VIDYA

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264, jul./dez. - Santa Maria, 2024.

Recebido em: 01.09.2024. Aprovado em: 23.10.2024.
ISSN 2176-4603 | DOI: doi.org/10.37781/vidya.v44i2.5123

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL Y LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E A CONSTRUÇÃO DA LINHA TANGENTE A UMA CURVA

THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL CALCULUS PROBLEMS AND THE CONSTRUCTION OF THE TANGENT LINE TO A CURVE

JUAN EDUARDO NÁPOLES VALDES[1]

RESUMEN

En el Cálculo Diferencial *el problema clásico es la construcción de la recta tangente a una curva. Esto se traduce en una multiplicidad de problemas y ejercicios que se presentan a los estudiantes en un curso de Cálculo. En este artículo se presenta un problema útil para la Educación Matemática, obtenido a partir de un operador diferencial generalizado, para ello, definimos lo que entendemos por función diferenciable en este sentido generalizado, y la interpretación geométrica de dicha noción. Lo interesante de esta generalización es que dicha interpretación geométrica es similar a la interpretación geométrica de la función derivada clásica, pero con algunas variantes, lo que ofrece un rico panorama para la visualización y consolidación de este concepto.*

Palabras-clave*: cálculo diferencial; resolución de problemas; visualización.*

RESUMO

No Cálculo Diferencial o problema clássico é a construção da reta tangente a uma curva em um determinado ponto. Isto traduz-se, nas nossas salas de aula, numa multiplicidade de problemas e exercícios que são apresentados aos alunos numa disciplina de Cálculo. Neste artigo é apresentado um problema útil para a Educação Matemática, utilizando um operador diferencial generalizado, para isso definimos o que entendemos por função diferenciável neste sentido generalizado, e é apresentada a interpretação geométrica da referida noção. O interessante desta generalização é que a referida interpretação geométrica é semelhante à interpretação geométrica da derivada clássica de uma função num ponto, mas com algumas variantes, o que oferece um rico panorama para a visualização e consolidação do referido conceito.

Palavras-chave: *cálculo diferencial; resolução de problemas; visualização.*

ABSTRACT

In Differential Calculus the classic problem is the construction of tangent line to a curve. This translates into a multiplicity of problems and exercises that are presented to students in a Calculus course. This article presents a useful problem for Mathematics Education, obtained from a generalized differential operator, for this, we define what we understand by a differentiable function in this generalized sense, and the geometric interpretation of that notion. The interesting thing about this generalization is that said geometric interpretation is similar to the geometric interpretation of the classical derivative function, but with some variants, which offers a rich panorama for the visualization and consolidation of this concept.

Keywords: *differential calculus; problem solving; visualization.*

1Doutor em Ciências Matemáticas, Professor Titular, UNNE-FaCENA e UTN-FRRE, Argentina. Email: jnapoles@exa.unne.edu.ar

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

INTRODUCCIÓN

Como sabemos, la resolución de problemas tiene una trascendencia fundamental en la educación matemática por varias razones clave:

1. **Desarrollo del Pensamiento Crítico**: Resolver problemas permite a los estudiantes desarrollar habilidades de pensamiento crítico y lógico. Al enfrentarse a problemas matemáticos, los estudiantes aprenden a analizar, planificar y evaluar sus estrategias y soluciones.
2. **Aplicación de Conceptos**: La resolución de problemas facilita la aplicación práctica de conceptos matemáticos. En lugar de aprender fórmulas y procedimientos de manera abstracta, los estudiantes usan esos conocimientos en contextos concretos, lo que refuerza su comprensión y relevancia.
3. **Fomento de la Creatividad**: Resolver problemas a menudo requiere enfoques creativos y soluciones innovadoras. Este aspecto de la matemática permite a los estudiantes explorar diferentes métodos y perspectivas, promoviendo la creatividad y la flexibilidad mental.
4. **Preparación para la Vida Real**: La resolución de problemas matemáticos prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos en la vida cotidiana y en diferentes profesiones. Las habilidades adquiridas a través de la resolución de problemas son transferibles a situaciones reales, donde se necesita tomar decisiones basadas en el análisis y la evaluación de datos.
5. **Motivación y Compromiso**: Los problemas matemáticos interesantes y desafiantes pueden aumentar la motivación y el compromiso de los estudiantes. Ver la matemática como una herramienta para resolver problemas reales puede hacerla más relevante y atractiva.
6. **Desarrollo de Habilidades de Comunicación**: Al resolver problemas en grupo, los estudiantes practican la comunicación matemática, compartiendo ideas, explicando soluciones y discutiendo enfoques. Esto fortalece sus habilidades para comunicar y justificar sus razonamientos.
7. **Comprensión Profunda**: La resolución de problemas ayuda a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos, ya que deben aplicar y reflexionar sobre el contenido de manera activa en lugar de simplemente memorizar procedimientos.

En resumen, la resolución de problemas en la educación matemática no solo fortalece las habilidades matemáticas específicas, sino que también fomenta una variedad de competencias cognitivas y sociales esenciales para el desarrollo integral de los estudiantes. Si a lo anterior le agregamos que la resolución de problemas es, probablemente, una de las tendencias más desarrolladas en los últimos cuarenta años y este desarrollo se ha llevado a cabo en múltiples direcciones: historia y filosofía de las matemáticas, constructivismo, constructivismo social, etnomatemáticas, ... entre otras (los lectores interesados en estas diversas direcciones pueden consultar SRIRAMAN; ENGLISH, 2010), nos daremos cuenta de la potencialidad de esta tendencia de aprendizaje.

Una de las ramas matemáticas más fructíferas para la Resolución de Problemas es el Cálculo Infinitesimal (Diferencial e Integral, en particular). La división actual, que incluye ecuaciones diferenciales además de las anteriores, por ejemplo, ha sido producto del desarrollo histórico de las Matemáticas, donde factores internos y externos han llevado al panorama que hoy conocemos (véase JABLONKA; KLISINSKA, 2012). El cálculo diferencial e integral visto desde la intuición geométrica se puede observar en los conceptos de Antiphon y Brison en su intento de cuadratura del círculo para determinar su área y figuras delimitadas por curvas (área bajo la curva) y las derivadas y fluxiones de

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

Leibniz y Newton; siendo este el punto de partida que sufrió variadas e importantes transformaciones en particular después de la introducción de la noción de límite por Cauchy.

En particular, este desarrollo en el siglo XVIII hizo que los matemáticos comenzaran a manejar con asiduidad el infinito actual, y lo curioso es que esta consolidación de los conceptos de límite y convergencia descansa en última instancia en la formalización de los números reales con Peano y Cantor (véase ODIFREDDI, 2006). Los lectores interesados pueden consultar D'AMORE, 2021 y ARRIGO; D'AMORE; SBARAGLI, 2011 donde se muestra un amplio panorama del tratamiento del infinito tanto en la investigación matemática como en la Educación Matemática. De hecho, la fundamentación lógica y filosófica del cálculo diferencial e integral era objetivamente imposible sobre la base de los conceptos en los que aparecieron y es por ello que los esfuerzos de Newton, Leibniz, Lagrange y otros, hasta principios mismos del siglo XIX, acabaron en el fracaso. Señalemos las principales deficiencias, aparte de la falta del concepto de dominio numérico y de números reales en particular que ya señalamos (ver KLINE, 2006; NAPOLES VALDES, 2008 y SANCHEZ; VALDES, 2004):

Incorrecta comprensión del concepto de diferencial: En Leibniz, L'Hospital, Euler y otros matemáticos del siglo XVIII, el concepto de diferencial se confundía en incremento. Una aproximación suficientemente correcta del concepto de diferencial fue dada solo por Lagrange (1765).

