série de nós em uma fita métrica, com aquelas distâncias um do outro, para estendê-la então da maneira como o mostra a *Fig. 33*; com isto criavam no ponto *A* um ângulo reto. Assim conseguiam lentamente, restabelecer os limites dos antigos campos.

Esta arte, provàvelmente, não surgiu em conseqüência de imposições profanas, mas se desenvolveu com base em motivos religiosos. Os templos e as pirâmides dos egípcios são criações geométricas do mais alto rigor e severidade, sua construção estando condicionada a elevados conhecimentos matemáticos e astronômicos. Estavam orientadas em rigorosa conformidade com os pontos cardeais, à maneira de quase todos os monumentos comemorativos de épocas remotas. Sabemos que é relativamente fácil determinar com exatidão a direção norte-sul. Basta observar que o sol ao meio-dia, isto é, quando se encontra exatamente no sul,* atinge seu ponto mais elevado na abóbada celeste, projetando por isso a menor sombra. A partir da direção norte-sul é extremamente fácil determinar a orientação leste-oeste, contanto que se disponha de um ângulo reto. Acredita-se que o conhecimento das cordas noduladas, que citamos, tenha surgido com esta finalidade. De que modo, porém, o ignoramos.

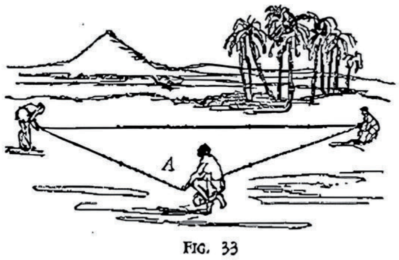


FIG. 33

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 97-116, jan./jun. - Santa Maria, 2025.

Êstes conhecimentos e alguns outros mais tinham os sacerdotes egípcios. Sua ciência, por mais elevado que fôsse o conceito em que êles próprios a tinham, não só estava longe de ser completa, mas ainda faltava a ela tôda e qualquer sistemática. Uma tradição estagnada de teoremas geométricos isolados e construções independentes — o bastante, contudo, para propiciar sugestões decisivas a um espírito jovem e vivo como era o de Tales. A rapidez e a fecundidade com que o grego soube desenvolver êstes conhecimentos fragmentados são demonstrados pelo seguinte episódio: Tales ofereceu-se a determinar a altura da pirâmide real, sem escalar o monumento. Na presença do Rei Amasis teve lugar a prova inaudita.

Em passos comedidos o sábio percorria a areia quente do deserto egípcio, até a extremidade da sombra projetada pelo ciclópico monumento. Precisamente no vértice da sombra, cravou sua bengala no solo, verticalmente — e já o resultado saltava diante de si, uma linha preta desenhada na alvura da areia: *a sombra do bastão revelava a Tales a procurada altura da pirâmide.*

Adivinham de que maneira? Suponhamos que, para facilitar o problema, Tales tenha aguardado o momento em que, atingida uma certa altura pelo sol, o comprimento da sombra do bastão tivesse se tornado igual ao seu próprio comprimento. Neste caso, bastava um raciocínio muito simples para inferir que no mesmo instante o comprimento da sombra da pirâmide era igual à altura da mesma, e o comprimento da sombra era fácil de medir — com passadas —, bastando percorrer o caminho assinalado na Fig. 34. Enquanto pensativo se dirigia lentamente em direção à extremidade da sombra, Tales preparava seu passe de mágica, que haveria de assombrar os sacerdotes egípcios.

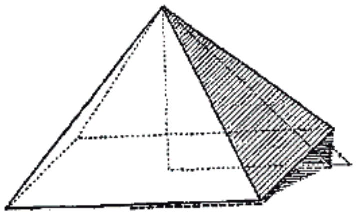


FIG. 34

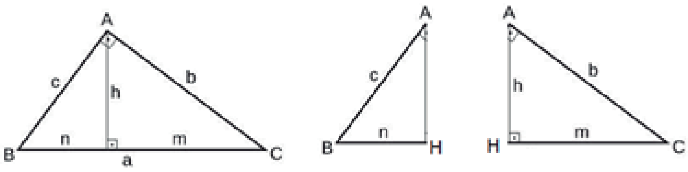
Como se vê fàcilmente, nem sequer é necessário que o sol se encontre na posição mais favorável. Os dois triângulos que aí se formam são evidentemente semelhantes. Se *fizéssemos* crescer o bastão de Tales, e ao mesmo tempo o aproxímássemos da pirâmide, de modo que sua extremidade permanecesse sempre sôbre o raio luminoso por nós desenhado — como se êste raio fôsse um cabo de aço — veríamos que a extremidade da sombra permaneceria sempre fixa ao mesmo ponto. A razão entre o comprimento do bastão e o de sua sombra permaneceria constante, enquanto o sol não mudasse de posição; terá que ser o mesmo, ainda quando o bastão coincidir com a própria pirâmide.

Diz-se que o Rei Amasis se mostrou profundamente surpreendido com esta *aplicação prática* de uma ciência abstrata, o que fêz com que se pensasse que os egípcios ainda não conheciam o teorema de Tales. Esta conclusão, porém, não parece ser forçosamente verdadeira. É perfeitamente possível que os sacerdotes egípcios já conhecessem o teorema sob uma forma ou outra. O que lhes faltava era a capacidade de compreendê-lo em sua generalidade, e êsse era o segrêdo de Tales. A pirâmide, o bastão e a sombra de ambos representam a primeira construção geométrica pura que nos é transmitida pela história. Ela nasceu do sol — daquele sol ardente e tórrido do Egito — marcada a fogo na areia do deserto, com símbolos divinos.

* Isto para o hemisfério norte; na nossa latitude o sol se encontra na direção norte, nas condições citadas. *(N. do T.)*

Escreva o que **considerou mais importante** neste texto procurando **justificar** seus motivos.

