VIDYA

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 133-151, jul./dez. - Santa Maria, 2024.

Recebido em: 23.06.2024. Aprovado em: 06.08.2024.
ISSN 2176-4603 | DOI: doi.org/10.37781/vidya.v44i2.4978

EXPLORANDO RELAÇÕES GEOMÉTRICAS A PARTIR DA CURVA DE PEANO

EXPLORING GEOMETRIC RELATIONSHIPS FROM THE PEANO'S CURVE

EXPLORAR LAS RELACIONES GEOMÉTRICAS MEDIANTE LA CURVA DE PEANO

MAURICIO RAMOS LUTZ[1]

RESUMO

O trabalho apresenta o desenvolvimento e a análise de uma oficina para coleta de dados de uma tese de doutorado, com o objetivo de desenvolver a parte histórica da Curva de Peano, construir a curva usando o GeoGebra e explorar suas relações geométricas. Além disso, explorou a inserção de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha, utilizando Tecnologias Digitais (TD). O estudo baseou-se nos Registros de Representação Semiótica (RRS) de Raymond Duval, com metodologia qualitativa e 12 acadêmicos como sujeitos. Foram aplicadas atividades com TD para coleta de dados, analisadas qualitativamente quanto aos procedimentos de resolução e transformações dos RRS. A análise indicou aprendizado, sugerindo explorar mais a planilha do GeoGebra em oficinas futuras. Espera-se que os discentes possam aplicar o conhecimento adquirido em suas práticas educativas na Educação Básica.

Palavras-chave: Curva de Peano; geometria fractal; formação de professores; tecnologias digitais; práticas educativas.

ABSTRACT

The paper presents the development and analysis of a workshop to collect data for a doctoral thesis, with the aim of developing the historical part of Peano's Curve, constructing the curve using GeoGebra and exploring its geometric relationships. In addition, it explored the inclusion of Fractal Geometry in Mathematics degree courses at the Instituto Federal Farroupilha, using Digital Technologies (DT). The study was based on Raymond Duval's Semiotic Representation Registers (SRR), with a qualitative methodology and 12 academics as subjects. Activities with DTs were used to collect data, which was analyzed qualitatively in terms of the resolution procedures and transformations of the SRRs. The analysis indicated learning, suggesting further exploration of the GeoGebra spreadsheet in future workshops. It is hoped that the students will be able to apply the knowledge acquired in their educational practices in Basic Education.

Keywords: *Peano's Curve; fractal geometry; teacher training; digital technologies; educational practices.*

RESUMEN

El trabajo presenta el desarrollo y análisis de un taller de recogida de datos para una tesis doctoral, con el objetivo de desarrollar la parte histórica de la Curva de Peano, construyendo la curva utilizando GeoGebra y explorando sus relaciones geométricas. También exploró la inclusión de la Geometría Fractal en los cursos de grado de Matemáticas en el Instituto Federal Farroupilha, utilizando Tecnologías Digitales (TD). El estudio se basó en los Registros de Representación Semiótica (RRS) de Raymond Duval, con una metodología cualitativa y 12 académicos como sujetos. Se utilizaron actividades con TD para recoger datos, que se analizaron cualitativamente en cuanto a los procedimientos de resolución y las transformaciones de los RRS. El análisis indicó aprendizaje, sugiriendo mayor exploración de

1 Doutor em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha (IFFar). E-mail: mauricio.lutz@iffarroupilha.edu.br. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1215-1933

la hoja de cálculo GeoGebra en futuros talleres. Se espera que los alumnos puedan aplicar los conocimientos adquiridos en sus prácticas educativas en la enseñanza primaria.

***Palabras-clave**: Curva de Peano; geometría fractal; formación del profesorado; tecnologías digitales; prácticas educativas.*

INTRODUÇÃO

Não sabemos bem sobre as origens da Geometria, pois os primórdios de seu conhecimento são mais antigos que a própria escrita. Boyer (1996) acredita que ela teve origem no Egito pelas necessidades práticas de medir terras após enchentes anuais do rio Nilo. Tais medidas eram necessárias para regular a quantidade de terra que cada indivíduo possuía e, assim, estabelecer cobranças de impostos.

O reconhecimento da Geometria Euclidiana na Matemática e no cotidiano das pessoas é inegável, posto que, por meio dela, aprendemos sobre formas e medidas que facilmente são encontradas na natureza, seja por meio de estruturas com padrões regulares como, por exemplo, uma fachada de uma casa, uma caixa de sapato, entre outros objetos industrializados. Entretanto, na natureza existem outras formas que escapam a esse regramento, não tendo como descrevê-las ou analisá-las partindo da visão da Geometria Euclidiana. A partir dessa dificuldade foram criados outros sistemas axiomáticos, como os representados pelas geometrias não euclidianas.

