

**GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA:  
REFLEXÕES DE PROFESSORAS FORMADORAS EXPERIENTES NO ENSINO DE GEOMETRIA***NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES IN MATHEMATICS TEACHER EDUCATION:  
REFLECTIONS FROM EXPERIENCED TEACHER EDUCATORS IN GEOMETRY TEACHING**GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS:  
REFLEXIONES DE PROFESORAS FORMADORAS EXPERIMENTADAS EN  
LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA***BEATRIZ DOS SANTOS SILVA<sup>1</sup>**  
**MÁRCIA CRISTINA DE COSTA TRINDADE CYRINO<sup>2</sup>****RESUMO**

Este artigo objetiva discutir pontos de enfoque de reflexões manifestadas por professoras experientes no ensino de geometria a respeito das Geometrias não Euclidianas (GNE) na formação de professores de matemática (PMat). Esta pesquisa é de natureza qualitativa de cunho interpretativo e para obter as informações foi solicitada às participantes a produção de narrativas escritas acerca dessa temática. No processo analítico, foram identificados três pontos de enfoque, nomeadamente: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios inerentes à inclusão de GNE na formação de PMat; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos. Esses pontos de enfoque tratam de aspectos considerados, pelas professoras, como relevantes para serem considerados em programas de formação. Conclui-se que o debate a respeito desses aspectos pode proporcionar ampliação de horizontes conceituais, permitindo uma compreensão abrangente do espaço e das propriedades geométricas; desenvolvimento do pensamento crítico em relação à matemática; preparação para desafios educacionais, considerando diferentes abordagens e recursos; e incentivo à curiosidade e à exploração.

**Palavras-chave:** formação de professores de matemática; geometrias não euclidianas; ensino de geometria.

**ABSTRACT**

*This article aims to discuss focal points of the reflections expressed by experienced teachers in the teaching of geometry regarding Non-Euclidean Geometries (NEG) in the education of Math Teachers (MaT). This qualitative research with an interpretive approach involved requesting participants to produce written narratives on this topic. The analytical process identified three focal points: justifications for incorporating NEG in MaT education; challenges inherent in including NEG in MaT training; and suggestions for methodologies, approaches, and teaching resources. These focal points address aspects deemed relevant by the teachers for inclusion in training programs. The conclusion is that the debate on these aspects may contribute to broadening conceptual horizons, allowing for a comprehensive understanding of space and geometric properties; foster critical thinking about mathematics; prepare for educational challenges by considering different approaches and resources; and encourage curiosity and exploration.*

**Keywords:** non-euclidean geometries; mathematics teacher's education; geometry teaching.

<sup>1</sup> Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora de matemática na educação básica do estado do Paraná. E-mail: beatriz.tobias@uel.br. ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1191-9705>.

<sup>2</sup> Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo. Professora Titular do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da UEL. E-mail: marciacyrino@uel.br. ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4276-8395>.

## RESUMEN

*Este artículo tiene como objetivo discutir los puntos de enfoque de las reflexiones expresadas por profesoras experimentadas en la enseñanza de la geometría sobre las Geometrías no Euclidianas (GNE) en la formación de profesores de matemáticas (PMat). Esta investigación cualitativa de enfoque interpretativo solicitó a las participantes la producción de narrativas escritas sobre este tema. En el proceso analítico, se identificaron tres puntos focales: justificaciones para el trabajo con GNE en la formación de PMat; desafíos inherentes a la inclusión de GNE en la formación de PMat; y sugerencias de metodologías, enfoques y recursos didácticos. Estos puntos focales abordan aspectos considerados relevantes por las profesoras para ser incluidos en los programas de formación. Se concluye que el debate sobre estos aspectos puede contribuir a ampliar los horizontes conceptuales, permitiendo una comprensión amplia del espacio y las propiedades geométricas; desarrollan el pensamiento crítico en relación con las matemáticas; preparan para los desafíos educativos, considerando diferentes enfoques y recursos; y fomentan la curiosidad y la exploración.*

**Palabras-clave:** *geometrías no euclidianas; formación de profesores de matemáticas; enseñanza de geometría.*

## INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana (GE) é um dos diversos campos de conhecimento da matemática que nos permitem compreender o espaço e construir modelos que o represente.

Durante séculos, essa abordagem geométrica foi a referência predominante para o estudo das propriedades e relações espaciais, abrangendo forma, posição dos objetos, dentre outros. Porém, a GE encontra algumas limitações, quando nos referimos, por exemplo, a observações astronômicas e a objetos com padrões irregulares e/ou fragmentados. Diante destas e outras situações, as Geometrias não Euclidianas (GNE) tornam-se relevantes e oferecem novos meios de se explorar, descrever e analisar o mundo.

Nos últimos anos, o debate sobre o ensino de geometria passou a considerar a inserção de GNE no currículo da educação básica (EB) (Carvalho; Azevedo, 2020; Leivas; Portella; Souza, 2017; Padilha; Moran, 2023). A inclusão de GNE em Diretrizes Curriculares Estaduais, como nos estados do Paraná (2008), Ceará (2008) e São Paulo (2011), suscitou debates sobre aspectos a serem considerados na formação de professores de matemática (PMat) para a atuação na EB, destacando a necessidade de sua incorporação na formação inicial e continuada desses profissionais (Gomes; Araman; Rocha, 2017; Leivas, 2014). Foram considerados nesse debate: a expertise necessária ao PMat para trabalhar com GNE na EB; conexões dessas geometrias com elementos históricos (Araman; Gomes, 2020); possibilidades para mitigar lacunas da formação inicial dos professores em relação à geometria (Gomes; Araman; Rocha, 2017); demandas educacionais e tecnológicas do século XXI (Kaleff, 2007); a compreensão de interfaces e conexões entre a GE e as GNE (Altoé *et al.*, 2022); dentre outras temáticas. Porém, ainda são poucas as pesquisas que consideram as GNE em contextos de formação de PMat (Cybulski, 2022).

Uma vez que a formação do PMat é crucial para a efetivar abordagens que levem em conta a GNE na EB, ouvir considerações de formadoras experientes no ensino de geometria a respeito dessa temática pode promover reflexões significativas para propor ações formativas. Para tanto, analisamos as narrativas produzidas por três formadoras experientes<sup>3</sup> acerca do trabalho com GNE na formação de PMat. Elas foram consideradas formadoras experientes por serem reconhecidas por seus pares como formadoras de professores que são protagonistas de seus processos de aprendizagem

<sup>3</sup> A perspectiva de experiência que assumimos será tratada na seção de "Encaminhamentos Metodológicos".

profissional e por apresentarem, em sua atividade profissional e acadêmica, características que demonstram capacidade de formação e de transformação em relação ao ensino de geometria (Oliveira; Cyrino, 2023).

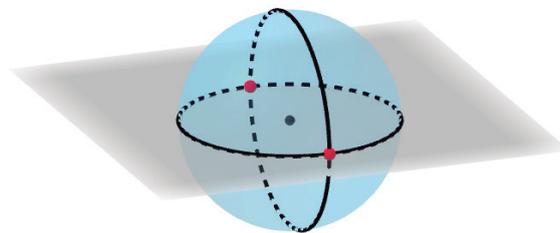
Na sequência, tecemos algumas considerações sobre as GNE na formação de PMat. Posteriormente, apresentamos os encaminhamentos metodológicos, as análises, as discussões dos resultados e, por fim, as considerações finais.

## GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Apesar de as GNE integrarem as diretrizes curriculares de alguns estados, Júnior (2020), a partir de um mapeamento de cursos de licenciatura em Matemática de universidades públicas brasileiras, concluiu que a sua presença ainda é tímida nos currículos (15, 32%) de formação de professores. Por conseguinte, Lovis e Franco (2015) indicaram que conhecimentos de GNE, em geral, não integram as concepções de PMat. No entanto, esses autores levantaram a hipótese de que essas concepções estão sendo transformadas e formadas em formações continuadas a partir da inclusão de GNE na EB.

Ao pensar o trabalho com as GNE na formação de PMat, devemos considerar as divergências entre essas geometrias e a GE. Neste artigo, tomamos GNE como as geometrias que divergem de um ou mais postulados da GE, como acontece nas Geometrias Esférica, Hiperbólica, Elíptica e Projetiva, ou que utilizam conceitos fundamentais diferentes dos euclidianos (como “dimensão” na Geometria Fractal<sup>4</sup> e “medida” na Geometria do Táxi. Por exemplo, o termo “paralelas” pode ser associado, automaticamente, ao conceito de retas paralelas da GE, pois é a forma mais comum e inicial com a qual estudantes são apresentados à noção de paralelismo na matemática. Eles aprenderam que retas paralelas são aquelas que “nunca se encontram”, mantêm uma distância constante entre si e se prolongam indefinidamente. Essa ideia é válida segundo o quinto postulado<sup>5</sup> da GE. Porém, quando consideramos que não existem retas paralelas a uma dada reta através de um ponto externo, estamos considerando princípios que constituem a Geometria Esférica. Nessa geometria, são consideradas retas apenas os círculos máximos da superfície (Coutinho, 2015). Esse fato faz com que quaisquer duas retas construídas sobre a superfície esférica sempre se encontrem em dois pontos diametralmente opostos (Figura 1).

Figura 1 - Retas na Geometria Esférica.



Fonte: As autoras (2024)

4 Trabalhos que classificam a Geometria Fractal como uma GNE: Leivas (2013); Borges e Pereira (2017); e Sousa, Guerra e Nunes (2024). As DCE do estado do Paraná (2008) indicaram, no conteúdo estruturante “Geometrias”, os Fractais como parte do tópico “Noções de Geometrias Não-Euclidianas”.

5 O 5.º postulado da GE passou por várias reelaborações. Por exemplo, John Playfair descreve: “sejam dados, em um plano, uma reta AB e um ponto P que não está no plano, então existe uma e só uma paralela a AB passando por P”. A partir dessa escrita, o 5º postulado passou a ser chamado de “postulado das paralelas” (Sachs, 2016, p. 16).