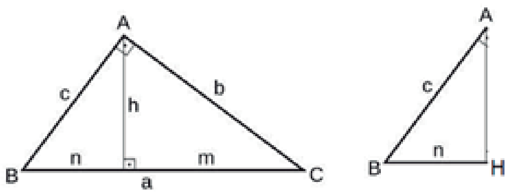
Agora chegou a hora de realizar outro tipo de demonstração, dessa vez **GEOMÉTRICAS. Acompanhe com atenção!**



Nas relações métricas no triângulo retângulo, você identificou por meio da atividade anterior todas as razões e proporções com os lados correspondentes aos triângulos semelhantes. Partindo dessas relações, você chegou à algumas fórmulas matemática, que indicam, geometricamente a área de um quadrilátero (podendo ser quadrados ou retângulos).

COM O AUXÍLIO DE PAPEL MILIMETRADO MOSTRE AS RELAÇÕES POR MEIO DAS ÁREAS.

Nas relações métricas o ________________ semelhante ao ________________(ΔABC~ΔABH)



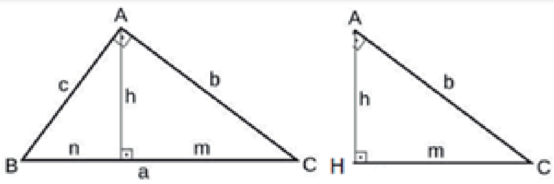
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n}$$

$$c^2 = an$$

$$bn = hc$$

$$ah = cb$$

Nas relações métricas o ________________ semelhante ao ________________(ΔABC~ΔAHC)



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$$

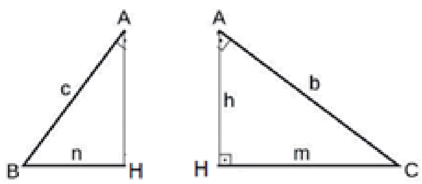
$$b^2 = am$$

$$hn = mc$$

$$ah = bc$$

Demonstrado no anterior

Nas relações métricas o semelhante ao (ΔABH~ΔAHC)



$$\frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

$$h^2 = nm$$

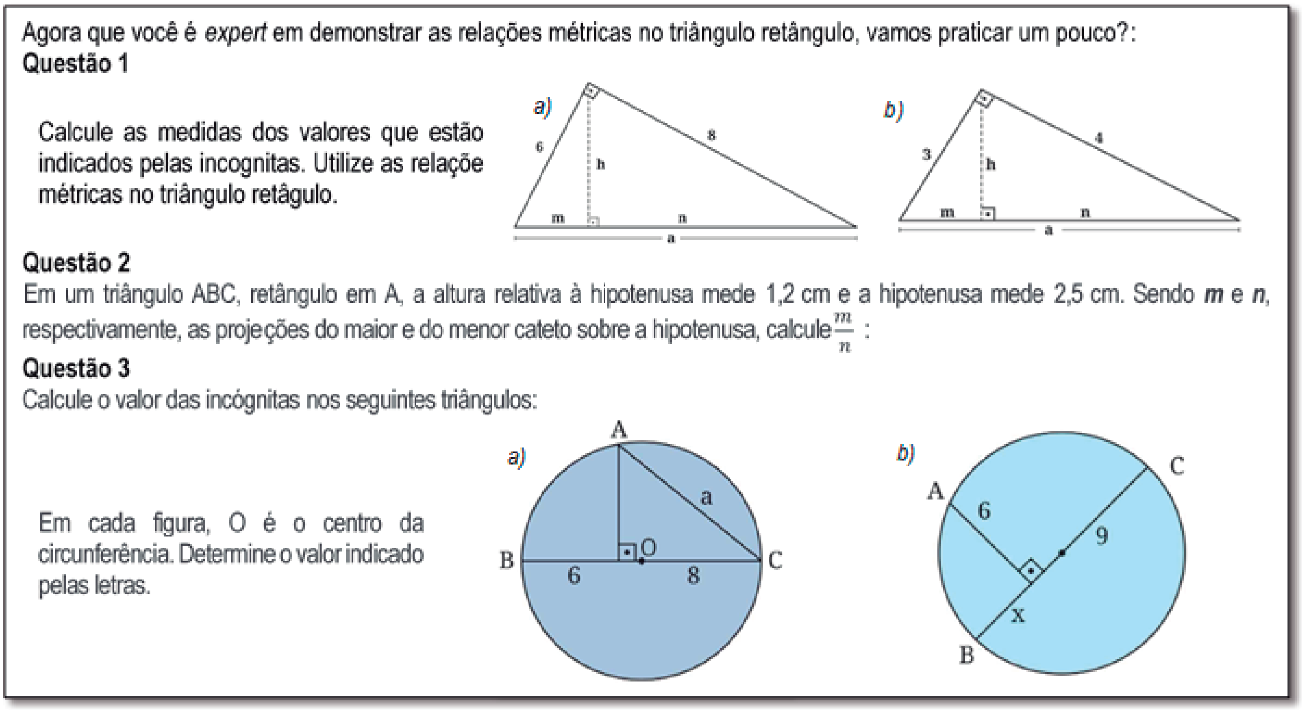
$$bh = mc$$

$$ch = bn$$

Demonstrado nas relações anteriores

VIDYA

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 97-116,
jan./jun. - Santa Maria, 2025.



Agora que você é *expert* em demonstrar as relações métricas no triângulo retângulo, vamos praticar um pouco?:

Questão 1

Calcule as medidas dos valores que estão indicados pelas incognitas. Utilize as relação métricas no triângulo retâgulo.

Questão 2

Em um triângulo ABC, retângulo em A, a altura relativa à hipotenusa mede 1,2 cm e a hipotenusa mede 2,5 cm. Sendo ***m*** e ***n***, respectivamente, as projeções do maior e do menor cateto sobre a hipotenusa, calcule $\frac{m}{n}$:

Questão 3

Calcule o valor das incógnitas nos seguintes triângulos:

Em cada figura, O é o centro da circunferência. Determine o valor indicado pelas letras.