O presente artigo é uma parte da tese do autor, que investigou a possibilidade de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha (IFFar) com a utilização das Tecnologias Digitais (TD). Para tanto, apresentamos o desenvolvimento da Oficina 3 que teve como objetivos: (1) desenvolver a parte histórica da Curva de Peano; (2) construir a referida curva utilizando o GeoGebra; e (3) explorar as relações geométricos envolvidas. Essa é uma pesquisa de cunho qualitativo interpretativo, desenvolvida com 12 discentes do curso de licenciatura em Matemática do IFFar - *Campus* Alegrete.

Para melhor situar o leitor, entendemos que “[...] fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores” (Stewart, 1996, p. 12), ou ainda, segundo Feder (1988, p. 11, tradução nossa): “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”.

A aplicação das atividades da pesquisa, envolvendo a Oficina 3, têm aporte teórico nos Registros de Representação Semiótica (RRS) de Duval (1995; 2009; 2010). Os estudos foram guiados por meio de uma sequência de atividades, em que se coloca o estudante como sujeito ativo do seu processo de aprendizagem, ou seja, ele irá construir seu conhecimento a partir do contato entre vários elementos que podem compor a aprendizagem.

Para Duval (2010), representar, tratar e converter RRS são elementos principais de sua teoria, em que ele considera ser fundamental mobilizar sistemas cognitivos específicos para cada atividade matemática, basicamente ligados às operações semióticas. Ou seja, para o autor só é possível conhecer, compreender e aprender conceitos matemáticos pela utilização das representações semióticas do objeto matemático. A compreensão que se deve fazer em relação aos RRS é de que, quando se visualiza um objeto matemático sob diferentes formas de registros, ele fica fortalecido na memória.

Justificamos a escolha da Geometria Fractal como tema dessa pesquisa por ela perpassar o mundo em que vivemos. O entendimento das competências e habilidades associadas a essa área da

 VIDYA, v. 44, n. 2, p. 133-151, jul./dez. - Santa Maria, 2024.

Matemática é fundamental, se considerarmos o quanto a Geometria, de forma geral, está presente no cotidiano de nosso alunado. Além disso, a Geometria Fractal permite, por exemplo, saber pensar iterativamente e recursivamente e desenvolver a percepção de autossimilaridades e raciocínio dedutivo.

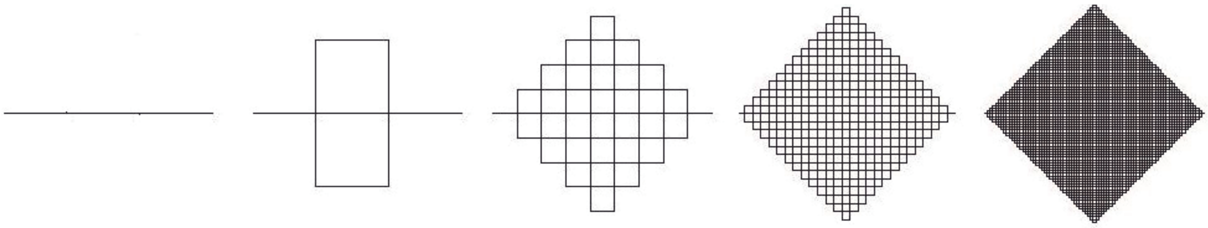
Barbosa (2005), em seu livro "Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula", aponta uma vasta possibilidade de tópicos de Matemática que podem ser desenvolvidos. Por exemplo, a exploração de temas como sequências, contagem, frações, razão, proporcionalidade, perímetro, área, volume, sempre olhando pelo viés dos padrões e o senso estético dos fractais. Além disso, o tema estimula o uso de TD em sala de aula que, no nosso caso, é o *software* de Geometria Dinâmica (GD) GeoGebra. Esse recurso permite ao professor adotar uma postura de mediador do conhecimento, enquanto o estudante se torna um sujeito ativo de sua aprendizagem.

Aliado ao que foi exposto, salientamos o interesse de proporcionar o contato dos futuros educadores com a Geometria Fractal e com o uso de recursos tecnológicos, no intuito de que, futuramente, eles e os conhecimentos adquiridos, qualifiquem sua prática docente e, consequentemente, os auxiliem no processo de ensino e de aprendizagem.

A CURVA DE PEANO E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS

O matemático italiano Giusepe Peano (1858-1932) publicou, em 1890, um estudo das noções de continuidade e dimensões, no qual desenvolveu a curva que leva seu nome, em que prometia cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular (Barbosa, 2005). Para melhor exemplificação observe a Figura 1.