A problematização pode ser feita a partir da imagem da Figura 1. A inexistência de retas paralelas na Geometria Esférica contrasta com a noção de paralelismo e de retas da GE. A partir da problematização da noção convencional de reta como uma linha que se estende em ambas direções indefinidamente, desafia-se a intuição construída a partir da GE e reinterpreta-se conceitos geométricos fundamentais.

É necessário pensar a formação de PMat como um processo complexo, dinâmico e infindo que engloba a interação de vários elementos. O estudo de GNE em contextos de formação de PMat pode ter um impacto positivo para entender os elementos da própria GE (Souza, 2022), ao permitir que sejam atribuídos diferentes sentidos aos conceitos de reta, paralelismo e soma dos ângulos internos de um triângulo, o que amplia a sua compreensão, quando constituídos no modelo geométrico euclidiano (Júnior, 2020). Ademais, o trabalho com GNE pode “contribuir para uma nova dimensão à prática pedagógica do professor, pois ele pressupõe o desenvolvimento de processos de argumentação, de formulação de conjecturas e de desenvolvimento do raciocínio dedutivo” (Cabariti; Jahn, 2006).

Esse fato tem o potencial de auxiliar o (futuro) professor em formação a compreender a evolução dos tratamentos axiomáticos em geometria e como isso se relaciona com o desenvolvimento da própria matemática (SBEM, 2013).

## ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigação<sup>6</sup>, qualitativa de cunho interpretativo (Erickson, 1986), tem como objetivo discutir pontos de enfoque de reflexões manifestadas por professoras formadoras a respeito da GNE na formação de PMat. Para tanto, foram convidadas três professoras experientes no ensino de geometria, as quais foram escolhidas por terem trabalhado ou por trabalharem com a formação de PMat no estado do Paraná, que sinalizou as GNE em suas Diretrizes Curriculares; por terem desenvolvido projetos e publicações relacionados ao ensino de geometria; por terem orientado dissertações/teses/iniciações científicas relacionadas à geometria; e por terem interesse por GNE. Não nos preocupamos com a representatividade numérica de professores investigados, pois não temos pretensão de tecer generalizações relacionadas ao trabalho com GNE em contextos de formação de PMat e, sim, discutir reflexões de formadoras consideradas experientes<sup>7</sup> no ensino de geometria. Na perspectiva de Jorge Larrosa (2002, p. 24):

a experiência, a possibilidade de que algo nos aconteça ou nos toque, requer um gesto de interrupção, um gesto que é quase impossível nos tempos que correm: requer parar para pensar, parar para olhar, parar para escutar, pensar mais devagar, olhar mais devagar, e escutar mais devagar; parar para sentir, sentir mais devagar, demorar-se nos detalhes, suspender a opinião, suspender o juízo, suspender a vontade, suspender o automatismo da ação, cultivar a atenção e a delicadeza, abrir os olhos e os ouvidos, falar sobre o que nos acontece, aprender a lentidão, escutar aos outros, cultivar a arte do encontro, calar muito, ter paciência e dar-se tempo e espaço.

6 Aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Londrina (parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

7 As professoras atuam/atuearam no estado do Paraná, o qual incluiu tópicos de GNE no currículo da EB (Paraná, 2008). Elas têm/tiveram participação ativa na área de Educação Matemática, tanto em escolas da EB quanto em Universidades públicas, envolvendo-se em cursos de graduação, programas de pós-graduação, projetos de extensão, grupos de pesquisa e eventos acadêmicos da área.

A experiência, portanto, é aquilo que “nos passa, que nos acontece, o que nos toca.” (Larrosa, 2002, p. 21). As três professoras escolhidas, Loreni, Marie-Claire e Mariana<sup>8</sup>, apresentam essas características e foram convidadas pela primeira autora deste artigo a participar desta investigação (Quadro 1).

**Quadro 1** - Formação e atuação profissional das professoras participantes.

Professora	Formação	Atuação Profissional	
		Educação Básica	Ensino Superior
Loreni	Licenciatura em Matemática (1991) (UEL); Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática (2004) (UEL); Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática (2014) (UEL).	28 anos	16 anos
Marie-Claire	Licenciatura em Matemática (1976) (UEPG); Graduação em Engenharia Civil (1980) (UEL); Mestrado em Estatística (1989) (UEL); Doutorado em Tecnologia de Ensino (2000) (Université Laval).	4 anos	26 anos
Mariana	Graduação em Matemática (2004) (UEM); Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática (2010) (UEM); Doutorado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática (2015) (UEM).	-	Desde 2008

Fonte: As autoras (2024)

Loreni atuou como professora formadora nos cursos de licenciatura da Faculdade de Apucarana (FAP) e da Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Na formação de PMat, trabalhou com as disciplinas de Geometria, Geometria Plana, Geometria Espacial e Ensino de Geometria. Atuou na formação de PMat em diversas Secretarias de Educação Municipal do estado do Paraná, produziu artigos e desenvolveu projetos relacionados à GNE na formação inicial de PMat.

Marie-Claire atuou como professora formadora na UEL nos cursos de Licenciatura em Matemática e Arquitetura e Urbanismo. Também atuou no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PECEM. Lecionou disciplinas como Desenho Geométrico, Geometria Descritiva, Desenho Arquitetônico, Geometria e Álgebra Linear. Marie-Claire elaborou e desenvolveu projetos envolvendo Desenho Geométrico, Geometria e ensino de Geometria para professores da escola básica e para estudantes de graduação.

Mariana trabalha na formação inicial de PMat na Universidade Estadual de Maringá (UEM) e no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da UNESPAR. É líder do grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria (GPEG) que estuda o ensino de Geometria e a Didática da Matemática e é a Primeira Secretária da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - regional Paraná (SBEM/PR) (2022-2025). Já lecionou nos cursos de Licenciatura em Matemática, Pedagogia, Ciências Econômicas, Informática, Ciência da Computação, Ciências Contábeis, Engenharia Civil, Engenharia de Produção, Zootecnia e Ciências Biológicas. Ela elaborou e desenvolveu projetos de pesquisa, escreveu artigos para revistas e eventos e orientou iniciações científicas, relacionados à GNE. Atualmente, orienta uma pesquisa de mestrado sobre a temática.

As três professoras foram convidadas a elaborar narrativas de natureza reflexiva, tendo em vista suas considerações sobre o trabalho com GNE na formação de PMat. A escolha pelo uso de narrativas nessa investigação se sustenta no fato de que indivíduos têm histórias para contar e estas podem indicar como interpretam, criticam e vislumbram o mundo, individual e socialmente.

<sup>8</sup> Os nomes não são fictícios.

Esses indivíduos são atores de suas histórias, revelam-se e constituem-se por meio do discurso. A narrativa indica *o que* e *como* pensam sobre determinado assunto, e a experiência de quem a escreve pode assumir a forma das narrativas usadas para contá-las.

Ao contar ou escrever uma situação vivida, quem produz a narrativa mostra como vivenciou a experiência, revelando um conhecimento tácito. Essa função da linguagem, de construir a realidade pelo modo como o indivíduo dá sentido ao mundo e às suas vivências, parece-me ser o traço que define e torna narrativa peculiar em relação a outras formas do discurso e o que a torna um poderoso método de investigação em educação (Coura, 2018, p. 62).

Portanto, as narrativas seriam como reconstruções particulares da experiência (Bolívar; Domingo; Fernandes, 2001). A palavra *narrativa* é polissêmica. Pode se referir à escrita do professor, narrativas autobiográficas e de experiência, histórias de vida, pesquisa narrativa etc. “Em muitos casos, não se trata de termos correlatos, mas com múltiplos significados e múltiplas formas de abordagem teórica e de análise” (Mendes; Passos; Silva, 2014, p.703). Nesse estudo, as narrativas foram utilizadas como instrumento metodológico para a obtenção das informações. Solicitamos às professoras que produzissem narrativas de natureza reflexiva considerando o enunciado a seguir (Figura 2). Destacamos que o presente artigo faz parte de uma pesquisa de mestrado que considerou, além dos aspectos relacionados ao trabalho com GNE na formação de PMat, aspectos relacionados à EB.

### Figura 2 - Enunciado da narrativa

**Objetivo:** compreender percepções de professoras experientes no ensino de geometria a respeito do trabalho com as GNE em contextos de formação de PMat e na educação básica;

**Orientações:** Considerando seu trabalho como formadora de PMat e como professora de geometria, elabore um texto de natureza reflexiva que apresente as suas percepções a respeito das GNE na formação de PMat e na educação básica.

Para a construção dessa narrativa, você pode contemplar:

- o papel das GNE na formação inicial e continuada de PMat;
- elementos das GNE a serem considerados na formação de PMat;
- desafios inerentes aos formadores no trabalho com GNE na formação de PMat.

Fonte: As autoras (2023)

A natureza das narrativas é reflexiva, uma vez que expõem elementos problematizadores de suas práticas docentes e de seus saberes experienciais. As professoras, ao narrarem de maneira reflexiva suas experiências a outros, aprendem e ensinam e podem (re)significar suas experiências e saberes próprios (Clandinin, 2003). As reflexões, sob a ótica de Muir e Beswick (2007), podem ser classificadas em diferentes níveis: a descrição técnica, que contém relatos gerais da prática docente por vezes focados em aspectos técnicos em detrimento do valor das experiências; a reflexão deliberada, que identifica eventos particulares em sala de aula e fornece justificativas para comportamentos e/ou ações; e a reflexão crítica, que, além de identificar esses eventos, fornece explicações que

levam em conta perspectivas dos outros e oferece alternativas relacionadas ao ensino e aprendizagem. A análise das três narrativas produzidas pretendeu identificar reflexões, ideias e opiniões das formadoras sobre GNE na formação de PMat.

O diálogo, no sentido estrito do termo, não constitui, é claro, senão uma das formas, é verdade que das mais importantes, da interação verbal. Mas pode-se compreender a palavra “diálogo” num sentido amplo, isto é, não apenas como a comunicação em voz alta, de pessoas colocadas face a face, mas toda comunicação verbal, de qualquer tipo que seja (Bakhtin, 2010, p. 117).