Insuficiente comprensión del concepto de función: De hecho, hasta finales del siglo XIX, los matemáticos, partiendo de la intuición mecánica y geométrica, entendían por fundamento solo las funciones analíticas representadas por una determinada fórmula (en algunos casos infinitas, como en las consideraciones de Fourier vinculadas a su teoría del calor). Solo con la aparición de funciones discontinuas en problemas prácticos los matemáticos prestaron atención a la formación lógica del concepto de función (ver la última sección de esta lección para más detalles).

Ausencia de un concepto claro de límite: Los seguidores de Newton: Maclaurin, Taylor, Wallis y otros, tuvieron una larga discusión sobre si la variable llegaba o no al límite. Este problema no era fácil, precisamente, porque no existía una definición precisa de límite y éste sólo se determinaba mediante razonamientos mecánicos y geométricos. Esta insuficiencia se mantuvo hasta Cauchy (1823).

El concepto de continuidad funcional era intuitivo: Esto se explica porque los matemáticos del siglo XVIII consideraban continuas todas las funciones y por tanto no tenían la necesidad de especificar este concepto. Sólo a principios del siglo XIX se empezó a pensar en este problema (otros detalles se pueden encontrar en la última sección de esta conferencia).

Concepto difuso de integral definida: Relacionado sobre todo con la ausencia de un teorema de existencia. Por ejemplo, se consideraba que la fórmula de Newton-Leibniz tenía un significado universal, es decir, era válida para todas las funciones y en todas las condiciones. Los esfuerzos de Lacroix, Poisson y Cauchy por precisar el concepto pusieron de relieve el concepto de límite y de continuidad, pero el problema de la integral definida sólo encontró una respuesta completa hasta finales del siglo XIX, en los trabajos de Lebesgue.

En este trabajo presentamos un problema teórico matemático que tiene su impacto en la Educación Matemática, vinculado a la Resolución de Problemas del Cálculo Diferencial. Para ello, tras situar el problema matemático en su contexto histórico, señalamos algunos puntos de contacto relevantes para la Educación Matemática.

SOBRE PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

¿Qué es un problema? Es una buena pregunta, muy difícil de responder, por eso preferimos caracterizar lo que es un problema para nosotros.

Podemos caracterizar un problema como una situación en la que:

- Hay una persona interesada en resolverlo (el solucionador).
- Hay una situación inicial (la actual) y una final (a la que queremos llegar cuando el problema esté resuelto).
- Se desconoce el camino para ir de la situación inicial a la final.

¿Qué es un problema matemático? Preguntémosle a Chatgpt sobre ello y veamos qué nos responde: *"Un problema matemático es una pregunta o situación que se aborda utilizando principios y métodos matemáticos para encontrar una solución o comprender mejor el fenómeno en cuestión. Estos problemas pueden surgir en una variedad de áreas, desde la física y la ingeniería hasta la economía y la biología, y generalmente implican la formulación de una pregunta clara que requiere razonamiento matemático para resolverse*.

Los problemas matemáticos pueden variar ampliamente en complejidad y enfoque. Algunos ejemplos comunes incluyen:

- Problemas de optimización: determinar la mejor solución posible bajo ciertas restricciones, como maximizar las ganancias o minimizar los costos.
- Problemas de ecuaciones diferenciales: encontrar funciones que satisfagan una ecuación que involucre derivadas.
- Problemas de geometría: resolver problemas relacionados con formas y figuras geométricas, como calcular áreas, volúmenes o distancias.
- Problemas de probabilidad y estadística: analizar datos y predecir resultados en función de modelos probabilísticos.
- Problemas de teoría de números: investigar propiedades de números enteros y patrones numéricos.

Los problemas matemáticos a menudo requieren habilidades específicas como el razonamiento lógico, la capacidad de formular modelos abstractos, el uso de técnicas matemáticas avanzadas y, a veces, creatividad para encontrar soluciones innovadoras. Resolver problemas matemáticos no solo amplía nuestra comprensión teórica, sino que también tiene importantes aplicaciones prácticas en ciencia, tecnología e ingeniería".

En concreto, como no podía ser de otra manera, Chatgpt responde a lo que ya sabíamos: un problema matemático debe formularse y resolverse en las categorías matemáticas correspondientes.

En algunos trabajos anteriores hemos hecho referencia al papel de los problemas matemáticos en el desarrollo de las Matemáticas y su impacto en la Educación Matemática (ver DOLORES *et al.* 2016, NAPOLES 2000, NAPOLES VALDES 2000, NAPOLES VALDES 2010, NAPOLES 2012, NAPOLES VALDES 2020 y NAPOLES VALDES *et al.* 2010).

Sabemos que el problema del área es a las integrales definidas, lo que el problema de la tangente y la tasa de cambio es a las derivadas.

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264, jul./dez. - Santa Maria, 2024.

Los problemas de acumulación (o cambio neto) son problemas en los que se da la tasa de cambio de una cantidad y se nos pide que calculemos el valor de la cantidad acumulada en el tiempo. Estos problemas se resuelven utilizando integrales definidas. Las derivadas son útiles cuando se nos da una cantidad y se nos pregunta por su tasa, mientras que las integrales son útiles cuando se nos da una tasa y se nos pregunta por la cantidad.

Los problemas aplicados son comunes tanto en el cálculo diferencial como en el integral. Cuando se nos presenta un problema, debemos decidir si la solución implica derivadas o integrales. Por supuesto, tomar la decisión incorrecta dará como resultado la respuesta incorrecta.

Los problemas y su resolución, así como dificultades de aprendizaje ligados a la derivación, han sido estudiados en diversos trabajos, desde diferentes puntos de vista (véase AGHAEE 2007, AZARANZ 2008, AZARANZ 2012, GHANBARI 2010, GHANBARI 2012, HASHEMI 2014, ROKNABADI 2007 Y YAZDANFAR 2006). Aquí lo abordaremos desde el punto de vista de las Matemáticas, utilizando la Historia como herramienta didáctica, lo que nos distingue de las investigaciones anteriores.

UNA DERIVADA GENERALIZADA

En Khalil *et al.* 2014 (ver también ABDELJAWAD 2015) se define, de una manera muy simple, una nueva derivada fraccionaria local llamada “conforme” dependiendo de un cierto cociente incremental como la derivada clásica.

Así, para una función $f:(0,+\infty)\to R$ la derivada conforme de orden $0<\alpha\leq 1$ de f en el punto $t>0$, fue definida por

$$T_\alpha f(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}$$

y la derivada fraccional en 0 es definida como $T_\alpha f(0)=\lim_{t\to 0}T_\alpha f(t)$.

En un trabajo del mismo año (cf. KATUGAMPOLA 2014) se define otra derivada conforme de una manera muy similar. Sea f una función de $(0,\infty)\to R$ (0,\infty), t>0 se define la derivada de orden α con $0<\alpha<1$ como la expression $D^\alpha f(t)=lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(te^{\varepsilon t^{-\alpha}}\right)-f(t)}{\varepsilon}$, como es natural, si $D^\alpha f(t)$ existe en cierto (0,a) con a>0 se define la derivada de orden α en 0 como $D^\alpha f(0)=\lim_{t\to 0}D^\alpha f(t)$.

KARCI 2015 introduce un nuevo giro cuando define una derivada general del siguiente modo, $f: R\to R$ es una función, α un número real, la derivada de orden fraccional puede considerarse como $f^\alpha(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^\alpha(t+\varepsilon)-f^\alpha(t)}{(t+\varepsilon)^\alpha-t^\alpha}$.

En TALLAFHA-ALHIHI 2016 se define una derivada para funciones reales de varias variables, tomando como base la derivada de Khalil mencionada antes.

En el trabajo SOUSA-DE OLIVEIRA 2017 se introduce un tipo de derivada fraccional truncada M para funciones α-diferenciables, sobre la base de la función de Mittag-Lefler de un parámetro de la siguiente forma:

$${}_iD_M^{\alpha,\beta}=lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t\ {}_iE_\beta\ (\varepsilon t^{-\alpha})\ \right)-f(t)}{\varepsilon},\quad 0<\alpha<1,$$

para funciones definidas de $(0,+\infty)\to R$, t>0 y β>0. La derivada en 0 se define de una manera similar a las anteriores.