Figura 1 - Curva de Peano



Fonte: construção do próprio autor no GeoGebra.

Para a confecção da Curva de Peano empregamos o processo iterativo. Para tanto, utilizamos a construção conforme Coelho (2015) e Iwai (2015) a apresentam em seus trabalhos. Para iniciá-la, tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimos esse segmento em três partes congruentes. No segmento central desenhamos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração obtemos 9 segmentos de comprimento 1/3 cada. Para a segunda iteração repetimos os passos anteriores, assim obtendo 81 segmentos de comprimento 1/81 do inicial. Continuando esse processo de iteração *n* vezes, teremos segmentos de comprimento $\frac{1}{3^n}$.

Aliado ao estudo dos fractais, temos uma ótima oportunidade de inserirmos na sala de aula o uso das TD. Vivemos em uma sociedade em que o indivíduo tem acesso aos mais variados meios e formas de tecnologias. Não podemos deixar de lado essa realidade, pois, segundo Almeida (2000,

p. 77), o educador deve "[...] promover a aprendizagem do aluno para que ele possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e descobertas [...]" e o uso das TD vem ao encontro dessa realidade.

Optamos em utilizar o termo TD pautando em dois autores, Almeida (2007) e Valente (2005). Para Almeida (2007, p. 3), TD "[...] é um conceito polissêmico que varia seguindo o contexto e a perspectiva teórica do autor, podendo ser vista como: artefato, cultura, atividade com determinado objeto, processo de criação, conhecimento sobre uma técnica e seus respectivos processos". Já para Valente (2005, p. 23) as TD são o resultado da concentração de "diferentes mídias em um só artefato", como, por exemplo, o vídeo, o computador, o celular, a realidade virtual, entre outros.

As mais variadas formas de tecnologias estão presentes em nossa cultura e em nosso cotidiano, criando possibilidades de expressão e comunicação, cabendo a nós professores sabermos escolher e estudar suas aplicações em sala de aula.

Acreditamos que a utilização de recursos tecnológicos digitais, especialmente na Educação Matemática, deva ser pensada como um recurso que possa melhorar os processos de ensino e de aprendizagem. De acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015, p. 41), "o uso de tecnologias digitais no contexto escolar propicia diferentes possibilidades para trabalhos educacionais mais significativos para os seus participantes". Mas, para essa ocorrência, os educadores devem estar constantemente pesquisando e atualizando suas metodologias de ensino. Para Kenski (2012), as TD não mudam apenas as formas de produção, organização e difusão da informação, mas a maneira como percebemos e entendemos o mundo.

Para essa pesquisa utilizamos o computador, destacando que ele não é um instrumento que ensina, mas apenas uma ferramenta que auxilia o estudante a desenvolver algo. Sendo assim, o aprendizado deverá ocorrer pelo intermédio do computador, quando ele realizar alguma tarefa designada pelo professor.

O uso dessa tecnologia deve auxiliar o enriquecimento do ambiente educacional, possibilitando a construção de conhecimentos por meio de uma ação ativa, crítica e criativa, tanto por parte dos estudantes, como dos educadores. Papert (1994) defende o uso do computador por acreditar que ele é mais eficaz no desenvolvimento cognitivo, além de acelerar a passagem do pensamento infantil para o adulto.

Acreditamos que seja importante a familiarização do estudante com o computador, pois pode gerar uma série de oportunidades de expansão dos conhecimentos, além de promover sua autonomia. Segundo Lévy e Moraes (2001, p. 132), "é na escola que o indivíduo tem a oportunidade do aprendizado interativo e cooperativo, sendo o principal canal de acesso para a inclusão e cidadania". Além disso, os autores descrevem que o computador propicia, atualmente, a aprendizagem do professor e do estudante ao mesmo tempo, promovendo uma atualização contínua de seus saberes pedagógicos.

Entretanto, o computador é apenas uma máquina que depende do indivíduo para fazer uma programação e realizar certa atividade. Com esse intuito, escolhemos um *software* de GD, o GeoGebra, para realizar a pesquisa. O termo GD é entendido como um "ambiente oferecido por *softwares* que possibilitam manipular construções e objetos geométricos na tela do computador" (Pereira, 2012, p. 26). Na perspectiva de utilização da GD, Bairral (2009, p. 26), apresenta contribuições como "[...] a interação do sujeito com a TIC[2]; a descoberta mediante tentativa e erro; a observação, o levantamento e verificação de conjecturas, bem como as diferentes formas (não estáticas) de representação do objeto em estudo". Também podemos destacar outros pontos positivos como a facilidade na construção geométrica e a dinamicidade na visualização e na verificação de propriedades.