Fonte: elaborado pelos autores

Em continuidade aos estudos sobre semelhança de triângulos, proporcionalidade e relações métricas no triângulo retângulo, na segunda tarefa (Figura 2), objetivou-se a apropriação da constituição histórica[3] de conceitos geométricos. Tais conceitos relacionavam-se à semelhança de triângulos, por meio do experimento de Tales de Mileto. Nomeadamente, compondo-se de estudos históricos sobre o possível feito de Tales ao mensurar a altura de uma pirâmide, utilizando-se dos conceitos de proporção na generalização da proporcionalidade dos raios solares que incidiam em um "bastão", sua sombra, a altura da pirâmide e sua sombra, seguido da demonstração geométrica das relações métricas do triângulo retângulo e resolução de exercícios que envolvessem esses conceitos.

Após os estudos históricos sobre os conceitos geométricos de proporcionalidade e semelhança de triângulos, por meio do experimento de Tales de Mileto, os estudantes demonstraram as fórmulas Matemáticas oriundas das relações métricas no triângulo retângulo, por meio da geometria. A orientação consistiu em realizar recortes e colagens com folhas de papel milimetrado, de modo a possibilitar a compreensão de que, para representar a medida de determinado lado ao quadrado, teriam que recortar quadrados com lados correspondendo a essa medida; e, para representar multiplicações de dois dados de medidas distintas, deveriam recortar retângulos de papel milimetrado, com lados correspondentes a essas medidas.

Por fim, os estudantes deveriam resolver algumas situações que utilizam as fórmulas que outrora demonstraram, na aplicabilidade de situações em que tinham que determinar alguns valores desconhecidos.

Ambas as tarefas destacam o princípio de oportunizar aos estudantes os motivos necessários para o engajamento do desenvolvimento do estudo, vislumbrando o desenvolvimento de ações e

3 Recorreu-se à História da Matemática descrita de maneira poética por Karlson (1961), utilizando-se de seu texto na íntegra.

operações mentais que, por sua vez, ocasionem o pensamento teórico generalizante, capaz de propiciar a resolução de situações particulares (Davydov, 1982; Davidov; Márkova, 2021). No próximo tópico, descreveremos nosso movimento de exposição dos dados e consequentemente da análise em efetivo de tais tarefas.

Optamos pela exposição dos dados por meio da Unidade de Análise, à qual entendemos como "um produto de análise que, ao contrário dos elementos, conserva todas as propriedades básicas do todo, não podendo ser dividido sem que as perca" (Vigotski, 1991, p. 4). Desse modo, organizamos a exposição e análise por meio de uma Unidade que carrega em si a incorporação dos motivos, tarefas, ações e operações de estudo que indicam apropriação do conhecimento sobre semelhança de triângulos.

Consideramos a análise na perspectiva de "apoderar-se da matéria, em seus pormenores, de analisar suas diferentes formas de desenvolvimento e de perquirir a conexão íntima que há entre elas. Só depois de concluído este trabalho é que se pode descrever, adequadamente, o movimento real" (Marx, 1971, p. 28). Assim, compomos a Unidade em dois episódios - que apresentam "como particularidade comum o fato de representarem ações coletivas que demonstram o caminho percorrido pelos sujeitos" (Silvestre; Silva, 2019, p. 12).

Cada episódio, por sua vez, é composto por Cenas que são registros produzidos pelos estudantes nos momentos em que estão desenvolvendo as ações de estudo e que nos "[...] possibilitam compreender o fenômeno para além da aparência [...]" (Araújo; Moraes, 2017, p. 68).

No Quadro 3, destacamos nossos momentos de exposição dos dados por meio de dois episódios e quatro Cenas que os compõem.

Quadro 3 - Descrição e composição da Unidade de Análise.

Motivos, tarefas, ações e operações de estudo como Unidade para apropriação do conhecimento sobre semelhança de triângulos	
Episódio I - Os motivos e as tarefas como primeiros indícios da apropriação do conhecimento matemático	Cena I - A organização do conhecimento matemático orientado pelos motivos e tarefas. Cena II - A resolução de tarefas orientadoras da aprendizagem Matemática.
Episódio II - As ações e operações desenvolvidas pelos estudantes que sinalizam a apropriação do conhecimento matemático	Cena I - A resolução de situações envolvendo semelhança de triângulos. Cena II - A produção de conhecimento sobre semelhança de triângulos pelos estudantes.

Fonte: elaborado pelos autores.

UAU! COMO TALES PERCEBEU TUDO ISSO? UMA ANÁLISE DAS AÇÕES DOS ESTUDANTES INDICADORAS DA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Episódio I - Os motivos e as tarefas como primeiros indícios de apropriação do conhecimento matemático

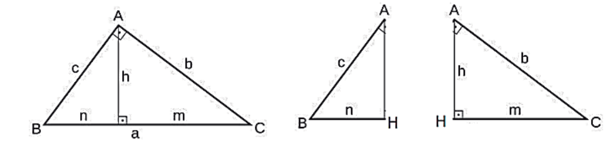
No Episódio I, destacamos os motivos e as tarefas desenvolvidas pelos estudantes que indicam apropriações de conhecimento matemático. A primeira Cena remete à organização do ensino de Matemática, orientado pelos motivos e tarefas, demonstrando algumas das situações propostas. Na segunda Cena, destacamos respostas dos estudantes ao solucionarem as tarefas.

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 97-116, jan./jun. - Santa Maria, 2025.

Cada Cena é descrita, por meio de um quadro organizacional, iniciando com o contexto/cenário, que ressalta o momento e o lugar desenvolvido, seguido dos recortes que compõem o seu conteúdo.

Quadro 4 - Cena I: a organização do conhecimento matemático orientado pelos motivos e tarefas.