Esta derivada generaliza las nociones definidas en KHALIL *et al.* 2014, KATUGAMPOLA 2014 y SOUSA-DE OLIVEIRA 2018.

En el trabajo GUZMÁN *Et al.* 2028 se abre una nueva dirección de trabajo cuando se define una nueva derivada fraccionaria local, en este caso no conforme, del siguiente modo.

Definición.

Dada una función $f:[0,+\infty) \to R$. Entonces la N-derivada de f de orden α está definida por ${}_1N^{\alpha}f(t) = lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon e^{t^{-\alpha}}\right)-f(t)}{\varepsilon}$ para todo $t>0, \alpha \in (0,1)$. Análogamente se define ${}_1N^{(\alpha)}f(0) = \lim_{t\to 0} {}_1N^{\alpha}f(t)$.

El adjetivo conforme puede ser o no apropiado, ya que esto fue inicialmente referido como una derivada fraccionaria conforme $D^{\alpha}f(t)$, cuando $\alpha \to 1$ satisface $D^{\alpha}f(t) \to f'(t)$; i.e., cuando $\alpha \to 1$, $D^{\alpha}f(t)$ preserva el ángulo de la recta tangente a la curva, mientras que en la definición anterior, este ángulo no es conservado.

En NAPOLES *Et al.* 2020 se definió una derivada generalizada de la siguiente forma (ver también FLEITAS *Et al.* 2021 y ZHOU-LOU 2017).

Definición.

Dada una función f:**R** →**R**, F una función real absolutamente continua y a∈**R**. La N-derivada generalizada de f de orden α es definida por

$$N_F^{\alpha}f(a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(a+\varepsilon F(t,\alpha)\right)-f(a)}{\varepsilon} \tag{1}$$

si el límite existe, y es llamada la derivada generalizada de f de orden $\alpha\in(0,1]$ en a.

Note que si f es diferenciable, entonces

$$N_F^{\alpha}f(a) = f'(a)F(t,\alpha), \tag{2}$$

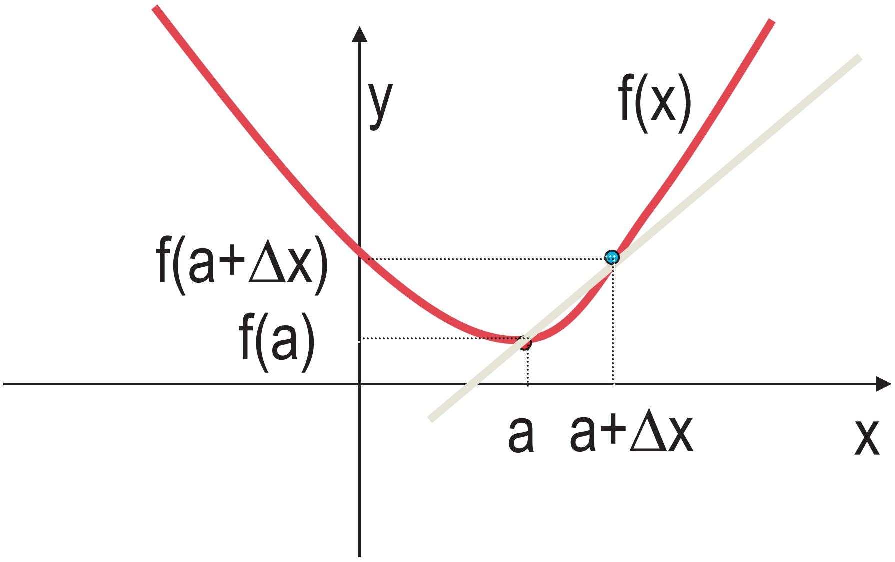
donde f'(a) es la derivada ordinaria de la función f en a.

Otras propiedades y diversas consecuencias de esta definición pueden ser consultadas en las referencias citadas. Solo queremos señalar que la relación entre la N-derivada de f y la derivada ordinaria, será básica en nuestro trabajo.

ALGUNAS DISQUISICIONES GEOMÉTRICAS

Sabemos que la secante que pasa por los puntos (a,f(a)) y (a+Δx,f(a+Δx)), viene dada por el valor $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$.

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.



Por otra parte, se dice que la función f(x) es ***derivable en el punto x_0*** si el límite del cociente incremental existe, cuando $\Delta x \to 0$, o sea, si el límite siguiente existe

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

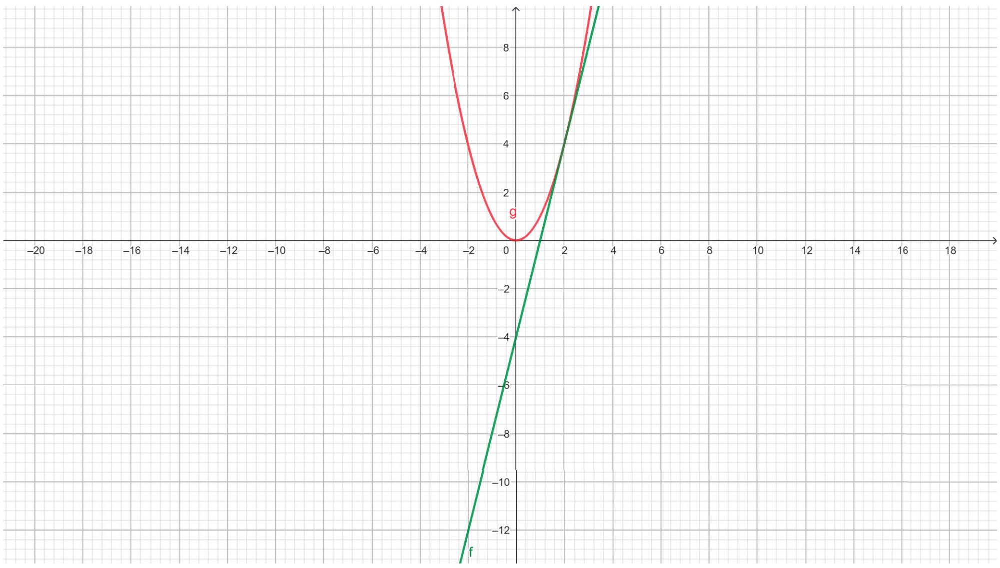
Al valor de este límite se le denomina ***derivada de la función en el punto x_0*** y se denota por uno de los símbolos $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $dy/dx\ (x_0)$, ….

O sea, este límite representa el valor de la **pendiente de la recta tangente a la curva f(x)** en el punto x_0 cualquiera, perteneciente al dominio de f(x).