2 TIC - Tecnologias da Informação e Comunicação.

Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 25) destacam que "[...] é fundamental explorarmos não somente os recursos inovadores de uma tecnologia educacional, mas a forma de uso de suas potencialidades com base em uma perspectiva educacional". Desse modo, ao utilizarmos um *software* de GD, os objetos matemáticos ganham dinamicidade e dependência entre as representações, fazendo com que o estudante desenvolva um olhar sobre seu processo de aprendizagem.

Nesse sentido, Melo e Silva (2013, p. 14) afirmam que "o GeoGebra proporciona condições que permitem a elaboração de situações onde o próprio aluno constrói conhecimentos", corroborando com a ideia de que o GeoGebra é uma ferramenta capaz de propiciar mais autonomia aos estudantes. Ele é um *software* livre[3] e de código aberto[4], voltado para a aprendizagem de Matemática, estabelecendo uma relação entre a Geometria (Geo) e a Álgebra (Gebra). É considerado de GD, pois possibilita a movimentação de entes geométricos (por exemplo, pontos, retas, segmento de reta, entre outros) mantendo as propriedades geométricas em sua construção. O GeoGebra é gratuito e pode ser encontrado em www.geogebra.org, podendo ser utilizado de forma *online*, diretamente na página do programa na rede, ou *offline* com a instalação no computador (Perlin, 2010). Ainda, existe a possibilidade de ser instalado e utilizado em dispositivos móveis, como *tablets* e celulares.

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Nesta seção estruturamos os aspectos referentes ao referencial teórico que fundamenta a pesquisa, ou seja, os RRS de Reymond Duval. Segundo Duval (2010, p. 11), o objetivo da Matemática é "contribuir para o desenvolvimento geral de capacidades de raciocínio, de análise e de visualização". Ele destaca que, para haver a compreensão Matemática, se faz necessária uma abordagem cognitiva, porém essa deve buscar retratar os processos de aquisição de conhecimentos que possibilite ao estudante compreender, efetuar e controlar a variedade dos procedimentos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino. Outro ponto que o autor salienta é a existência de duas características essenciais para atividades cognitivas necessárias para a Matemática: a importância das representações semióticas e a diversidade das utilizadas em Matemática.

Na Matemática nem sempre trabalhamos com objetos concretos, pelo contrário, às vezes fazemos uso dos abstratos. Mediante essa realidade, recorremos ao uso de uma representação para auxiliar a sua compreensão, por exemplo, mediante o uso de tabelas, gráficos ou algoritmos. Segundo Breunig, Nehring e Pozzobon (2010), é interessante apresentar aos estudantes situações de ensino que possam estimular a identificação, a utilização e a mobilização de diferentes RRS a partir dos conceitos.

A teoria de Duval (2010) é estabelecida como produções concebidas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, sendo que esses se referem ao uso da linguagem (símbolos, códigos, gráficos, entre outros), os quais possuem suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento.

Para Machado (2010), os RRS estabelecem uma importante ferramenta que discorre sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos e a organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos.

Segundo Duval (1995), um sistema de representação semiótica é considerado um RRS quando ele permite três atividades cognitivas:

3 *Software* livre é uma expressão utilizada para designar qualquer programa de computador que pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente.

4 O código aberto é um termo que se refere a um *software* cujo código está disponível para *download* por qualquer pessoa e a uma filosofia de criação de aplicativos voltada para a colaboração entre desenvolvedores.

a) a formação de uma representação identificável;
b) o tratamento de um registro de representação;
c) a conversão de um registro de representação.

Quando identificamos na representação o objeto que ele representa, dizemos que essa representação é identificável. Segundo Duval (2009, p. 53), a formação de uma representação identificável "implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que queremos representar". Essa representação pode ser dada, por exemplo, na composição de um texto, no desenho de uma figura geométrica, na escrita de uma fórmula, de um gráfico, entre outros.

O tratamento de um registro de representação implica em transformar a representação do objeto matemático conservando o próprio registro de origem, caracterizando assim uma transformação interna a um registro. Para Duval (2010, p. 16),

> os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo sistema de representação, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura seguindo critérios de conexidade e simetria.

Corroborando com essa ideia, Henriques e Almouloud (2016, p. 469), definem tratamento de uma representação como "transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro".