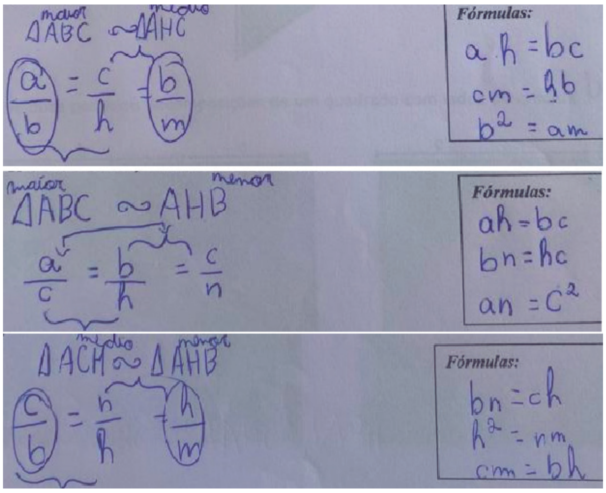
Contexto/cenário: composição de recortes extraídos das Tarefas de Matemática quanto à demonstração das fórmulas oriundas da semelhança de triângulos retângulos por meio de área e processo algébrico. As imagens mostram a forma como os estudantes representaram as fórmulas matemáticas, por meio da álgebra e da área em que as medidas indicam.



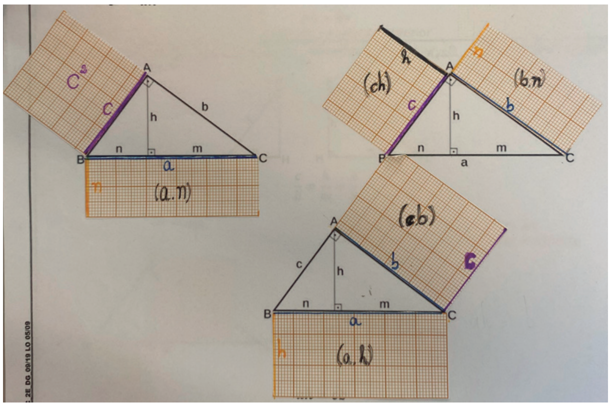
Perceba que temos 3 triângulos:

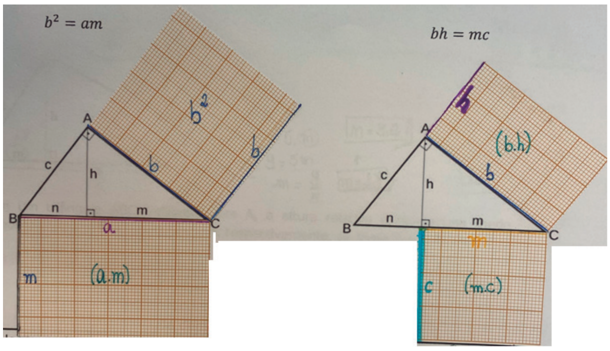
$\Delta ABC \rightarrow$ *maior triângulo*
$\Delta ABH \rightarrow$ *menor triângulo*
$\Delta AHC \rightarrow$ *triângulo médio*

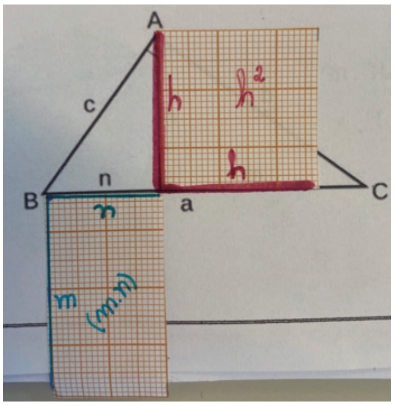
Para resolver ao problema, vamos considerar as relações de semelhança de triângulos entre todos os três triângulos acima, você encontrará três fórmulas a cada relação de semelhança. Faça você mesmo:



Paulo







Ana

Fonte: elaborado pelos autores por meio dos dados produzidos com os estudantes

Sinalizamos na organização do ensino sobre semelhança de triângulos os cuidados intencionais em propor situações diversas aos estudantes que os fizessem produzir e se envolver com os objetos matemáticos. Para isso, as tarefas ressaltavam a lógica matemática no movimento lógico-histórico - disponibilizada por meio de textos e diálogos com os estudantes - dos conceitos relacionados à semelhança de triângulos, demonstrações algébricas e geométricas a eles inerentes. Por fim, enfatizamos a resolução de problemas contextualizados com os objetos matemáticos.

Proporcionamos aos estudantes situações de estudo das relações métricas no triângulo retângulo por meio da demonstração das fórmulas algébricas $(c^2 = an; \ \ ch = bn; \ \ ah = cb; \ b^2 = am; \ \ bh = mc \ \ e \ \ h^2 = mn)$ oriundas das razões de semelhança entre os triângulos $(\Delta ABC; \ \Delta ABH \ \ e \ \Delta AHC)$, conforme demonstrado no recorte produzido por Paulo[4], ao elucidar as razões de proporcionalidade que conduziram às fórmulas matemáticas em questão.

Na continuidade da Cena, percebe-se que os estudos não se limitaram às demonstrações algébricas, mas também em demonstrações geométricas, conforme percebemos ao final da Cena no extrato produzido por Ana. Acreditamos nessa proposta intencional devido à demonstração “assumir um carácter pedagógico, sendo também uma forma de educar os alunos para que estes se sintam cada vez mais seguros e motivados nas suas argumentações Matemáticas” (Amado; Sanchez; Pinto, 2015, p. 641).