De esta manera, la recta tangente puede ser construída usando la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada, en este caso la derivada de la función evaluada en el punto:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Usemos la ecuación anterior para construir la recta tangente a la curva $y=x^2$ en el punto $x_0=2$, de donde $y_0=4$. Como $m=f'(2)=4$, tenemos:



VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

Con ®Geogebra en línea, se puede graficar muy fácilmente, tanto la función $y=x^2$, como la recta tangente

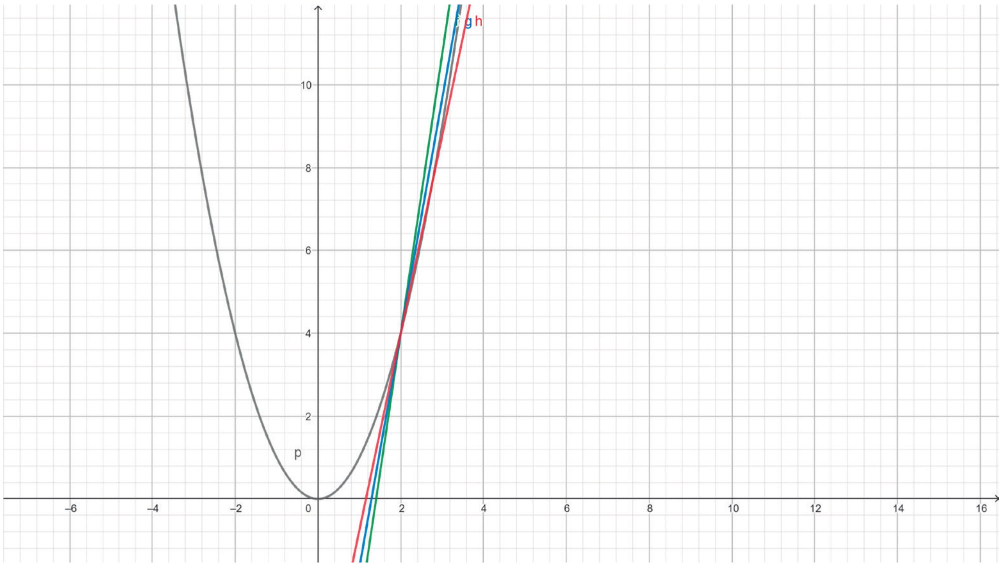
$$y=4x-4. \tag{4}$$

Ahora vamos a usar (2), para graficar diversas rectas “tangentes” generalizadas a la curva $y=x^2$. Para ello, usaremos los núcleos $F(x,\alpha)$ siguientes:

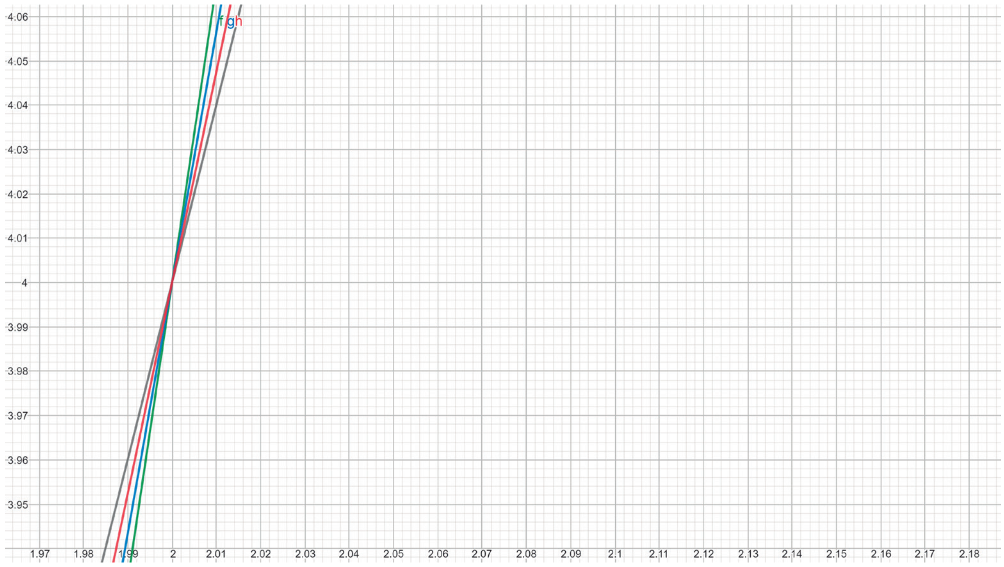
1. $x^{1-\alpha}$, conforme
2. $e^{(1-\alpha)x}$, conforme
3. $e^{x-\alpha}$, no conforme
4. x^{α}, no conforme

para valores de $\alpha=0.25$, 0.5, 0.75 y compararemos los resultados obtenidos con la recta tangente “clásica” obtenida dada por (4).

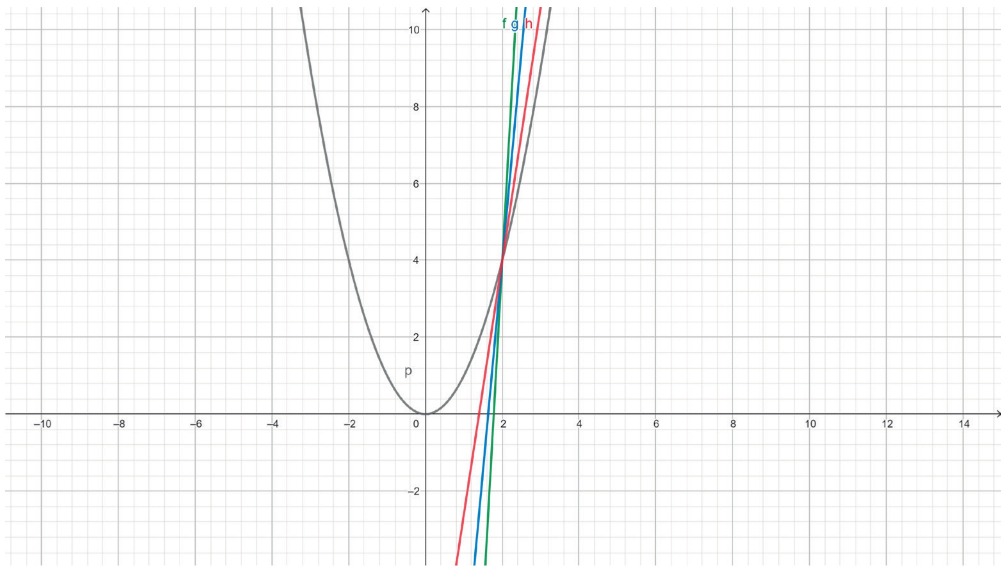
Caso 1 - En este tenemos que $N_F^{\alpha}(x^2) = x^{1-\alpha}2x = 2x^{2-\alpha}$, por lo tanto, la tangente generalizada tiene la ecuación $y=2^{3-\alpha}x-2^{4-\alpha}-4$, de donde se tienen los siguientes gráficos:



Donde en la recta tangente de color verde, $\alpha=0.25$; azul 0.5 y rojo 0.75, quiere hacer notar que ninguna de las rectas construidas, son rectas tangentes! Todas cortan la gráfica de la función y “pasan” del exterior al interior de la parabola, lo que se puede apreciar mejor en el siguiente gráfico (el color negro es el gráfico de $y=x^2$):

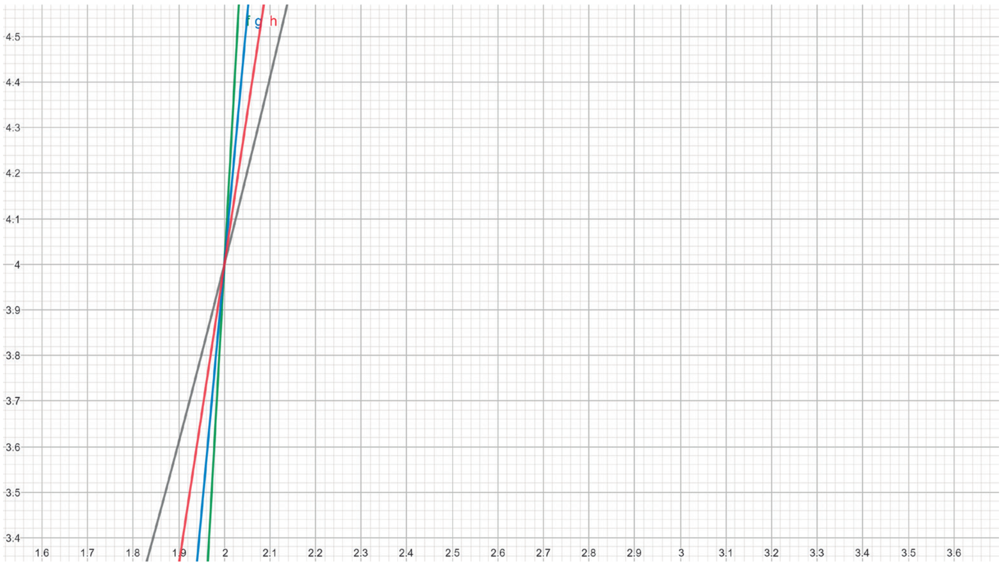


Caso 2 - En este tenemos que $N_F^{\alpha}(x^2) = e^{(1-\alpha)x}2x$, por lo tanto la tangente generalizada tiene la ecuación $y=4e^{2(1-\alpha)}x+4(1-2e^{2(1-\alpha)})$, de donde se tienen los siguientes gráficos:

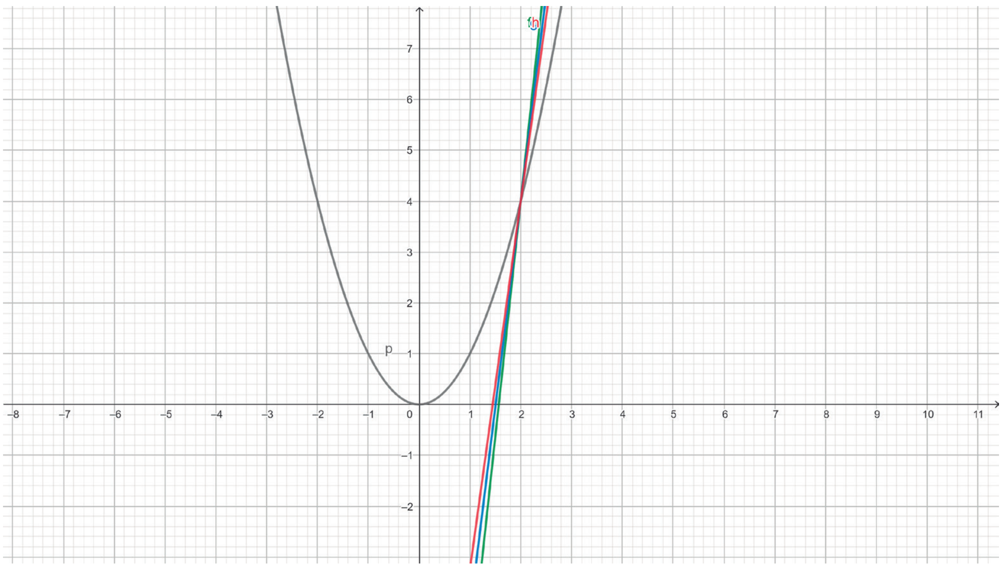


Como en el caso anterior, ninguna de las rectas es tangente a la curva! Lo que se puede apreciar major en el siguiente gráfico (como antes, el color negro está representando la parabola):

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

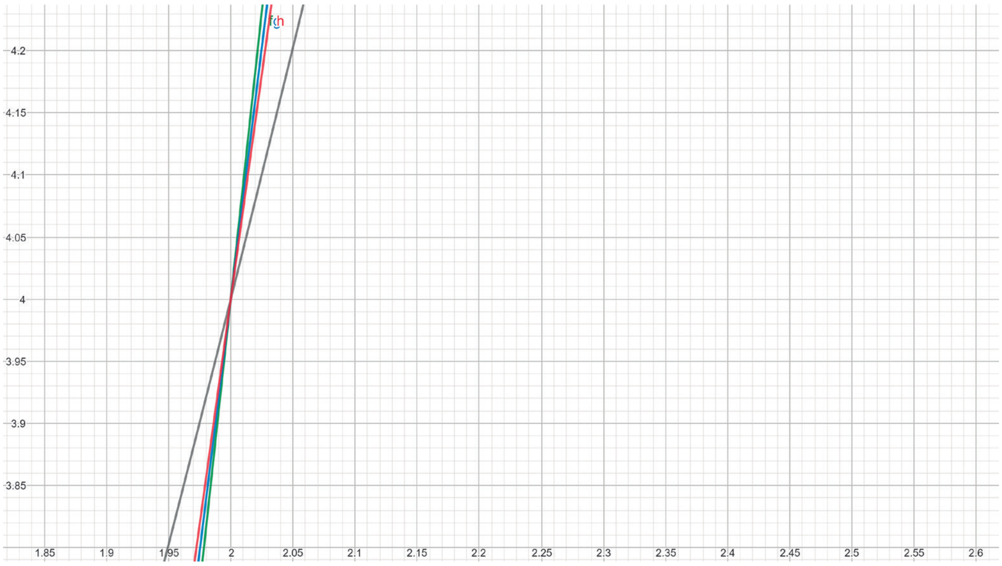


Caso 3 - En este tenemos que $N_F^\alpha(x^2) = e^{x^{-\alpha}}2x$, por lo tanto la tangente generalizada tiene la ecuación $y = 4e^{2^{-\alpha}}x + 4(1 - 2e^{2^{-\alpha}})$, de donde se tienen los siguientes gráficos:

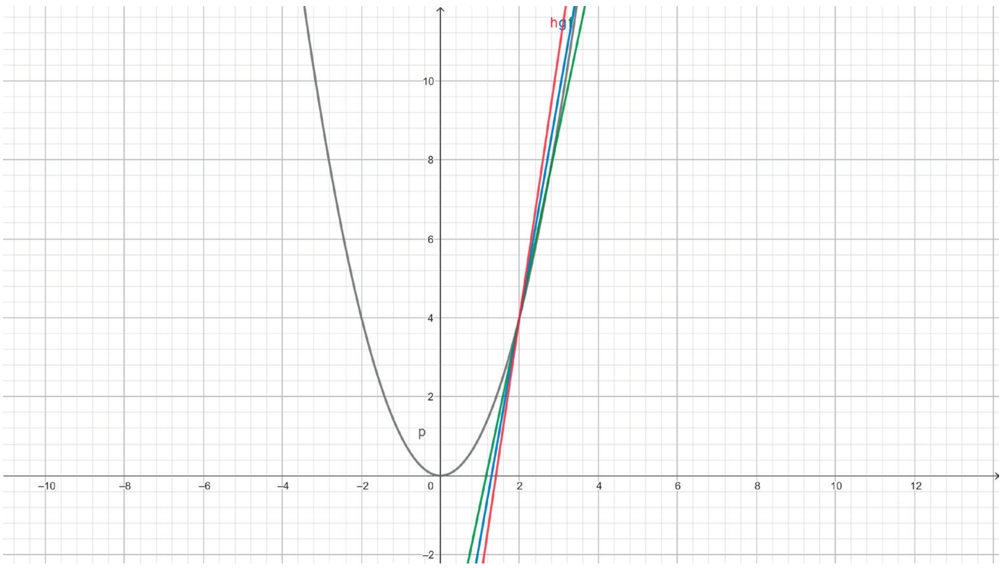


En este caso el comportamiento de las rectas construidas es mucho más claro que antes, es decir, Cruzan la gráfica de la parabola y se separan “más rápidamente” que antes. Veámoslo con más detalle:

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264, jul./dez. - Santa Maria, 2024.