A análise<sup>9</sup> foi dividida em quatro momentos principais. No primeiro, fizemos leituras iniciais e flutuantes de modo a compreender todos os elementos abordados nas narrativas. Fizemos marcações e anotações preliminares, buscando estabelecer algumas relações entre as considerações de cada narrativa, o que nos permitiu vislumbrar superficialmente possíveis pontos de enfoque. Em seguida, no segundo momento, foram selecionados trechos que julgamos representativos para o delineamento dos pontos de enfoque.

Na busca de estabelecer pontos de enfoque bem delimitados, empregamos algumas estratégias. Imprimimos e organizamos os trechos sobre uma mesa e tentamos agrupá-los de acordo com os possíveis pontos de enfoque iniciais, porém notamos que alguns trechos podiam se encaixar em mais de um agrupamento. Para superar limitações encontradas durante as leituras, utilizamos gravações em áudio das leituras completas de cada narrativa e fizemos destaques nas narrativas com marca-textos coloridos e sublinhados. Após a combinação desses métodos, constituímos três pontos de enfoque, nomeadamente: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios relacionados à inclusão de GNE na formação de PMat; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos para o trabalho com a GNE na formação de PMat.

No terceiro momento, levando em conta os objetivos de nossa pesquisa, organizamos a descrição e a análise interpretativa das informações, em torno dos pontos de enfoque. Contudo, como surgiram algumas dúvidas relacionadas aos trechos das narrativas, num quarto momento, contactamos as professoras participantes via um aplicativo de mensagens instantâneas para esclarecer algumas informações. O conteúdo das mensagens de texto passou a integrar o *corpus* da pesquisa.

Na próxima seção, analisamos aspectos constituintes dos pontos de enfoque. Utilizamos “N” para representar trechos retirados das narrativas produzidas pelas professoras formadoras; e “MT” para indicar as mensagens de textos encaminhadas pelo aplicativo de mensagens instantâneas.

## REFLEXÕES MANIFESTADAS POR PROFESSORAS FORMADORAS A RESPEITO DAS GNE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Nesta seção, descrevemos e analisamos aspectos revelados pelas professoras experientes no ensino de geometria a respeito do trabalho com GNE na formação inicial e continuada de PMat. Em alguns casos, apontamos ao leitor exemplos (entre figuras e modelos manipuláveis com acesso disponibilizado por notas de rodapé) que desencadearão a apreensão de alguns aspectos citados nas narrativas.

O texto a seguir está organizado em torno dos três pontos de enfoque, nomeadamente: justificativas para o trabalho com GNE na formação de PMat; desafios relacionados à inclusão de GNE na

<sup>9</sup> No processo de análise das narrativas também foram utilizadas mensagens de texto em conversas de um aplicativo de mensagens instantâneas, realizadas para esclarecer algumas afirmações presentes nas narrativas.

formação de PMat; e sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos para o trabalho com GNE na formação de PMat.

### **Justificativas para o trabalho com Geometrias não Euclidianas na formação de professores de Matemática**

Ao discorrer sobre GNE, as professoras justificam a presença dessa temática na formação de PMat.

Mariana e Loreni destacam que o trabalho com GNE pode favorecer o diálogo com outros conceitos matemáticos. Mariana aponta que este estudo não se limita apenas a área específica de geometria, sublinhando a conexão entre as GNE e os diferentes campos/conceitos da matemática:

*o estudo das geometrias não euclidianas possibilita o trabalho com diversos assuntos da matemática tais como: álgebra, aritmética, funções, dentre outros [Mariana, 2023, N].*

Podemos citar o trabalho com fractais como exemplo de articulação entre as GNE e álgebra. A árvore bifurcada, ou árvore fractal<sup>10</sup>, é um exemplo de fractal que contém sequências numéricas que podem ser classificadas como progressões aritméticas (PA) ou geométricas (PG). Este fractal é gerado, ao considerarmos um segmento de comprimento 1 (uma unidade), em que o fator de redução é  $e$  e o ângulo de bifurcação é  $120^\circ$ . Se nos referirmos ao número de novos segmentos e aos seus comprimentos, podemos concluir que a sequência é uma PG, mas se nos referirmos ao nível do fractal e ao comprimento total da curva, a sequência será uma PA.

Loreni defende que o estudo de conceitos de GNE pode ampliar a compreensão de conceitos da própria GE, ao relatar que estas:

*têm o papel também de contribuir para melhor compreensão dos conceitos da geometria euclidiana [...] como também da Matemática em geral [Loreni, 2023, N].*

Com base nos apontamentos de Loreni, podemos citar como exemplo a aplicação da lei dos cossenos em triângulos esféricos. A referida lei descreve a relação entre os lados e ângulos de um triângulo plano qualquer. A dedução da lei dos cossenos na GE é construída a partir da altura do triângulo, que gera dois triângulos retângulos e nos permite, convenientemente, inferir as razões existentes entre os catetos, a hipotenusa e os ângulos. A versão esférica da lei dos cossenos é conhecida como “fórmula fundamental”, e as relações estabelecidas ao longo da prova também advêm da construção de triângulos retângulos planos.

A lei dos cossenos da trigonometria plana relaciona-se com a fórmula fundamental da trigonometria esférica, já que ambas descrevem como dois lados adjacentes e os ângulos de um triângulo estão interconectados. Compreender a consistência e a validade de outros modelos geométricos pode facilitar a compreensão da consistência e a validade da própria GE (Altoé, *et al.*, 2022) uma vez que esta é um caso particular de um espectro mais amplo de possibilidades geométricas.

Loreni considera que

*ao estudar estas geometrias [não Euclidianas], tem-se a possibilidade de desenvolver o pensamento geométrico do futuro professor ou do professor, bem como*

10 Modelo manipulável disponível em: <https://www.geogebra.org/m/WNrTmZap#material/sSFyHXwd>.

*dos estudantes da Educação Básica. Esse estudo colabora para o trabalho com investigações de propriedades, a realização de generalizações e a resolução de problemas de diversas áreas do conhecimento em diferentes contextos [Loreni, 2023, N, grifo nosso].*

Para Loreni, o pensamento geométrico é

*um modo de pensar o mundo, uma atividade social em que se utiliza ideias geométricas. Uma atividade intuitiva da mente/pensamento que permite utilizar as ideias dos diferentes espaços geométricos para resolver problemas matemáticos ou não, como na arte, na natureza, na arquitetura etc, ou ainda, para tomar decisões. É também, um pensamento criativo e produtivo que se relaciona com a visão espacial, a representação espacial e o movimento espacial dos objetos geométricos [Loreni, 2023, MT].*

Entender o espaço com base em conceitos não euclidianos demanda um processo mais abrangente em relação ao pensamento geométrico e permite visualizar, analisar e raciocinar sobre espaços distintos, promovendo mudanças na forma como enxergamos o mundo. Por exemplo, o trabalho com GNE pode ajudar o PMat e o futuro PMat a compreenderem o comportamento de objetos massivos<sup>11</sup> de nosso sistema solar, o que abrange, inclusive, noções de Física. A teoria da relatividade de Einstein prevê a existência de curvaturas no espaço-tempo e explicita a ideia de que somente corpos massivos têm a capacidade de curvá-lo. A gravidade é uma consequência da curvatura do espaço-tempo, causada por estes objetos, e é uma propriedade geométrica do espaço-tempo (Falciano, 2009). Quanto mais massivo um objeto, maior é a curvatura criada e, portanto, mais forte é a gravidade exercida. Neste espaço-tempo, os movimentos das partículas e da luz são curvos. Todavia, essas curvas nutrem relação com as linhas retas: assim como linhas retas descrevem a trajetória mais curta entre dois pontos em espaços planos, linhas curvas descrevem a trajetória mais curta entre dois pontos em espaços-tempo curvos.

Uma consequência desse fato está associada ao posicionamento dos astros: a posição aparente de uma estrela no céu costuma estar deslocada de sua posição real, devido às curvaturas existentes entre a estrela e o observador<sup>12</sup>. Ampliar o repertório, quanto ao conhecimento geométrico, permite abordar situações-problema nas quais o modelo geométrico euclidiano apresenta limitações para sua resolução, como quando calculamos a posição real de uma estrela qualquer. Igualmente viabiliza a investigação de propriedades e interações dos objetos envolvidos utilizando o modelo correto

A professora Mariana também chama a atenção para as contribuições do trabalho com GNE na formação de PMat como caminho para entender situações do cotidiano. As GNE podem

*possibilitar compreender a existência de uma geometria diferente da que estamos habituados e que pode ser reconhecida de forma representativa nas situações do dia a dia e da natureza [Mariana, 2023, N].*

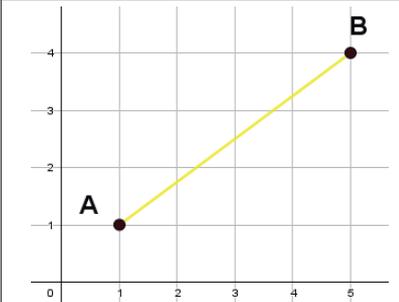
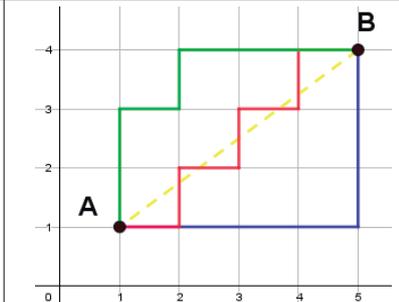
Determinados conceitos não euclidianos podem ser utilizados, por exemplo, quando nos deslocamos em espaços urbanos. A menor distância entre dois pontos distintos da cidade não será uma

11 Objetos massivos são corpos celestes que possuem massa significativa em comparação com outros corpos ao seu redor e exercem influência notável na dinâmica gravitacional no sistema solar. São exemplos: estrelas, planetas, planetas anões e grandes luas.