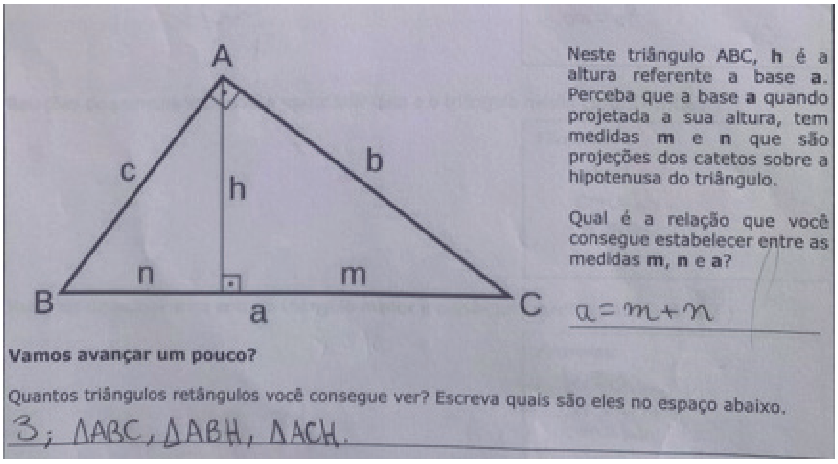
O modo de organização e proposição da tarefa de estudo possibilitou a criação dos motivos para que os estudantes se envolvessem nas ações do estudo porque, quando perceberam que as demonstrações algébricas poderiam ser elaboradas, também, de modo geométrico, mostraram-se totalmente envolvidos no processo de recorte e colagens para estabelecer as relações métricas.

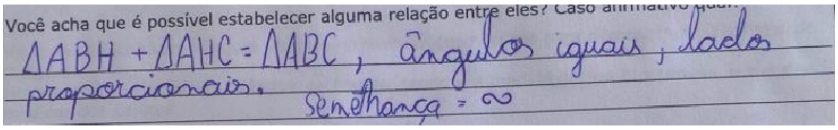
As tarefas de estudo desenvolvidas no EDF caracterizaram-se por oportunizar aos estudantes modos de ação para a resolução dos problemas incorporados a elas, para que chegassem de fato nas ações mentais necessárias para se apropriarem dos conceitos relacionados à semelhança de triângulos. “A tarefa de estudo difere de outros tipos de tarefas: seu resultado não é uma mudança no objeto com o qual o aluno opera, mas uma mudança no próprio aluno como sujeito, e esta mudança consiste no domínio dos modos de ação definidos” (Davidov; Márkova, 2021, p. 226). Na próxima Cena destacamos como se deram essas ações e operações nas tarefas de estudo.

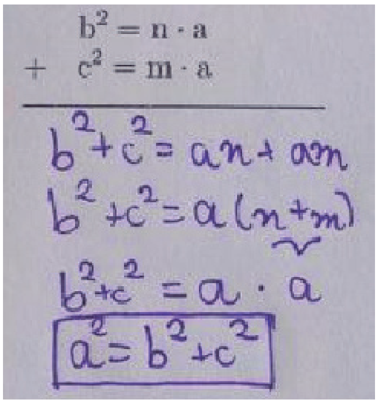
---

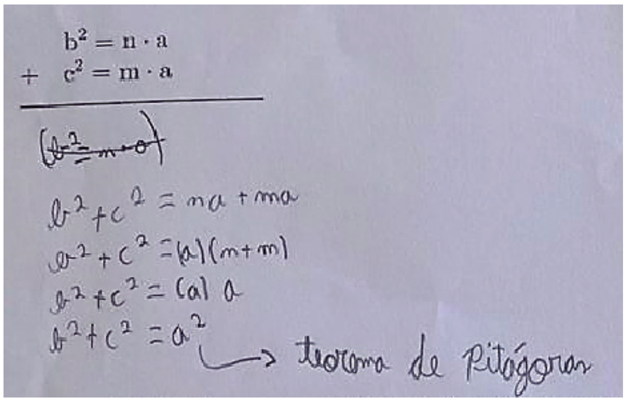
4 Por questões éticas os nomes utilizados no artigo são fictícios para preservar a identidade dos estudantes. Acrescenta-se que, todos os estudantes participantes da pesquisa assinaram, junto aos seus responsáveis o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido em anuência da utilização dos dados para o desenvolvimento dessa pesquisa.

Quadro 5 - Cena II - A resolução de tarefas orientadoras da aprendizagem Matemática.

<table>
<tr><td colspan="2">Contexto/cenário: extratos oriundos da tarefa quanto à percepção dos estudantes, Maitê e David, quanto o que é a semelhança de triângulos aplicada às relações métricas e consequentemente seus desdobramentos na demonstração algébrica de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td colspan="2">


Carlos</td></tr>
<tr><td colspan="2">


Paulo</td></tr>
<tr><td>


Paulo</td><td>


Newton</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelos autores por meio dos dados produzidos com os estudantes

Após diálogos e leitura de textos que ressaltam a História da Matemática e os conceitos sobre semelhança de triângulos aplicados às relações métricas, a Cena II destaca momentos em que os estudantes estabelecem conceitualmente a generalização da semelhança, ressaltando os "ângulos iguais e lados proporcionais".

Ao descreverem o conceito, os estudantes demonstram que a partir do que entendem por semelhança é que seria possível desenvolver todas as ações particulares inerentes a ele. Assim, percebemos que os conceitos foram "internalizados pelos indivíduos ao longo de seu processo de desenvolvimento [que preserva] características dos elementos encontrados no mundo real, selecionados como relevantes pelos diversos grupos culturais" (Oliveira, 1992, p. 28). Unanimemente,

VIDYA, v. 45, n. 1, p. 97-116,
jan./jun. - Santa Maria, 2025.

os estudantes conceituaram semelhança dessa forma, divergindo apenas na utilização da palavra "igual" para "congruente", termo que, após desenvolvido o experimento, acordou-se como o mais adequado às situações geométricas.

Atentamos à distinção dos estudantes quanto aos três triângulos retângulos e a observância de suas semelhanças. Nota-se, a primeira relação métrica trivial, sem necessidade de estabelecer as relações que a soma das projeções dos catetos tem a medida da hipotensa do maior triângulo ($a = n + m$). Após realizar todas as demonstrações algébricas - elucidadas por meio da Cena anterior - os estudantes foram estimulados a resolverem a soma de duas fórmulas, encontradas por eles mesmos: $b^2 = n.a + c^2 = m.a$. Após algum tempo, chegaram à conclusão do famoso Teorema de Pitágoras - já estudado por eles - demonstrado, agora, por meio da semelhança de triângulos.