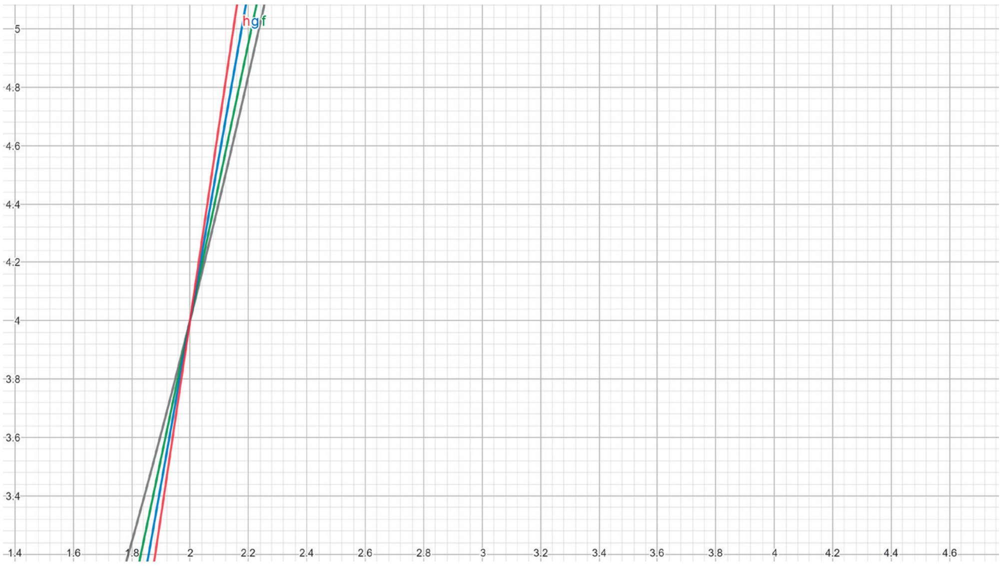
Caso 4 - En este tenemos que $N_F^\alpha(x^2) = 2x^{1+\alpha}$, por lo tanto la tangente generalizada tiene la ecuación $y=2^{2+\alpha}x+4(1-2^{1+\alpha})$, de donde se tienen los siguientes gráficos:



En este caso las rectas construidas tienen un comportamiento completamente distinto a los casos anteriores, son secantes! Veámoslo mejor:

VIDYA

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 247-264,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.



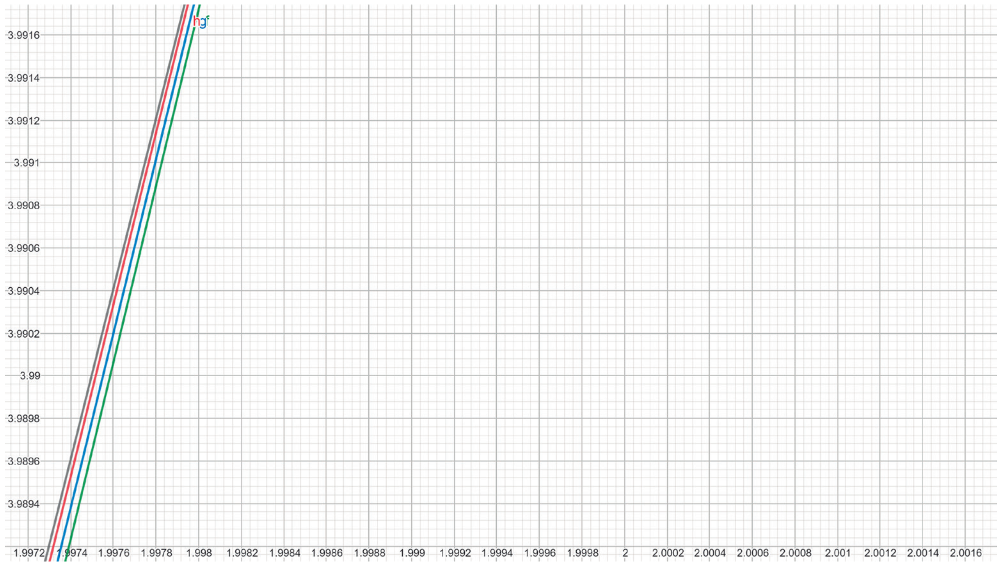
¿Por qué sucede esto? Antes de entrar en mayores detalles, les recuerdo que en el sentido estricto de la palabra, no estamos construyendo una recta tangente, estamos construyendo rectas, con pendientes que son el resultado de multiplicar la pendiente de la recta tangente “clásica” por un factor que es la función F(t,α), obviamente si este factor es distinto de 1, no se obtendrá la derivada de la función evaluada en el punto, o sea, no tendremos la pendiente de la recta tangente a la curva!

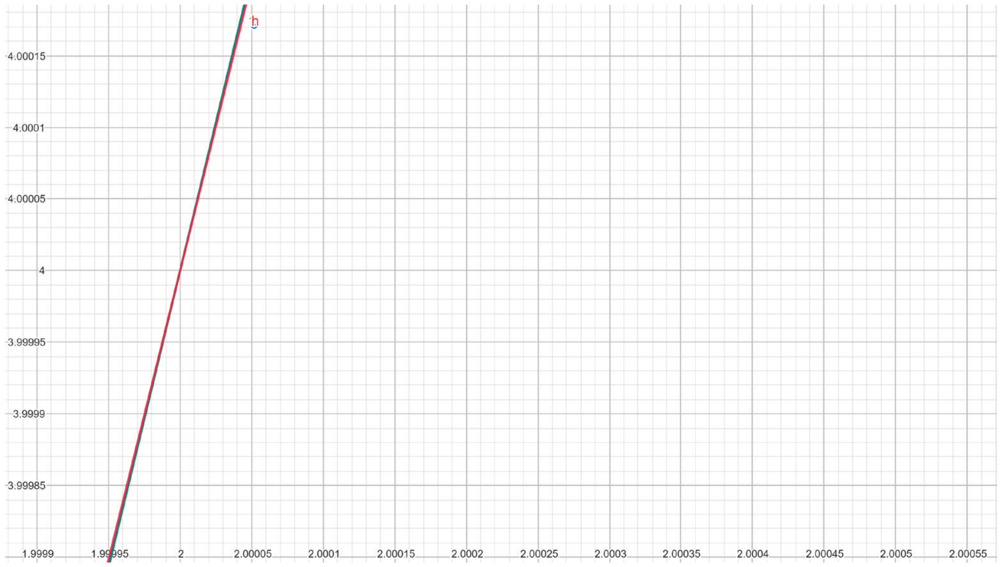
Más claro, comparemos las ecuaciones de las rectas “tangentes”: clásica y generalizada:

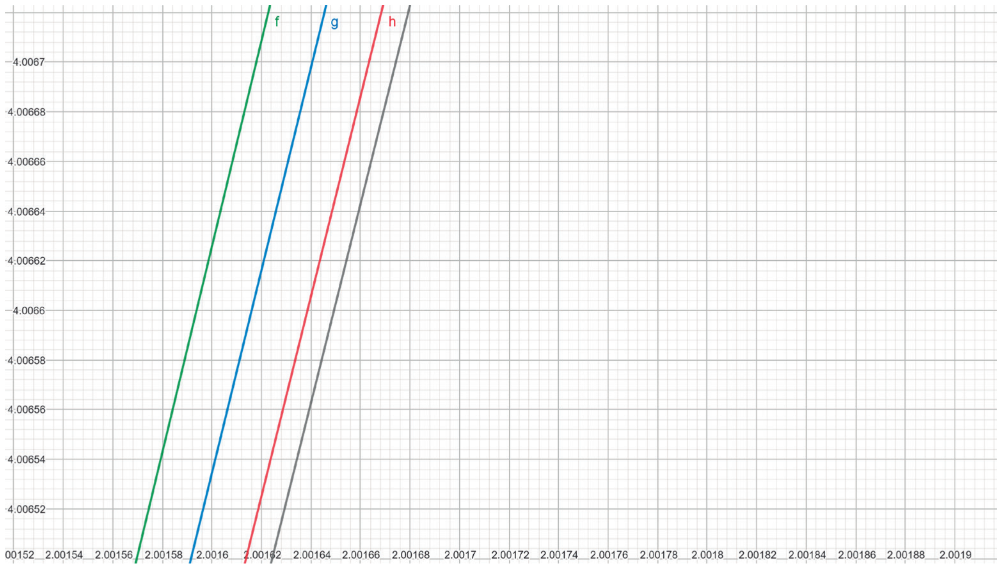
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{5}$$