12 Para visualizar os conceitos tratados neste parágrafo, acesse <https://www.geogebra.org/m/hXW4NGMN>.

reta (ou segmento de reta) euclidiana, pois não é possível “cortar” as quadras. A distância entre os dois pontos se dá pela soma das unidades de deslocamento pelas quadras, que é o trajeto percorrido. Esta forma de tratar medidas e distâncias, como rotas de tráfego urbano, é denominada Geometria do Táxi<sup>13</sup>, que se difere da GE apenas pela métrica. (Quadro 2)

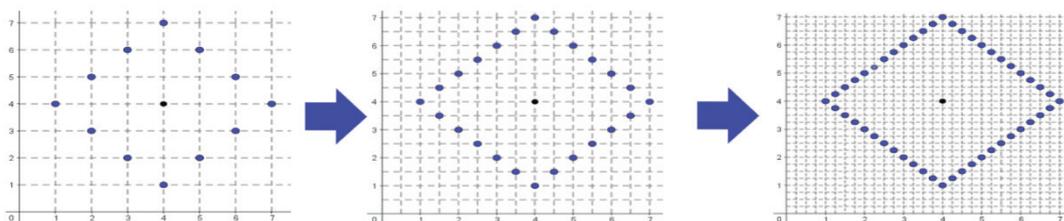
**Quadro 2** - Comparação entre a Geometria Euclidiana e a do Táxi

	Geometria Euclidiana	Geometria do Táxi
<b>Cálculo da distância</b>	$d_e(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$	$d_t(A, B) =  x_a - x_b  +  y_a - y_b $
<b>Representação geométrica</b>		

Fonte: Elaborado pelas autoras (2024)

Note que a forma usual de realizar deslocamentos em espaços urbanos é, portanto, não euclidiana (Leivas, 2014). A métrica utilizada na Geometria do Táxi tem implicações significativas na forma como as distâncias são interpretadas e visualizadas, já que a função distância sofre modificação. Quando trabalhamos com a definição de circunferência da GE “uma circunferência de centro C e raio é definida como sendo o conjunto dos pontos do plano à distância de C” (Augustini, 2019, p. 58) na Geometria do Táxi, temos uma representação “atípica”. Conforme o tamanho das quadras da cidade diminui, os pontos que descrevem a “circunferência” tornam-se mais numerosos e aproximam-se da representação de um quadrado, chamado de “táxi-circunferência” (Figura 3).

**Figura 3** - Evolução da “circunferência” na Geometria do Táxi.



Fonte: As autoras (2024)

O estudo de outros aspectos, como cônicas, mediatrizes e o valor da constante, pode explicitar as divergências nas representações gráficas e numéricas entre os dois modelos geométricos e colaborar na aceitação de métricas diferentes das utilizadas na GE.

<sup>13</sup> O plano da Geometria do Táxi pode ser adaptado com a atribuição de pesos específicos a cada unidade, o que resulta em características individuais em cada caso e permite estabelecer comparações fiéis com mapas de cidades.

Mariana considera que

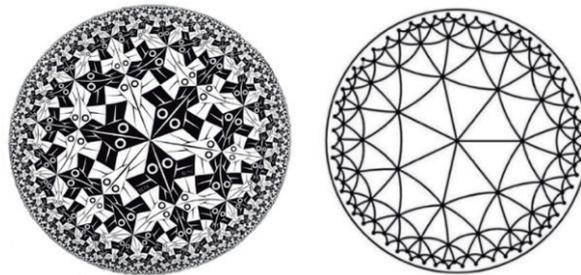
*conhecer uma geometria diferente da euclidiana amplia os horizontes em termos de geometria, matemática e cultura. [Mariana, 2023, N].*

Como cultura, Mariana relata que compreende

*questões relacionadas à astronomia, por exemplo. No caso da geometria esférica [...] podemos pensar no globo terrestre e explorar as suas geodésias (que são as retas curvas). E também, em obras de arte com as de Escher, por exemplo. [...] Além disso, podemos observar em certas arquiteturas modernas que representam as geometrias não euclidianas em seus aspectos de construção [Mariana, 2023, MT].*

O trecho exemplifica a presença e a influência de conceitos não euclidianos em diferentes aspectos da cultura, como no conhecimento científico (astronomia), arte e arquitetura. Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um artista gráfico holandês que trabalhou com noções de simetria, perspectiva e GNE. Suas obras podem ser vistas como exemplo de como avanços matemáticos influenciam a Arte. Em *Limite Circular I* (1958), representou tesselações que se assemelham à tesselação com triângulos hiperbólicos no modelo do Disco de Poincaré (Figura 4).

**Figura 4** - Comparação entre a obra *Limite Circular I* (1958) de Escher e tesselação com triângulos hiperbólicos no disco de Poincaré.



Fonte: Ernst (1978, p. 70) e Albon e Nós (2022, p. 25)

As obras de Escher continuam sendo referências culturais e fonte de inspiração para a exploração de ideias matemáticas, demonstrando como a matemática pode transcender as fronteiras acadêmicas e escolares.

Marie-Claire justifica a presença de GNE em cursos de licenciatura e bacharelado em matemática, tendo em conta a importância de sua origem, desenvolvimento e consistência teórica.

*É importante que saibam da existência das geometrias não euclidianas, entendam porque elas apareceram, o que justifica a existência delas [Marie-Claire, 2023, N].*

Também enfatiza que estudos, envolvendo GNE, podem ser vistos como

*ciência e eles [os futuros professores] podem fazer avançar essa ciência com seus estudos e pesquisas [Marie-Claire, 2023, N].*

Marie-Claire revela acreditar que, para além de saber da existência de outros modelos geométricos e seus conceitos, o estudo de GNE em contextos de formação de PMat permite aprofundar essa temática em pesquisas acadêmicas. A professora Marie-Claire julga importante que os cursos de formação de bacharéis e licenciados em matemática fomentem, também, a formação de futuros pesquisadores.

Em síntese, as justificativas para o trabalho com as GNE na formação de PMat apresentadas pelas professoras incluem: a possibilidade de estabelecer conexões com outros campos/conceitos matemáticos; a oportunidade de ampliar a compreensão de conceitos da GE; a articulação das GNE com outras áreas do conhecimento como Física e Arte e com situações do dia a dia; o desenvolvimento de investigações e as generalizações de relações envolvendo GNE; e a viabilidade de investigações acadêmicas relacionadas à temática.

### **Desafios relacionados à inclusão de GNE na formação de PMat**

As professoras reiteram que incluir as GNE em programas de formação inicial e continuada de PMat envolve alguns desafios específicos.

Um deles diz respeito ao conhecimento de GE dos professores. Marie-Claire conta a sua experiência na implementação de uma atividade durante um curso de formação de professores que atuam nos anos iniciais. Ela apresentou aos participantes questões relacionadas à GE, retiradas da Provinha Brasil, com o propósito de serem solucionadas e disse que “o índice de erros foi alto, semelhante aos dos estudantes da 1.<sup>a</sup> a 5.<sup>a</sup> série (2.<sup>o</sup> e 6.<sup>o</sup> ano)” [Marie-Claire, 2022, N, grifo nosso]

As dificuldades dos professores em geometria podem ter relação com o seu processo formativo. Professores polivalentes costumam ter uma formação centrada em processos metodológicos que não propiciam adequadamente os fundamentos matemáticos, em que prevalece a crença utilitarista da matemática com prioridade para cálculos e procedimentos (Nacarato; Mengali; Passos, 2017). O foco das disciplinas formativas costuma voltar-se para métodos de ensino e opções didáticas, como se saber ensinar matemática fosse suficiente. Por vezes, os professores em formação não entendem adequadamente conteúdos matemáticos e sua importância.

As dificuldades desses professores em tópicos de geometria podem se alongar desde o ensino básico, dadas as lacunas de sua alfabetização matemática (Nacarato; Paiva, 2017). Esse fato pode reverberar e gerar obstáculos durante a alfabetização matemática de seus estudantes, que podem não ser enfrentados e superados nos anos escolares seguintes, e, conseqüentemente, influenciar o desempenho das escolas em avaliações em larga escala<sup>14</sup>. Nesse contexto, a formação continuada do professor polivalente pode ser encarada, entre outras coisas, como meio de mitigar lacunas advindas de toda a sua formação.

---

<sup>14</sup> As avaliações de larga escala, advindas de um movimento reformista global, se estruturam a partir de uma concepção padronizada da educação, ao definir um currículo nacional e padrões de aprendizagem. O resultado é a descentralização da educação, a responsabilização das escolas e dos professores pelo desempenho e um ensino voltado excessivamente para testes, o que pode vir a ter natureza comparativa e, conseqüentemente, competitiva. Portanto, os resultados dos estudantes em avaliações dessa natureza não revelam, necessariamente, o desenvolvimento de seu aprendizado (Hypólito, 2019).

A alfabetização matemática adequada e a compreensão prévia de conceitos euclidianos é, para Marie-Claire, essencial para o posterior estudo de conceitos não euclidianos. Ela enfatiza que

*minha luta seria primeiro para melhorar o ensino de Geometria Euclidiana em todos os níveis de ensino, inclusive com os professores que fazem pedagogia. Depois da base bem-feita, podemos fazer um revestimento complementar [Marie-Claire, 2023, N].*

O trecho demonstra a preocupação de Marie-Claire em tratar os desafios relacionados ao ensino de geometria de forma abrangente, envolvendo todos os níveis educacionais e incluindo a formação de professores. Em sendo assim, pode-se construir um terreno fértil para futuras explorações de conceitos ditos mais complexos e/ou avançados, como alguns tópicos de GNE.

Há estudos que identificaram que crianças que compreendem o sistema de coordenadas podem desenvolver noções fundamentais de Geometria Topológica, Esférica, Hiperbólica e Projetiva (Debastian Neto; Nogueira; Franco, 2013). Logo, o nível de dificuldade e abstração do conteúdo não euclidiano pode depender das intencionalidades do professor, e sua implementação em sala de aula não precisa, necessariamente, se dar depois do estudo de todos os tópicos de GE. Porém, ter familiaridade com conceitos geométricos euclidianos fornece uma base conceitual útil para o estudo de GNE, uma vez que alguns surgem a partir da negação ou alteração de postulados da GE.