Ao realizarem as demonstrações que partiram das relações de semelhança de triângulos, os alunos conseguiram provar o Teorema de Pitágoras por meio de uma demonstração que ajuda a elucidar o motivo pelo qual um resultado é válido, ou não, e contribui certamente para sua compreensão (Amado; Sanchez; Pinto, 2015).

Em síntese, destacamos neste episódio que os estudantes tiveram a oportunidade de lidar com as questões mais gerais da semelhança de triângulos e que, a partir dessa configuração, conseguiram estabelecer o que era relevante para que pudessem resolver as situações que estavam por vir. Isso caracteriza como "o pensamento abstrato [teórico] é desenvolvido durante o próprio processo de aprendizagem" (Rosa; Santos, 2023, p. 3).

No próximo tópico, daremos destaque ao modo de resolução dos problemas e ao tipo de pensamento oportunizado por meio do EDF.

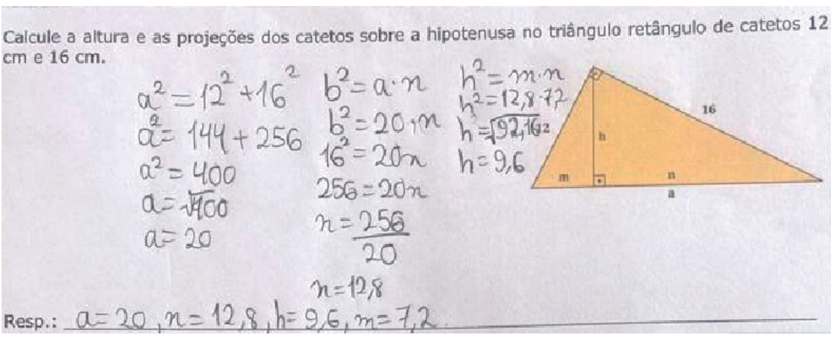
Episódio II - As ações e operações desenvolvidas pelos estudantes que sinalizam a apropriação do conhecimento matemático

No Episódio II, consideramos a análise das ações e operações de estudo desenvolvidas pelos estudantes que sinalizam a apropriação do conhecimento matemático e que indicam os indícios de pensamento teórico.

Na primeira Cena, destaca-se a resolução de algumas situações - exercícios - que envolvem as relações métricas no triângulo retângulo. Na segunda Cena, por meio das descrições dos estudantes, sinalizamos o movimento de síntese vivenciado durante o desenvolvimento do EDF.

Quadro 6 - Cena I - A resolução de exercícios envolvendo semelhança de triângulos.

Contexto/cenário: extratos oriundos da resolução de exercícios em que os estudantes teriam que aplicar os conhecimentos para determinar valores desconhecidos na relação de proporcionalidade entre os triângulos.



Calcule a altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa no triângulo retângulo de catetos 12 cm e 16 cm.

$a^2 = 12^2 + 16^2$
$a^2 = 144 + 256$
$a^2 = 400$
$a = \sqrt{400}$
$a = 20$

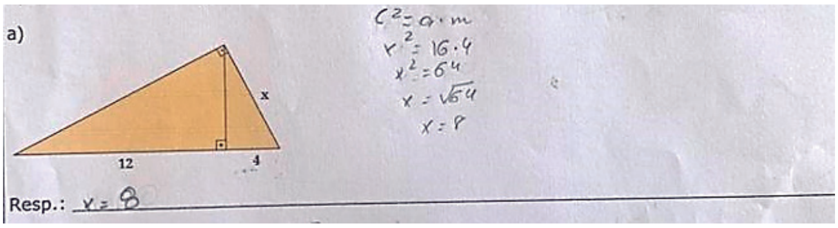
$b^2 = a \cdot n$
$b^2 = 20 \cdot n$
$16^2 = 20n$
$256 = 20n$
$n = \frac{256}{20}$
$n = 12,8$

$h^2 = m \cdot n$
$h^2 = 12,8 \cdot 7,2$
$h = \sqrt{92,16}$
$h = 9,6$

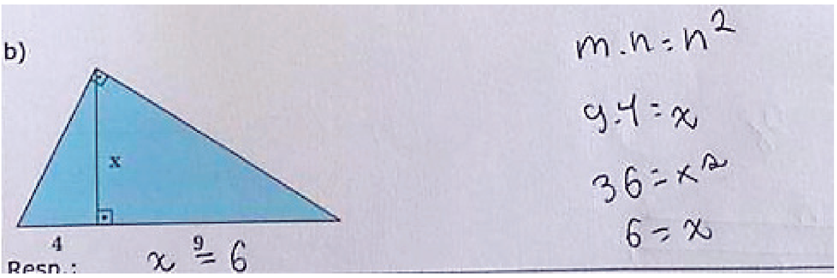
Resp.: $a = 20$, $n = 12,8$, $h = 9,6$, $m = 7,2$

Carlos

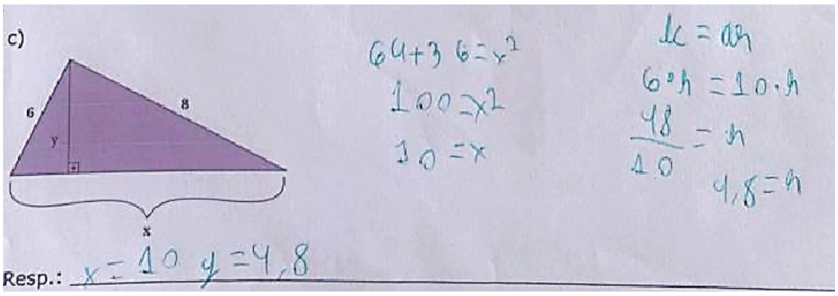
VIDYA
VIDYA, v. 45, n. 1, p. 97-116,
jan./jun. - Santa Maria, 2025.