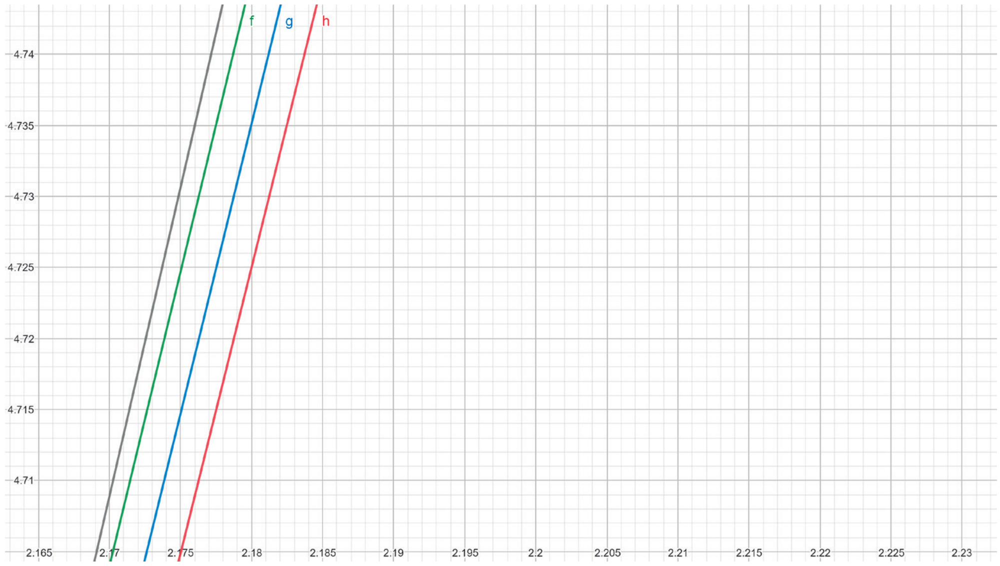
$$\begin{gathered} y - y_0 = N_F^{\alpha} f(x_0)(x - x_0), \text{ o sea} \\ y - y_0 = F(x_0, \alpha) f'(x_0)(x - x_0). \end{gathered} \tag{6}$$

Lo anterior se ilustra claramente con la comparación de las ecuaciones (5) y (6), debemos aclarar que si el núcleo F(t,α) es conforme, o sea, si cuando $\alpha \to 1$ se tiene $F(t,\alpha) \to 1$, entonces (6) se convierte en (5), lo que sucede en los casos 1 y 2 anteriores. Por simplicidad, usemos el caso 1, para valores de α próximos a 1. Aun usando los valores de α de 0.95 (verde), 0.97 (azul) y 0.99 (rojo), siendo el gráfico de $y=x^2$ en negro, se siguen comportando como secantes, esto se deriva de la noción de límite que tan bien conocemos.


h
g
f
3.9916
3.9914
3.9912
3.991
3.9908
3.9906
3.9904
3.9902
3.99
3.9898
3.9896
3.9894
1.9972
1.9974
1.9976
1.9978
1.998
1.9982
1.9984
1.9986
1.9988
1.999
1.9992
1.9994
1.9996
1.9998
2
2.0002
2.0004
2.0006
2.0008
2.001
2.0012
2.0014
2.0016


h
4.00015
4.0001
4.00005
4
3.99995
3.9999
3.99985
1.9999
1.99995
2
2.00005
2.0001
2.00015
2.0002
2.00025
2.0003
2.00035
2.0004
2.00045
2.0005
2.00055


f
g
h
4.0067
4.00668
4.00666
4.00664
4.00662
4.0066
4.00658
4.00656
4.00654
4.00652
00152
2.00154
2.00156
2.00158
2.0016
2.00162
2.00164
2.00166
2.00168
2.0017
2.00172
2.00174
2.00176
2.00178
2.0018
2.00182
2.00184
2.00186
2.00188
2.0019



¿En qué pueden ayudarnos estos ejemplos geométricos?

Primero, en la propia definición de recta tangente a la curva y de recta secante obvio. Recordemos: la pendiente de una curva en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto. La recta tangente en un punto que toca la curva es, por definición, la recta que toca el borde de la curva (sin cortarla) en ese punto (COURANT 1988).

Segundo, vayamos a la ecuación (1), multiplicando y dividiendo por F(t,α):

$$N_F^{\alpha} f(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\mathrm{a}+\varepsilon F(t,\alpha)\right)-f(\mathrm{a})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} F(t,\alpha) \frac{f\left(\mathrm{a}+\varepsilon F(t,\alpha)\right)-f(\mathrm{a})}{\varepsilon F(t,\alpha)},$$

de aquí se tiene, por propiedades de límites:

$$N_F^{\alpha} f(a) = F(t,\alpha) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\mathrm{a}+\varepsilon F(t,\alpha)\right)-f(\mathrm{a})}{\varepsilon F(t,\alpha)}$$

y haciendo el cambio de variables h=εF(t,α) tenemos:

$$N_F^{\alpha} f(a) = F(t,\alpha) \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathrm{a}+\mathrm{h})-f(\mathrm{a})}{h} = F(t,\alpha) f'(a)$$

o sea, la ecuación (2). El factor F(t,α) que puede ser entendido solo como un *término que aumenta o* disminuye la “velocidad” en la que el punto a+ε F(t,α) se aproxima al punto a, va mucho *más* allá, cuando vemos su trascendencia en el caso de la recta tangente.

¿Qué pasó en la historia?

En la *década de 1630, Fermat* desarrolló la *técnica de* la adecuación para calcular tangentes y otros problemas de análisis y la utilizó para calcular tangentes a la parábola. La técnica de la adecuación es similar a tomar la diferencia entre f(a+h) y f(a) y dividirla por una potencia! de h. De forma independiente, Descartes utilizó su *método de* normales basado en la observación de que el radio de un *círculo* siempre es normal al círculo mismo (ver KATZ 2008, p. 510).

Estos *métodos* llevaron al desarrollo del *cálculo diferencial* en el siglo XVII. Muchos contribuyeron: Roberval descubrió un *método general para* dibujar tangentes, al considerar una curva como la descrita por un punto en movimiento cuyo movimiento es el resultado de varios movimientos *más simples* (WOLFSON, 2001), René-François de Sluse y Johannes Hudde encontraron algoritmos algebraicos para encontrar tangents (KATZ, 2008, p. 512-514). Otros desarrollos incluyeron los de John Wallis e Isaac Barrow, que condujeron a la teoría de Isaac Newton y Gottfried Leibniz. Hoy esto se expresa como: la tangente a una curva en un punto a de la curva es el límite de la recta que pasa por dos puntos de la curva (a y a+h) cuando estos dos puntos tienden a confundirse, o sea, cuando $h \to 0$ (mayores detalles pueden ser consultados en Coolidge, 1951, y Skinner, 2015).

En los casos presentados, nunca se confunden los puntos!

CONCLUSÕES

Hemos presentado algunos recursos geométricos, vinculados con los elementos de la Historia de la Matemática que soportan nuestras practices pedagógicas. El uso de estos recursos para comnsolidar el concepto de recta tangente es importante no solo para que nos demos cuenta de muchos aspectos positivos, sino también para identificar algunos obstáculos a superar.

Estamos convencidos que el contacto con la evolución histórica del concepto y sus simulaciones geométricas utilizando la derivada generalizada, permite a nuestros alumnos comprenderlo en profundidad: interiorizaron el concepto, construyeron imágenes conceptuales *más claras,* lograron una definición correcta del concepto en su mente e incluso obteniendo mejores resultados en su desempeño académico.

REFERÊNCIAS

ABDELJAWAD, T. On conformable fractional calculus, **J. of Computational and Applied Mathematics** 279 (2015). p. 57-66.

AGHAEE, M. Investigation of Controlling Abilities for Solving Problem in Infinite Integral. **Unpublished Master Thesis.** Shahid BahonarUniversity, Iran (2007).