Os conhecimentos prévios de GE necessários para o estudo de GNE podem, do mesmo modo, se configurar como desafios a serem superados. Loreni relata que

*geralmente os estudantes chegam ao ensino superior com experiências somente da Geometria Euclidiana e com alguns conceitos desenvolvidos que podem se tornar obstáculos didáticos para a aprendizagem das Geometrias Não Euclidianas [Loreni, 2023, N].*

As noções geométricas de professores e futuros PMat são, geralmente, moldadas por princípios da geometria que conhecem - a euclidiana. Afastar-se dos princípios que estão acostumados e se permitir estudar elementos que podem confrontá-los pode ser uma tarefa complicada, dada a influência que os conhecimentos prévios têm na construção de novos conceitos e a dificuldade que temos, naturalmente, de reavaliar crenças.

Um exemplo é a seguinte afirmação: “a soma dos ângulos internos de *qualquer* triângulo é *sempre*  $180^\circ$ ”, que é verdadeira, quando a estudamos na GE. Entretanto, na perspectiva da Geometria Esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico<sup>15</sup> é sempre *maior* que  $180^\circ$ . Essa geometria permite a existência de triângulos com três ângulos retos (trirretângulos), fato que pode ser surpreendente e difícil de aceitar para quem toma a afirmação exemplificada como verdade. Assumir a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo sempre como  $180^\circ$  pode fazer com os estudantes entendam que essa “regra” é verdadeira em todos os contextos e gerar barreiras na aprendizagem.

Outro desafio citado nas narrativas diz sobre a abordagem de disciplinas específicas de GNE em cursos de licenciatura em Matemática. Em relação à disciplina voltada para o estudo desses conteúdos na Universidade em que leciona, Mariana narra que

*docentes com bacharelado ministram a disciplina de “Geometrias não-euclidianas” para um curso de Licenciatura em Matemática, de forma totalmente axiomática*

15 Para visualizar a soma dos ângulos internos de triângulos esféricos, acesse <https://www.geogebra.org/m/quzzydhh>

*sem prepará-los metodologicamente para o ensino deste tema na Educação Básica [Mariana, 2023, N].*

Se o foco de disciplinas específicas de GNE se der na estrutura lógica, no rigor da construção dos argumentos, no desenvolvimento teórico, em provas e em deduções, estas podem preparar os acadêmicos que desejam seguir carreira como matemáticos e pesquisadores de Matemática, mas não, necessariamente, instrumentalizar os que ingressarão como docentes na escola básica, o foco da licenciatura. Em suma, a abordagem assumida pelos formadores pode se desconectar do objetivo do curso, que é formar PMat.

Essa abordagem pode ter relação com os desafios dos próprios formadores, ao ensinarem GNE. Segundo Mariana

*muitos desafios são impostos aos professores que trabalham com as geometrias não-euclidianas na formação de professores, desde o conhecimento deste assunto até as metodologias adequadas para o seu trabalho [Mariana, 2023, N].*

A abordagem desses conteúdos, em licenciaturas ou bacharelados, além de requerer o entendimento de seus conceitos, demanda abordagens pedagógicas cuidadosas por conta da divergência entre as GNE e a GE. Nas licenciaturas, mais desafios são impostos aos formadores, como o fato de se considerarem abordagens convenientes para esses conteúdos, visando ao seu trabalho na EB e discutir possíveis escolhas metodológicas para este fim.

*O trabalho metodológico deve visar explorar matematicamente (geometricamente e algebricamente) as representações construídas. A construção pode ser feita de modo concomitante à sua exploração matemática [Mariana, 2023, MT].*

Enfatizamos que abordagens que não assumam enfoques formalistas não negam a relevância no estudo de GNE por um viés axiomático.

Na mesma direção, Loreni relata que

*os formadores de professores enfrentam desafios no trabalho com as geometrias não euclidianas na formação inicial, uma vez que o currículo das licenciaturas em Matemática (pelo menos alguns que conheço) não as contemplam; muitas vezes os formadores também não foram formados para o ensino destas geometrias; não há pesquisas suficientes com este tema e as que existem muitas vezes tratam um dos espaços geométricos isolados dos outros [Loreni, 2023, N].*

É de se esperar que a presença tímida de GNE em currículos de formação de PMat limite a exposição dos licenciandos (entre eles, futuros formadores) a esses conceitos. Por não fazer parte dos conteúdos convencionais em contextos educacionais, essas geometrias podem tender a ser investigadas em áreas da matemática que não estão relacionadas diretamente à Educação. Portanto, é possível que formadores que concentram seus estudos na área de Educação e Ensino não tenham integrado a seus conhecimentos os aportes teóricos e metodológicos necessários para ministrar disciplinas específicas de GNE, mesmo em cursos de licenciatura.

A observação feita por Loreni, de que pesquisas tratam os espaços geométricos isoladamente, pode indicar uma tendência de as pesquisas centralizarem-se em uma única abordagem geométrica, sem estabelecer conexões entre diferentes espaços geométricos.

Em síntese, os desafios relacionados à inclusão de GNE na formação de PMat destacados pelas professoras são: a formação de professores polivalentes, que tende a focar em métodos de ensino em detrimento dos conteúdos a serem ensinados; a possível ênfase axiomática em disciplinas específicas sobre a temática, que salienta a construção e a análise de estruturas matemáticas em detrimento do ensino; e a forma conceitual e metodológica necessária para o trabalho com esses conteúdos em contextos de formação de PMat. Enfim, os desafios enfrentados por formadores de professores podem impactar (e provavelmente impactam) diretamente a formação dos professores e dos futuros PMat.

### **Sugestões de metodologias, abordagens e recursos didáticos a serem utilizados no trabalho com Geometrias não Euclidianas na formação de professores de matemática**

Considerando a natureza pouco familiar e o grau de abstração de algumas GNE, as professoras formadoras julgam necessário uma seleção cuidadosa e criteriosa de métodos de ensino, práticas pedagógicas, abordagens e ferramentas empreendidas no processo de ensino e de aprendizagem, que são fundamentais para superar barreiras conceituais e que podem constituir ambientes que tornem os conceitos não euclidianos acessíveis para o professor em formação.

O enfoque em aspectos históricos e filosóficos é frequentemente indicado na literatura como estratégia viável para o ensino e a aprendizagem de GNE e, igualmente, foi citado pelas três professoras. Loreni aponta que

*Desenvolver propostas na formação envolvendo a história do desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas sempre foi fundamental para que os professores pudessem compreender a importância de trabalhar com essas geometrias nas suas práticas pedagógicas [Loreni, 2023, N].*

Estudar a história do desenvolvimento de ideias matemáticas e sua difusão permite a familiarização com narrativas históricas e pode auxiliar o professor em formação a reavaliar o planejamento de suas aulas, organizar mentalmente a estrutura da matemática, desenvolver estratégias de ensino que lhe permitam explorar conteúdos matemáticos e situar-se como sujeito histórico (Araman; Gomes, 2020). Loreni reforça a relevância de abordagens históricas, envolvendo GNE em “*momentos que o professor cria um espaço de aprendizagem por meio do seu ensino (sua prática reflexiva)*” [Loreni, 2023, MT].

Na mesma direção, Marie-Claire diz que

*seria interessante que fosse mostrado como “apareceu” o ensino de Geometria na educação formal em primeiro lugar, falando-se sobre Euclides e o legado dele. Depois, mostrar que a geometria dele se aplica ao plano e nem tudo é plano. As dúvidas que surgiram quando matemáticos tentavam provar o 5º postulado e o que foi obtido a partir daí [Marie-Claire, 2023, N].*

Marie-Claire sugere uma abordagem que considere, a partir de um enfoque histórico, o ensino formal de GE, as influências da GE, as tentativas de prova do 5.º postulado e o surgimento das GNE como alternativas à GE, comparando superfícies planas e não planas. Após o enfoque histórico, Marie propõe que “*as discussões podem ser aprofundadas para justificativas Matemáticas*” [Marie-Claire, 2023, N].

Marie-Claire defende que questões históricas sejam tomadas como arranque para o trabalho com GNE, seguida de aprofundamentos acerca das questões matemáticas envolvidas. O chamado “modelo do Disco de Poincaré” (Greenberg, 1994), um modelo de Geometria Hiperbólica, pode exemplificar como fundamentar o trabalho com GNE, baseado no seu desenvolvimento histórico. Tal modelo foi proposto após a axiomatização da Geometria Hiperbólica e assume que, por um ponto P exterior a uma reta AB há infinitas retas paralelas a AB. Nesse modelo, as retas são representadas por curvas que se curvam em direção à borda do disco, o que permite a existência de triângulos cuja soma dos ângulos internos é sempre menor que  $180^{\circ}$ <sup>16</sup>.

Sobre o trabalho com GNE na formação inicial de PMat, a partir de enfoques históricos, Loreni conta que

*tinha a preocupação de que os futuros professores pensassem em questões como: em que momento político/histórico/filosófico isso aconteceu (a discussão no meio científico)?; por que os matemáticos questionaram o trabalho de Euclides?; o que levou os matemáticos a suspeitarem que o 5º postulado poderia ser demonstrado?; por que os matemáticos demoraram tantos anos para acreditar e comunicar a existência das geometrias não euclidianas?; temiam a Igreja?; haviam preocupações com seu ensino ou apenas em desenvolver novos teoremas e/ou contestar Euclides?; por que a comunidade matemática teve/tem dificuldades em aceitar as “novas” geometrias?; qual era o conceito de conhecimento da época, estava associada a que tipo de filosofia? [...] na minha compreensão questões como estas, são elementos que devem nortear o trabalho dos formadores [Loreni, 2023, N].*

Loreni sugere uma abordagem que leve em conta as questões históricas, filosóficas e epistemológicas simultaneamente com questões matemáticas, fomentando discussões que vão além do desenvolvimento de novos teoremas ou da alteração de postulados da GE. Questionar se as preocupações que pairavam sobre os estudiosos matemáticos tinham cunho religioso e político, a que filosofia o conceito de conhecimento da época era associado e se o ensino desses conceitos era posto em debate, pode ajudar a entender que contextos, sujeitos, interesses e controvérsias permeiam e podem ditar o movimento da realidade material da qual a matemática faz parte, além de indicar implicações para seu próprio desenvolvimento. Um exemplo disso é o fato de as GNE terem despertado a noção de que a matemática, em sua totalidade, é uma criação arbitrária da mente humana e não algo ditado pelo mundo material. Tal noção difere da ideia de matemática dos gregos, que a concebiam como um estudo sistematizado do espaço material idealizado.