Karita



Maitê



Alex

Fonte: elaborado pelos autores por meio dos dados produzidos com os estudantes

Na Cena, composta por quatro situações, por meio de cálculos que envolvem as relações métricas no triângulo retângulo, os estudantes expõem o processo de determinar valores desconhecidos, tendo apenas algumas medidas para determinar as outras.

Os modos de resolução dos exercícios são muito parecidos, pois após generalizar as fórmulas matemáticas, nenhum estudante precisou subdividir os triângulos e estabelecer as relações de semelhança, simplesmente utilizaram as fórmulas recém demonstradas por eles mesmos. Isso demonstra que a linguagem, “sistema simbólico fundamental na mediação entre sujeito e objeto de conhecimento, tem [...] duas funções básicas: a de intercambio social e a de pensamento generalizante” (Oliveira, 1992, p. 27).

O estabelecimento da generalização foi útil e aplicável à resolução dos problemas, ressaltando o movimento de aprendizagem que promove desenvolvimento estabelecido por Davydov (1982), que parte do abstrato ao concreto, dos modos generalizantes aos modos singulares e específicos. Na próxima Cena, evidenciaremos o movimento de síntese dos estudantes ao vivenciarem o EDF.

Quadro 7 - Cena II - A produção de conhecimento sobre semelhança de triângulos pelos estudantes.

Contexto/cenário: extratos oriundos das respostas dos estudantes ao serem questionados sobre o que consideraram mais importante ao realizarem o estudo sobre semelhança de triângulos aplicado às relações métricas, tendo como contexto a História da Matemática.
Foi muito boa, o fato de aprender o que eu estudo fazendo para descobrir a hipotenusa e todos os lados e relações métricas dos triângulos. A semelhança de triângulos é a proporção de um triângulo e outro, sendo assim um sendo escala do outro. Newton.
O mais importante são as visões sobre a proporcionalidade observadas de Tales onde para cumprir um desafio do Faraó pensou em alinhar a sua estaca a pirâmide para ver a angulação do sol que assim as sombras estariam alinhadas. Newton.
O que eu achei mais importante é saber que as pirâmides dos egípcios são criações geométricas do mais alto rigor matemático. Outra coisa foi saber que é necessário que o sol se encontre na posição mais favorável. Karita.
Para mim o mais importante foi o Tales descobrindo sobre a proporção e conseguindo calcular a altura de uma pirâmide utilizando um bastão e usando a angulação do sol. Pietro.
É a "descoberta" da proporção pelo sol por Tales já que esse caso foi um dos pontos-chave para confirmar a existência das proporções no triângulo. Alex.

Fonte: elaborado pelos autores por meio dos dados produzidos com os estudantes

Nos recortes das escritas dos estudantes, destacamos o que estava latente ao concluir os estudos, sinalizando que "a função do pensamento depende da estrutura do próprio pensamento. As eventuais operações dependem da maneira como foi construído e funciona o pensamento" (Vigotsky, 2010, p. 519). Assim, eles indicaram que Tales foi um importante precursor dos estudos sobre semelhança, destacando a proporcionalidade oriunda dos raios solares para determinar medidas, sem a necessidade de mensurá-las fisicamente, apenas por meio de cálculos matemáticos (proporções).

Ao se envolverem com a História da Matemática e lidar com os conceitos sobre semelhança, os estudantes produziram o próprio conhecimento, sabendo estabelecer não somente o entendimento dos conceitos, mas também aplicá-los a determinadas situações, o que evidencia avanços em relação às dificuldades de aprendizagem sobre semelhanças de triângulos, referidas por Oliveira e Chiummo (2015).

> Dar-se conta da inseparabilidade do lógico e o histórico requer em matemática o conhecimento dos fatos fundamentais da história da matemática e dos trabalhos clássicos, a compreensão das leis do desenvolvimento das ciências matemáticas e do caráter histórico da correspondência entre os conteúdos específicos da matemática (Ribnikov, 1987, p 18).

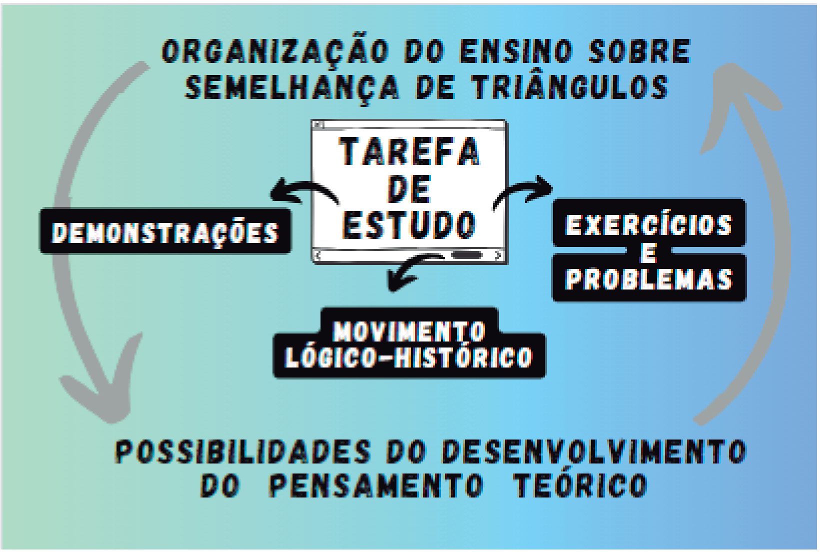
Ao propor as situações de ensino “não estamos dizendo que nossos alunos têm que seguir o mesmo caminho que aqueles dos matemáticos antigos [...] é uma questão de compreender melhor a natureza do conhecimento matemático e de encontrar, dentro de sua estrutura histórica, novas possibilidades de ensino” (Radford, 2011, p. 44).

Em síntese, na relação indissociável dos conceitos com o movimento lógico-histórico, destacamos na composição das Cenas o movimento de estudo que possibilitou aos estudantes os motivos para se engajarem nos estudos históricos, teóricos, que envolvem demonstrações e resolução de problemas, na vivência de uma geometria capaz de ser experienciada por eles próprios.