AZARANG, Y. Learning of Calculus With Concepts of Limit and Symbolic. **Iranian Mathematics Education Journal**. 27(1): 2008, p. 4-10.

AZARANG, Y. Quality of Leaning Calculus in Iran. **Roshd Mathematics Education Journal**, 27(1): 2012, p. 24-30

ARRIGO, G.; D'AMORE, B.; SBARAGLI, S. INFINITOS INFINITOS. Historia, filosofía y did+actica del infinito matemático, **Colecciones: Didácticas**, Editorial: Magisterio, Bogotá, 2011

BISHOP, A. J. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 11, n. 1-2, p. 7-16, 1989.

COOLIDGE, J. L. The Story of Tangents, **The American Mathematical Monthly**, v. 58, n. 7 (Aug.-Sep., 1951). DOI: 10.2307/2306923

COURANT, R. **Differential and Integral Calculus**, Volume 1, John Wiley & Sons, 1988.

CUNNINGHAM, S. The visualization environment for mathematics education. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Eds.). **Visualization in teaching an learning mathematics**. Washington, USA: *Mathematical Association of America*, 1991. p. 67-76.

D'AMORE, B. **Didáctica de la matemática**, Editorial Magisterio, Bogotá, 2021 ISBN 9789582014056

DOLORES F., C.; GARCÍA P. , M.; NÁPOLES V., J. E.; SIGARRETA A., J. M. AN APPROACH TO THE HISTORY OF MATHEMATICS, **Far East Journal of Mathematical Education** Volume 16, Issue 3, Pages 331 - 346 (August 2016).

FLEITAS, A.; NÁPOLES, J. E.; RODRÍGUEZ, J. M.; SIGARRETA, J. M. NOTE ON THE GENERALIZED CONFORMABLE DERIVATIVE, **Revista de la Unión Matemática Argentina**, Volume 62, no. 2 (2021), 443-457 https://doi.org/10.33044/revuma.1930

GHANBARI, G. Looking to Change of Calculus in Iran. **Mathematics Education Journal**, 27(1): 2010, 59- 61.

GHANBARI, G. Drwing Figures as a Problem Solving Method. **Roshd Mathematics Education Journal**, 27(1): 2012, 38- 41.

GUZMÁN, P. M.; LANGTON, G.; LUGO MOTTA, L.; MEDINA, J.; NÁPOLES V., J. E. A New definition of a fractional derivative of local type, **Journal of Mathematical Analysis**, 9(2) (2018), 88-98.

HASHEMI, N.; ABU, M. S.; KHASHEFI, H.; RAHIMI, K. Undergraduate Students' Difficulties in Conceptual Understanding of Derivation, **Procedia - Social and Behavioral Sciences** 143 (2014) p. 358-366.

JABLONKA, J.; KLISINSKA, A. A note on the institutionalization of mathematical knowledge or, ``What was and is the Fundamental Theorem of Calculus, really?". In: B. Sriraman (Ed.) Crossroads in the History of Mathematics and Mathematical Education, **The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education**, Monograph 12, 2012.

KARCI, A. Chain Rule for Fractional Order Derivatives. **Science Innovation**, v. 3, n. 6, 2015, p. 63-67.

KATUGAMPOLA, U. N. **A new fractional derivative with classical properties**, arXiv:1410.6535v2 [math.CA] 8 Nov 2014

KATZ, V. J. **A History of Mathematics** (3rd ed.), Addison Wesley 2008, p. 510. ISBN 978-0321387004.

KHALIL, R., AL HORANI, M., YOUSEF, A., SABABHEH, M. A new definition of fractional derivative. **J. Comput. Appl. Math.**, 264, 2014, p. 65-70.

KLINE, M. **Matemáticas.** La pérdida de la certidumbre, Editorial Siglo XXI de España, 2006 ISBN 968-23-1939-0

NÁPOLES V., J. E. La resolución de problemas en la escuela. Consejos preliminares, **Revista Función Continua** 8 (2000), 21-42.

NÁPOLES VALDES, J. E. La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones, **Educação Matemática em Revista-RS**, 2(2000), 51-65.

NÁPOLES VALDÉS, J. E. **De las cavernas a los fractales.** Conferencias de historia de la Matemática, Universidad Pedagógica de Holguín, Cuba, 1996, 283 p. Editado por la Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional, 2008 ISBN 978-987-26665-9-0, ISBN 978-987-27056-0-2

NÁPOLES VALDES, J. E. Los problemas. El hilo de Ariadna en la Historia de la Matemática, **Revista del Instituto de Matemática**, 6(12), 2010, p. 45-70.

NÁPOLES V., J. E. Some reflections on mathematics and mathematicians. Simple questions, complex answers, **The Mathematics Enthusiast**, v. 9, n. 1&2, 2012, p. 221-232.

NÁPOLES VALDES, J. E. SOME REFLECTIONS ON THE PROBLEMS AND THEIR ROLE IN THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS, **Qualitative Research Journal**. São Paulo (SP), v.8, n.18, p. 524-539, ed. especial. 2020 524 Special Edition: Philosophy of Mathematics

NÁPOLES VALDES, J. E.; GONZALEZ THOMAS, A.; Genes, F.; BASABILBASO, F.; BRUNDO, J. M. El enfoque histórico--problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, **Acta Scientae**, v. 6, n. 2 (2004), 41-59.

NÁPOLES VALDÉS, J. E.; GUZMÁN, P. M.; LUGO, L. M. Some New Results on Nonconformable Fractional Calculus, **Advances in Dynamical Systems and Applications**, v. 13, n. 2, 2018, p. 167-175.

NÁPOLES VALDÉS, J. E.; GUZMÁN, P. M.; LUGO, L. M.; KASHURI, A. The local generalized derivative and Mittag Leffler function, **Sigma J Eng & Nat Sc**i 38 (2), 2020, p. 1007-1017

ODIFREDDI, P. **La matemática del siglo XX.** De los conjuntos a la complejidad, Buenos Aires, Katz 2006 ISBN 987-1283-17-2

ROKNABADI, H. A. Varieties of Conceptual Understanding: Different Theories. **Unpublished Master Thesis**. Shahid Bahonar University, Iran, 2007.

SÁNCHEZ, C.; VALDÉS, C. **De los Bernoulli a los Bourbaki.** Una historia del arte y la ciencia del cálculo, Ed. Nivola. Madrid, 2004 ISBN: 84-95599-70-8

SKINNER, L. **The World Before Calculus:** Historical Approaches to the Tangent Line Problem (2015). WWU Honors Program Senior Projects. 13. Disponible en https://cedar.wwu.edu/wwu_honors/13

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Eds.) **Theories of mathematics education:** seeking new frontiers. (Springer series: advances in mathematics education), Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2010 ISBN: 978-3-642-00741-5

TALLAFHA, A.; AL HIHI, S. Total and directional fractional derivatives, **Intern.l J. Pure and Applied Math.**, v. 107, n. 4, 2016, p. 1037-1051

SOUSA, J. V. C.; DE OLIVEIRA, E. C. **A new truncated M-fractional derivative type unifying some fractional derivative types with classical properties**, arXiv:1704.08187 [math.CA], 2017.

SOUSA, J. V. C.; DE OLIVEIRA, E. C. M-fractional derivative with classical properties, **Inter. of Jour. Analy. and Appl.**, 16 (1) (2018), p. 83-96.

WOLFSON, P. R. The Crooked Made Straight: Roberval and Newton on Tangents, **The American Mathematical Monthly** 108 (3): p. 206-216 2001 DOI: 10.2307/2695381

YAZDANFAR, M. Investigation of Studying Skills in Calculus for Undergraduate. **Unpublished Master Thesis**. Shahid Bahonar University. Iran, 2006.

ZHAO, D.; LUO, M. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. **Calcolo** 54(2017), p. 903-917. http://dx.doi.org/10.1007/s10092-017-0213-8