Loreni ainda fala:

*Acredito que uma formação (inicial e continuada) que articula os diferentes espaços (planos, hiperbólicos, esféricos) por meio de questões históricas, filosóficas, sociológicas e de atividades práticas, partindo de uma abordagem intuitiva e*

16 Para visualizar os ângulos internos de triângulos no modelo do Disco de Poincaré, acesse <https://www.geogebra.org/m/xctabxmy>.

*experimental, com situações reflexivas e instigantes, que priorizem discussões e argumentações são necessárias dentro de uma perspectiva de ensino social, porque podem possibilitar que os professores e futuros professores possam incluir estas geometrias no currículo, ou seja, na prática pedagógica para a formação mais ampla dos estudantes. No entanto é necessário também pensar nas propriedades matemáticas destas geometrias e em métodos que estas possam ser formalizadas, institucionalizadas [Loreni, 2023, N].*

O excerto revela que Loreni defende uma abordagem que integra aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, sociológicos e práticos, calcados em bases teóricas consistentes que assentam espaços geométricos em discussão e têm o potencial de acarretar uma formação abrangente do educador matemático. Além disso, reconhecer a influência que as ideias advindas da GE tiveram em contextos culturais, sociais e educacionais em certo tempo (até mesmo na contemporaneidade) pode fomentar discussões sobre questionamentos e extensões de seu pensamento, exemplificando como nascem e são tratados paradigmas na ciência e na matemática.

Outra abordagem citada para o trabalho com GNE em contextos formativos leva em conta as concepções dos professores e futuros professores. Segundo Mariana

*há de se considerar a necessidade de um trabalho metodológico que traga conhecimento de uma geometria diferente da euclidiana, promovendo mudanças nas concepções a respeito dos elementos geométricos existentes, sendo eles euclidianos ou não-euclidianos [Mariana, 2023, N].*

A mudança conceitual que o estudo de GNE demanda deve ser pensada no trabalho metodológico do formador. Um exemplo é o deslocamento de um indivíduo em uma superfície. Se estamos em um ponto A e avançamos uma unidade para frente, depois nos deslocamos uma unidade para o lado e, finalmente, retrocedemos uma unidade, nós retornamos ao ponto A inicial? A resposta para essa pergunta parece óbvia, se considerarmos uma superfície plana. Porém, se nos referimos a uma superfície esférica, a resposta é diferente. Nesse caso, o ponto A é considerado um dos polos<sup>17</sup> da esfera, os deslocamentos para cima e para baixo são equivalentes à latitude, e o deslocamento lateral corresponde à longitude. Sob essa perspectiva, concluiremos que, após realizados os movimentos, retornaremos ao ponto A e teremos descrito um triângulo com três ângulos retos. Note que ambas as respostas são verdadeiras e o que as difere é tão somente o contexto geométrico referido. A situação descrita destaca como as respostas para perguntas aparentemente simples podem variar drasticamente com base no contexto em que são feitas e colaborar na aceitação de conceitos não euclidianos. A relevância desses conflitos em processos formativos deve ser destacada, pois ela não se limita apenas ao trabalho com a Geometria Esférica.

Além de abordagens que considerem o desenvolvimento histórico das GNE, as professoras sugerem estratégias que assumam outros enfoques, como indica. Mariana:

*o uso de materiais manipuláveis, softwares de geometria, produções artísticas em forma de pinturas, dentre outros, podem auxiliar neste trabalho, no entanto é necessário estudo e conhecimento destas possibilidades para que sejam executadas [Mariana, 2023, N].*

<sup>17</sup> Intersecção entre a superfície esférica e o eixo de rotação.

A introdução de materiais manipuláveis, como modelos tridimensionais e jogos que simulam comportamentos de objetos em espaços geométricos distintos, podem tornar o estudo de GNE mais tangível. A visualização dinâmica e interativa de seus conceitos pode ser estimulada por meio de *softwares* de geometria dinâmica (como já exemplificado no presente trabalho) e expressões artísticas que tenham o potencial de fornecer analogias visuais. Essas sugestões podem ser aplicadas tanto na formação inicial como na continuada de PMat e na EB, já que, além de visualizar, simular e interagir, também pode suscitar discussões acerca de aspectos didático-pedagógicos relacionados ao assunto.

Considerando suas experiências ao trabalhar com GNE em formações iniciais e continuadas de PMat, Loreni conta:

*Evidencie possibilidades de desenvolver a interdisciplinaridade com várias áreas do conhecimento, aspecto que colabora para que os estudantes possam compreender e descrever certos fenômenos (que acreditam não serem matemáticos) a partir de espaços diferentes dos propostos por Euclides, ou seja, constituírem conhecimentos matemáticos partindo de diferentes campos, por exemplo Arte. Examinando as obras do arquiteto Oscar Niemeyer observa-se que ele muito se utilizou dos conceitos das geometrias não euclidianas [Loreni, 2023, N].*

A interdisciplinaridade permite desafiar a ideia de que a matemática é isolada de outros conhecimentos, colaborando para que os estudantes possam compreender e explicar fenômenos comumente considerados não matemáticos, abordados a partir de geometrias alternativas à proposta pela GE. Obras arquitetônicas fundamentadas em conceitos não euclidianos, como as de Oscar Niemeyer, podem trazer materialidade aos estudos, além de destacar a criatividade do processo e uma incorporação tangível em outros campos, como Arquitetura.

O uso de contextos e elementos não matemáticos para se trabalhar com GNE é uma abordagem citada pelas três professoras. Como estratégia eficaz para incentivar professores em formação continuada e inicial a transcender a ideia de que o estudo desses conteúdos é mera “curiosidade”, Marie-Claire sugere “*apresentar superfícies que não sejam planas e pedir por exemplo que construam paralelas*” [Marie-Claire, 2023, N].

Essa abordagem desafia o professor em formação a construir conjecturas que envolvem curvaturas e representações não convencionais de conceitos centrais de algumas GNE, de forma prática. “*Se for difícil conseguir uma sela de cavalo, leve batatas Pringles. Você já prestou atenção à forma dessas batatas?*” [Marie-Claire, 2023, N].

Embora os exemplos citados por Marie-Claire sejam analogias simplificadas e metafóricas, eles podem ajudar os professores e futuros PMat a visualizarem superfícies curvas e relacionar conceitos abstratos de GNE ao cotidiano.

Em síntese, as metodologias, as abordagens e os recursos didáticos sugeridos pelas professoras para o trabalho com GNE na formação de PMat permeiam: abordagens históricas e filosóficas, que dizem sobre a natureza e os paradigmas relacionados à temática; estratégias interdisciplinares; situações com correspondência no dia a dia; e o uso de materiais manipuláveis e *softwares* de geometria dinâmica. As sugestões demandam seleções cuidadosas e metodologicamente estruturadas, de modo a tornar os conceitos em debate acessíveis aos professores em formação, considerando as barreiras conceituais e os modos de pensar estabelecidos anteriormente.

## GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: DIÁLOGO COM A LITERATURA

Nos trechos das narrativas elaboradas pelas professoras que dizem a respeito das justificativas apresentadas para o trabalho com as GNE na formação de PMat, observamos que elas consideram a necessidade de: estabelecer conexão das GNE com outros conceitos matemáticos; ampliar a compreensão de conceitos da própria GE; articular GNE com outras áreas do conhecimento; desenvolver explorações e generalizações de relações geométricas; propor investigações acadêmicas sobre conteúdos e princípios das GNE.

Os desafios relacionados à inclusão de GNE na formação de PMat estão associados: à formação de professores polivalentes e de PMat; ao enfrentamento à ênfase axiomática em disciplinas da licenciatura; e à forma conceitual e metodológica necessária para o trabalho com a temática.

As sugestões de abordagens metodológicas e recursos didáticos indicados pelas professoras se concentram em enfoques históricos, filosóficos e epistemológicos; na interdisciplinaridade; e no uso de materiais manipuláveis e *softwares* de geometria dinâmica. Em suma, a importância da abordagem de GNE na formação inicial e continuada de PMat se dá não apenas por ser um campo de investigação, mas inclusive por conta de sua influência no desenvolvimento da geometria, da matemática e da própria ciência.

Os aspectos manifestados pelas professoras em cada um dos pontos de enfoque, como relevantes para serem considerados em programas de formação de PM, chamam a atenção por proporcionarem ao professor em formação: *ampliar os horizontes conceituais*, permitindo uma compreensão abrangente do espaço e das propriedades geométricas; *desenvolver um pensamento crítico* em relação à matemática, como uma área em constante evolução; *preparar-se para desafios educacionais*, considerando diferentes abordagens e recursos; e *incentivar a curiosidade e a exploração*, tornando a aula mais envolvente e interessante.

O estudo de GNE acarreta, por natureza, divergências entre conceitos euclidianos e não euclidianos, uma vez que os conhecimentos prévios de quem as estuda estão calcados na GE e vários conceitos não euclidianos são homônimos do conhecimento euclidiano (Kaleff; Nascimento, 2004). O contato com uma perspectiva diversificada e flexível do espaço pode levar os PMat e futuros PMat a repensarem alguns conceitos geométricos fundamentais, como paralelismo e distância entre pontos, e a se familiarizarem com diferentes modelos geométricos. Esse fato permite que o professor em formação (re)construa um repertório de conhecimentos mais abrangente no âmbito da geometria (Altoé *et al.*, 2022) e mova-se com naturalidade entre diferentes espaços geométricos.