Ao estudar e dialogar com o professor e colegas, por meio da tarefa de estudo, os estudantes chegaram ao conceito e, por meio dele, foram capazes de resolver as situações que lhes foram propostas.

Destacamos, assim, a relação intrínseca entre a generalização e a resolução de problemas no processo de ensino, ao qual descrevemos, de maneira generalizada e sintética, por meio da Figura 3.

Figura 3 - Esquema da organização do ensino ao desenvolvimento do pensamento teórico



Fonte: produção dos autores

Defendemos que as aprendizagens que ocasionaram a sinalização do desenvolvimento do pensamento nos estudantes foram possíveis por intermédio de uma organização de ensino que estabeleceu por meio da tarefa de estudo que contemplava o movimento lógico-histórico, as demonstrações generalizantes e a resolução de exercícios. Por sua vez, as demonstrações e a resolução das situações, sinalizaram “a compreensão pelo estudante das tarefas de estudo - elas se encontram estreitamente ligadas com a generalização substancial (teórica), levam o estudante a dominar as relações generalizadas na área de conhecimentos estudada, a dominar novos procedimentos de ação” (Davidov; Márkova, 2021, p. 200).

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Consideramos que a organização intencional dos estudos sobre as relações métricas no triângulo retângulo oportunizou o envolvimento dos estudantes ao resolverem as situações propostas.

Destarte, as ações dos estudantes que mais ganharam destaque foram os *estudos do movimento lógico-histórico* da semelhança, oportunizados pela história e o contexto de Tales na produção de conhecimento matemático, as *demonstrações algébrico/geométricas das relações métricas no triângulo retângulo* e as *resoluções de exercícios de modo coletivo*.

Tais ações de estudo envolveram a generalização das fórmulas matemáticas por meio da proporcionalidade da semelhança de triângulos, o que caracterizou uma operação - conjunto de ações - que mobilizou e possibilitou a resolução de situações presentes nos exercícios que reclamaram tais fórmulas para resolução de casos particulares.

Concluímos, advogando, portanto, que a tríade que sustentou o movimento de estudo ao longo do EDF incorporando o *movimento lógico-histórico*, as *demonstrações* e a *resolução das situações exercícios/problemas* constitui elementos importantes e promissores para orientação do ensino e consolidação de uma aprendizagem que gera desenvolvimento nos estudantes, que pode, por sua vez, vislumbrar o pensamento generalizante dos estudantes, ou seja, o desenvolvimento do tão objetivado pensamento teórico.

AGRADECIMENTO

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pela Bolsa de Pós-Doutoramento do primeiro autor, supervisionado pelo segundo (PDPG-POSDOC-88887.923475/2023-00).

REFERÊNCIAS

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015. DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11

ARAÚJO, E. S., MORAES, S. p. G. Dos princípios da pesquisa em educação como Atividade. IN. MOURA, M. O. (Org.) **Educação escolar e a pesquisa na teoria histórico-cultural.** São Paulo: Edições Loyola, 2017. [p. 47-70]

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Editora da Universidade de São Paulo. 475 p. 1974.

DAVYDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

DAVIDOV, V. V.; MÁRKOVA, A. A concepção de atividade de estudo dos alunos. In. PUENTES, R.; CARDOSO, C. G. C.; AMORIM, p. A. p. (org.). **Teoria da atividade de estudo:** contribuições de D. B. Elkonin, V. V. Davidov e V. V. Repkin. 3. ed. Curitiba: CRV; Uberlândia: Edufu, 2021, p. 189-211.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, Editora Unicamp, 2004.

FREITAS, R. A. M.; LIBÂNEO, J. C. O experimento didático formativo na perspectiva da teoria do ensino desenvolvimental. **Educação e Pesquisa**, 48 (contínuo), e246996. 2022. DOI: https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248246996

KARLSON, p. **A magia dos números.** Tradução de Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Coleção Tapête Mágico. Rio de Janeiro, Porto Alegre, São Paulo: Editora Globo. 604 p. 1961.

LEONTIEV, A. N. **Atividade, Consciência e Personalidade**. Trad. Priscila Marques. Mireveja, 2021.

OLIVEIRA, E. C.; CHIUMMO, A. Análise da aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em Matemática. **Vidya**, Santa Maria (RS, Brasil), v. 35, n. 2, p. 18, 2015.

OLIVEIRA, M. K. Vygotsky e o processo de formação de conceitos. IN. La Taille, Yves de.; Oliveira, Marta Khol de.; Dantas, Heloysa. **Piaget, Vygotsky, Wallon:** teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992. p. 23-34.

RADFORD, L. **Cognição matemática:** história, antropologia e epistemologia. São Paulo, Editora Livraria da Física. 2011.

RÍBNIKOV, K. **Historia de las matemáticas**. Editorial Mir Moscú. 488 p. 1987.

ROSA, J. E.; SANTOS, C. O. Revisão Integrativa sobre Processo de Abstração em Pesquisas acerca da Formação de Professores que Ensinam Matemática. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 79, p. 1-12, 15 maio 2023. DOI.: https://doi.org/10.37001/emr.v28i79.3170

MARX, K. **O capital**. Livro 1. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1971.

SILVESTRE, B. S.; SILVA, M. M. A Interface entre o movimento lógico-histórico e a organização do ensino do conceito matemático de ângulos. **REVEMAT**, v. 14, p. 1-24, 2019.

SILVESTRE, B. S. **Os motivos que sustentam escolhas dos futuros professores para organização do ensino de Matemática na formação inicial.** Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2022. 263 f.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat:** a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 10. ed. Tradução: Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro; São Paulo: Record, 2004.

VIGOTSKI, S. L. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VIGOTSKY, L. S. **Psicologia pedagógica.** Tradução do russo e introdução de Paulo Bezerra. 3. ed. São Paulo: Editora WMF Mastins Fontes, 2010.