Mas para além de permitir o aprofundamento em questões geométricas, o estudo de GNE pode dialogar com outros conceitos matemáticos, como Geometria Analítica (Leivas, 2014) e Análise Combinatória (Caldato, 2013), o que viabiliza uma integração entre conteúdos, uma compreensão rica de conceitos matemáticos e suas inter-relações. O trabalho com GNE

pode favorecer o processo de compreensão, pelo professor, das principais características e natureza da Matemática, visto que esse conhecimento faz-se presente não apenas na quantificação do real e no desenvolvimento de técnicas de cálculo com números e grandezas, mas, sobretudo, pela criação de sistemas abstratos que organizam, inter-relacionam e revelam fenômenos do espaço, do movimento e das formas (Cabariti; Jahn, 2006, p.11).

Como muito bem lembra Cavichiolo (2011, p. 125), o estudo de GNE contribui “[...] não somente para a ampliação e aprofundamento do conhecimento da área da Geometria, mas, sobretudo, da própria Matemática”. O contraste entre conhecimentos relacionados à GE e GNE incentiva o professor em formação a repensar a natureza, a estrutura e os resultados do conhecimento geométrico, de modo a compreender que premissas diferentes das quais estão habituados podem gerar modelos geométricos tão consistentes quanto a GE, mesmo que com propriedades distintas. O trabalho com GNE pode evidenciar que axiomas antes tomados como verdades absolutas são, na realidade, verdades relativas. Portanto, o que existe é um conjunto variado e plural de verdades. Esse embate entre GE e GNE pode levar o professor em formação a questionar, também, os pressupostos básicos sobre as quais a matemática é construída, possibilitando um posicionamento crítico e inquiridor em relação ao conhecimento científico (Cavichiolo, 2011). Esse processo expõe quebras de paradigmas no conhecimento matemático, incluindo a concepção de verdade matemática.

Os aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento das GNE podem ser explorados em contextos de formação de PMat para esclarecer questões relacionadas ao conhecimento matemático e seu ensino, à contextualização de conteúdos, à natureza da matemática e da ciência.

A história do conhecimento geométrico não serve somente para expor o momento de gêneses da Geometria não Euclidiana, mas sim para construir uma visão mais ampla da Matemática como Ciência em que os construtos de sua epistemologia vão se modificando conforme o tratamento dado aos postulados de Euclides, projetando novas formas de saber e fazer no campo da Geometria (Júnior, 2020, p.59).

A história da matemática pedagogicamente vetorizada (Miguel, Miorim, 2004) é delineada como uma história orientada primordialmente por objetivos pedagógicos e, portanto, construída sob o ponto de vista do PMat. Os autores destacam três características fundamentais dessa abordagem. A primeira busca fornecer uma visão cultural e institucional da matemática, enfocando-se nas necessidades, questões e dilemas surgidos em contextos nos quais a matemática desempenha papel significativo. Nesse contexto, a matemática relaciona-se diretamente com outras práticas sociais. A segunda característica diz sobre utilizar a história como meio de questionar problemas observados nas práticas tanto de pesquisas em Educação Matemática quanto de PMat. A terceira considera define a historiografia como um meio de diálogo, no qual ela não apenas fornece respostas e procedimentos a serem aplicados, mas também estimula a reflexão e a análise crítica frente questões históricas. Essas características abarcam as possíveis discussões históricas relacionadas às GNE. O emprego de elementos históricos no ensino de matemática não deve ser norteado pela contextualização e pela motivação para os estudantes e professores em formação, nem aderir a abordagens meramente cronológicas e recapitulacionistas. Pelo contrário, essa abordagem pode contribuir significativamente para a construção do conhecimento geométrico e matemático dos envolvidos bem como para o desenvolvimento do conhecimento pedagógico de PMat e futuros PMat. Além disso, a integração da história como recurso em aulas de matemática pode promover a humanização, um aspecto muitas vezes negligenciado nos dias atuais.

Ao estudarmos contextos, interesses e o movimento histórico de seu desenvolvimento, identificamos a estreita relação que as GNE nutrem com as concepções de matemática e de ciência necessárias ao educador matemático. Seu estudo desafia conceitos filosóficos arraigados, como a ideia de uma geometria única e absoluta, instiga debates sobre a natureza, o desenvolvimento e a construção

do conhecimento matemático e permite captar as mudanças paradigmáticas na ciência. Do mesmo modo o conhecimento histórico é valioso para a prática pedagógica, pois possibilita vislumbrar que a matemática não é apenas um conjunto de fatos objetivos, mas também um produto da cultura e da sociedade de um determinado período (Brito, 1995).

Romper com a ideia de linearidade e rigidez da matemática e relevar a visão axiomática na qual a GE é calcada pode sustentar práticas educativas que se desvinculem do excesso de formalismo predominante no ensino de geometria (Brum; Schuhmacher; Silva, 2015) e promovam a tolerância e a apreciação pela diversidade de pensamento. Note que isso não significa um abandono de abordagens axiomáticas em geometria. A capacidade de imaginar e visualizar cenários com relações que podem, à primeira vista, não ser intuitivas, permite elaborar conjecturas e propor soluções para além dos limites de soluções convencionais. A criatividade tem papel importante nessa equação, já que a elaboração, a organização e a apresentação lógica de conjecturas e construções geométricas também são ações criativas (Leivas, 2018). Afinal, foram matemáticos criativos que questionaram o *status quo* que considerava a GE como absoluta.

Além de possibilitar a ampliação de horizontes conceituais e colaborar no desenvolvimento do pensamento crítico, o estudo de GNE em contextos formativos pode preparar os professores em formação para alguns desafios relacionados à abordagem da temática na EB. As conexões entre GNE e outras áreas do conhecimento exemplificam a relevância e a aplicabilidade destas e podem mitigar a falta de familiaridade e “estranheza” com a temática. A interdisciplinaridade é citada na literatura como estratégia viável para o ensino e a aprendizagem de GNE dadas essas conexões. A Geometria do Táxi descreve a malha e os deslocamentos urbanos, e pode ser relacionada à Cartografia (Cavalcante *et al.*, 2019). A Geometria Esférica descreve a superfície terrestre e a esfera celeste, podendo ser relacionada à Astronomia Posicional (Kovacevic, 2019) e à Geografia (Honda, 2013). Os fractais podem ser identificados em grafites (Navarro *et al.*, 2022) e em pinturas cubistas e abstratas (Júnior, 2008). Em síntese, essas conexões entre GNE e outras áreas e disciplinas, além de relevantes, têm correspondência com situações do dia a dia e respondem à antiga e persistente indagação dos estudantes acerca da aplicabilidade da matemática.

A associação de conceitos, até então abstratos, ao cotidiano e outras áreas do conhecimento pode despertar a curiosidade e incentivar o desenvolvimento de uma mentalidade investigativa de estudantes e professores em formação. O uso de materiais manipuláveis (Gregor *et al.*, 2021) e *softwares* de geometria dinâmica (Albon; Nós, 2022) no trabalho com GNE promove o desenvolvimento de visualização de conceitos geométricos, a partir de manipulações, e permite que o indivíduo relacione o espaço em que vive com o objeto de estudo.

Outro ponto que pode colaborar com a formação do PMat está relacionado à consciência da dificuldade dos estudantes em se desvincularem de conhecimentos geométricos prévios. Afirmações como “a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre  $180^\circ$ ” e “a distância entre duas retas paralelas é sempre constante” devem ser esclarecidas como válidas apenas na GE, caso contrário podem produzir obstáculos epistemológicos que podem interferir na compreensão de conhecimentos científicos (Lovis *et al.*, 2014). Portanto, o trabalho com GNE deve ser cuidadoso e metodologicamente estruturado, tendo em conta os conhecimentos prévios dos estudantes e as intencionalidades do professor.

É razoável concluir que o estudo de GNE em contextos de formação (tanto inicial quanto continuada) de PMat amplia os horizontes relacionados à matemática, às concepções didático-pedagógicas e histórico-sociais dos envolvidos. Como bem complementa Cavichiolo (2011, p. 125), o estudo dessas geometrias:

conduz à reflexão sobre a natureza e os processos de construção da Matemática, mostrando-a como constructo intelectual dinâmico e, portanto, passível de mudanças decorrentes das necessidades do homem de resolver determinados problemas em diferentes épocas, quer sejam internos da Matemática ou da própria realidade social.

A compreensão sobre como o conhecimento matemático é construído e validado abrange aspectos epistemológicos, filosóficos, sociais e históricos envolvidos nesse processo (Bicudo, 2021). A compreensão do conhecimento matemático por PMat em sua complexidade pode reverberar dentro das salas de aula, no ensino e na aprendizagem da matemática.

Esta seção de discussão teve o objetivo de estabelecer relações entre os resultados da análise e a literatura disponível. Na sequência, apresentamos algumas considerações.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, exploramos aspectos relacionados ao trabalho com GNE na formação inicial e continuada de PMat Com base em reflexões, ideias e concepções de professoras experientes no ensino de geometria e na literatura, foi possível identificar algumas dimensões sobre a temática. Ao dar voz a professoras formadoras experientes, evidenciamos elementos advindos de suas experiências práticas, identificando obstáculos observados por elas, dando atenção às sugestões de estratégias pedagógicas e as incluindo no processo de construção do conhecimento da Educação Matemática.

As GNE podem ser uma fonte rica de aprendizado e reflexão, permitindo uma compreensão substancial de conceitos geométricos, mesmo aqueles relacionados à GE. O processo de desconstrução das “verdades” euclidianas e exploração de outros modelos geométricos pode ampliar a visão dos professores em formação sobre Geometria, Matemática, Ciência e Cultura e colaborar no desenvolvimento de um pensamento crítico. Além disso, o estudo de GNE tem potencial para servir de ponte para diversas áreas do conhecimento como Arte, Astronomia, Geografia e História.

A integração das GNE em cursos de licenciatura em matemática exige uma reflexão mais profunda sobre o currículo atual. Para promover uma ruptura com os modelos tradicionais, é necessário repensar a estrutura curricular, incorporando abordagens interdisciplinares, conexões com situações do cotidiano e outras áreas do conhecimento, bem como o uso de materiais didáticos diversificados e *softwares* que fomentem a exploração e a curiosidade. Essa mudança curricular poderia incluir disciplinas específicas voltadas para o estudo das GNE, bem como o incentivo à participação dos licenciandos em projetos de ensino e pesquisa que abordem esses temas. Além disso, é fundamental a proposição de programas de formação continuada direcionados a atender os PMat já em atuação.

Consideramos pertinente que sejam desenvolvidas investigações que aprofundem o debate a respeito: do trabalho com GNE na formação de PMat e sua efetivação na EB; do papel do formador de PMat frente ao estudo de GNE; do impacto de disciplinas específicas sobre o ensino de geometria na formação inicial de PMat diante da abordagem de GNE.

O trabalho com GNE na formação inicial e continuada de PMat é, por natureza, uma jornada transformadora e desafiadora que pode promover benefícios pedagógicos, cognitivos e conceituais que atendam às demandas educacionais contemporâneas.

## REFERÊNCIAS

- ALBON, A. J. D.; NÓS, R. L. Construindo tesselações hiperbólicas no disco de Poincaré com o GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 11, n. 2, p. 17-032, 2022.
- ALTOÉ, R. O.; ZANON, J. M.; PEREIRA, B. M.; GUSSANI, S. B.; CECOTTI, V. T. Contribuições de uma oficina sobre Geometria do Táxi na formação de professores que ensinam matemática: entre descobertas, aprendizagens e prática docente. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel (PR), v. 6, n. 2 p. 193-216, ago. 2022.
- ARAMAN, E. M. O.; GOMES, L. F. Desenvolvimento profissional e história da matemática: um exemplo a partir das geometrias não euclidianas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 2, p. 452-482, 2020.
- AUGUSTINI, E. **Um curso de geometria euclidiana plana**. Uberlândia, MG. UFU, 2018.
- BAKHTIN, M. **Marxismo e filosofia da linguagem**. São Paulo: Hucitec, 2010.
- BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. Editora Unesp, 2021.
- BOLÍVAR, A. B.; DOMINGO, J. S.; FERNÁNDEZ, M. C. **La investigación biográfico-narrativa en educación**. Madrid: La Muralla, 2001.
- BORGES, F. A.; PEREIRA, T. A geometria dos fractais no ensino de Matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos. **Acta Scientiae**, v 19, n. 4, 2017.
- BRITO, A. J. **Geometrias não Euclidianas: um estudo histórico-pedagógico**. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1995.
- BRUM, W. P.; SCHUHMACHER, E.; SILVA, S. C. R. As geometrias esférica e hiperbólica em foco: sobre a Apresentação de alguns de seus Conceitos Elementares a Estudantes do Ensino Médio. **Bolema**, v. 29, p. 419-427, 2015.
- CABARITI, E.; JAHN, A. P. A geometria hiperbólica na formação docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do Cabri-Géomètre. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. **Anais[...]**. São Paulo, out. 2006.
- CALDATO, P. **O uso da Geometria do Táxi no ensino de Análise Combinatória**. 2013. 46 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 2013.
- CARVALHO, O. A.; AZEVEDO, J. S. Geometria não-Euclidiana: aplicações na Educação Básica. *In*: PORTO, J. P. S.; ROCHA, K. S. F. L.; NASCIMENTO, S. A. (Org.). **Inovações educacionais em matemática no Recôncavo**. Cruz das Almas (BA), p. 109-134, 2020.
- CAVALCANTE, R. N. B.; SOUSA, M. H. R.; SOUSA, J. P. R. A interdisciplinaridade entre matemática e Geografia: inferindo conceitos de localização e Distâncias na cidade. **Revista Encantar - Educação Matemática e Sociedade**, Bom Jesus da Lapa, v. 1, n. 3, p. 7-20, set./dez. 2019.

CAVICHIOLO, C. V. **Geometrias Não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática**: o que dizem os formadores. Curitiba: UFPR, 2011. 165 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação.

CEARÁ (Estado). Superintendência de Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Fortaleza, 2008.

CLANDININ, J. D. Teacher education as narrative inquiry. In: CLANDININ, J. D. *et al.* (Org.) **Learning to teach, teaching to learn: stories of collaboration in teacher education**. Nova Iorque: Columbia University Press, 1993.

COURA, F. C. F. **Desenvolvimento profissional de formadores de professores de matemática que são investigadores da docência**. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de São Carlos, Programa de Pós-graduação em Educação. São Carlos, 2018.

COUTINHO, L. **Trigonometria esférica: a matemática de um espaço curvo**. Rio de Janeiro: 51RPEM, Campo Mourão, PR, Brasil, v. 09, n. 19, p. 28-51, jul-out. 2020. *Interciência*, 2015.

CYBULSKI, F. C. **Geometria na formação inicial de professores que ensinam matemática**: indicativos de dissertações e teses brasileiras. 152f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina, 2022.

DEBASTIAN NETO, D.; NOGUEIRA, C. M. I.; FRANCO, V. S. Geometrias na segunda fase do ensino fundamental: um estudo apoiado na epistemologia genética. *Zetetiké*, FE/Unicamp, v. 21, n. 40, 2013.

ERICKSON, F. Qualitative methods in research on teaching. In: M. C. WITTRICK, M. C. (Ed.). **Handbook of Research on Teaching**. Nova Iorque: MacMillan, p. 119-161, 1986.

ERNST, Bruno. **O espelho mágico de M. C. Escher**. Ed. Alemanha: Taschen, 1978.

GOMES, L. F.; ARAMAN, E. M. O.; ROCHA, Z. F. D. C Professores de Matemática e suas Compreensões a Respeito das Geometrias Não Euclidianas. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas*, v. 17, n. 4, p. 301-309, 2017.

GREENBERG, M. J. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. 3. ed. California: Santa Cruz, 1994.

GREGOR, I. C. S. *et al.* O estudo de geometria esférica na formação de PM: uma experiência baseada na utilização de materiais manipuláveis. *Research, Society and Development*, v. 10, n.1, 2021.

FALCIANO, F. T. Geometria, espaço-tempo e gravitação: conexão entre conceitos da relatividade geral. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, n. 31, p. 4308-4317, 2009.

HYPÓLITO, Á. M. BNCC, agenda global e formação docente. *Revista Retratos da Escola, Brasília*, v.13, n.25, 187-201, 2019.

HONDA, A. M. C. **Matemática e Geografia**: uma interdisciplinaridade. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 108p, 2013.

JÚNIOR, Marcos Antônio Gonçalves. Arte contemporânea e Geometrias?! Reflexões sobre a prática. **Revista Polyphonia**, v. 19, n. 2, p. 199-216, 2008.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. **Boletim Gepem**, n. 44, 2004.

KALEFF, A. M. R. Registros Semióticos e Obstáculos Cognitivos na Resolução de Problemas Introdutórios às Geometrias não-Euclidianas no Âmbito da Formação de Professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), n. 28, p-69-94, 2007.

KOVACEVIC, M. S. Geometria esférica: um estudo da interposição entre Matemática e Astronomia. *Rev. Prod. Disc. Educ. Matem*, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 2-15, 2019.

LARROSA, J. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. **Revista Brasileira de Educação**, n. 19, p. 20-28, jan./abr. 2002.

LEIVAS, J. C. P. Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p. 647-670, 2013.

LEIVAS; J. C. P. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. **Revemat**, Florianópolis, v. 9, n. 2, p. 189-209, 2014.

LEIVAS, J. C. P. Criatividade, Imaginação e Visualização no ensino de Geometria. **Revista Thema**, v. 15, n. 4, p. 1193-1196, 2018.

LEIVAS, J. C. P.; PORTELLA, H. P.; SOUZA, H. M. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na escola básica no Brasil com utilização do Geogebra. **Revista Thema**, v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. As concepções de Geometrias não Euclidianas de um grupo de professores de matemática da Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 369-388, 2015.

LOVIS, K. A; FRANCO, V. S; BARROS, R. M. O. Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de matemática no estudo da geometria hiperbólica. **Zetetiké**, v. 22, n. 42, jul./dez.2014.

MENDES, N. A.; PASSOS, C. L. B.; SILVA, H. Narrativas na pesquisa em Educação Matemática: caleidoscópio teórico e metodológico. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 28, p. 701-716, 2014.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MUIR, T.; BESWICK, K. Stimulating reflection on practice: Using the supportive classroom reflection process. **Mathematics Teacher Education and Development**, s.v, n. 8, p. 74-93, 2007.

NACARATO, A.; MENGALI, B.; PASSOS, C. **A matemática nos Anos iniciais do Ensino Fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. **A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas**. Autêntica, 2017.

NAVARRO, A. L.; MELLO, A. S.; SANTOS, D. A. B; GOMES, E. F. A interdisciplinaridade entre o Ensino de Física e o Grafite. **Educação Pública - Divulgação Científica e Ensino de Ciências**, v. 1, n. 2, jun. 2022.

OLIVEIRA, J. C. R.; CYRINO, M. C. C. T. Trajetória profissional de professores de matemática experientes na busca pela profissionalização docente. **Práxis Educacional**, v. 19, n. 50, p. e11645-e11645, 2023.

PARANÁ (Estado). Superintendência de Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Curitiba, 2008.

PADILHA, L.; MORAN, M. Geometria dos fractais: uma proposta para o cálculo da dimensão da Árvore Pitagórica. **Ens. Tecnol. R.**, Londrina, v. 7, n. 1, p. 256-267, jan./abr. 2023.

SACHS, L. O quinto postulado de euclides como história de problemas. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)**, v. 1, n. 1, p. 11-29, 2016.

SÃO PAULO (Estado). Superintendência de Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. São Paulo, 2011.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-SBEM. A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, **Boletim SBEM**, n. 21, p. 1-42, fev. 2013.

SOUZA, L. R. **Geometrias não-Euclidianas na formação de professores**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, p., 2022.