Já a conversão de um registro de representação em outro, segundo Duval (2009, p. 58), consiste em "transformar um registro de representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada, num registro de representação usando outro sistema de representação". Corroborando com isso, Damm (2012, p. 180) relata que essa conversão ocorre "conservando a totalidade ou parte do objeto matemático em questão". Para Henriques e Almouloud (2016, p. 469), "a conversão de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro".

Duval (2010) relata que o ato de mudar o sistema de representação de um objeto matemático é um mecanismo que leva à compreensão, uma vez que cada sistema semiótico tem suas particularidades e especificidades representacionais. Além disso, o autor afirma que, para analisar atividades matemáticas, sob a luz do ensino e aprendizagem, é indispensável fazer uma abordagem cognitiva a respeito dos dois tipos de transformações de representações: os tratamentos e as conversões. Portanto, segundo o autor, a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento.

Os tratamentos são operações que abrangem transformações internas de registros e ocorrem no mesmo sistema semiótico de representação. Por exemplo, reconhecer um trapézio dentre seus diferentes tipos de representações figurais. Para Duval (2009, p. 57),

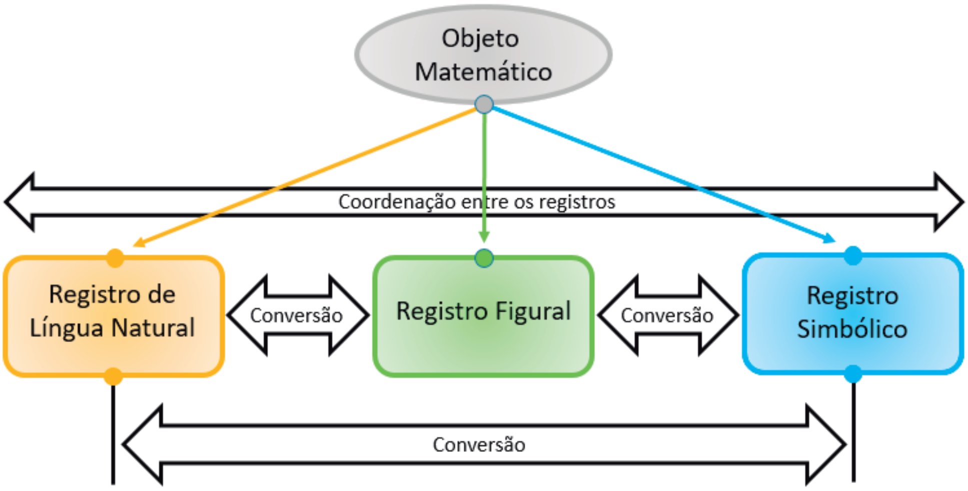
> um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema. O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismo e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas do mesmo registro de escritura de números.

A partir dessas considerações preliminares, consideramos que os tratamentos estão relacionados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Duval (2009) apresenta que a conversão é uma transformação externa em relação ao registro da representação inicial, "a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos” (p. 63).

Para o autor, a compreensão do objeto estudado está relacionada às relações estabelecidas entre os diferentes registros, compreendendo as particularidades de cada um. Por exemplo, um Registro de Língua Natural não oferece as mesmas possibilidades de representação de uma expressão algébrica ou de um gráfico. Cada um desses registros possui uma característica própria. Entender essas características é um caminho para a compreensão do objeto como um todo. Portanto, percorrendo os diferentes registros associados a um objeto matemático, definimos a coordenação entre eles. Segundo Henriques e Amouloud (2016, p. 470), a coordenação “[...] é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos”.

Diante do exposto, podemos dizer que os RRS, segundo Duval (2010), distinguem-se dos demais por considerar a importância da mobilização de diferentes registros de representação para a apreensão de um objeto matemático: o Registro da Língua Natural (RLN), o Registro Figural (RF) e o Registro Simbólico (RS), os quais, juntamente com as respectivas conversões serão explorados na análise dos dados da pesquisa (Figura 2).

Figura 2 - Tipos de registros utilizados na pesquisa.



Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Portanto, estamos interessados em investigar, por meio das atividades exploradas na oficina, a construção de saberes de Geometria Fractal, na qual os RRS fornecerão um referencial estruturado da análise do funcionamento cognitivo dos estudantes envolvidos na pesquisa, diante de uma situação de ensino envolvendo esse objeto matemático.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia de pesquisa adotada para essa pesquisa é a qualitativa de cunho interpretativo. Segundo Goldenberg (1999), a preocupação do pesquisador, em uma pesquisa qualitativa, é com o aprofundamento da compreensão do fenômeno e não com sua representatividade numérica.

Ao empregar a abordagem qualitativa, almejamos compreender os modos como os estudantes, em uma situação específica, pensam, agem e buscam a generalização de conteúdos matemáticos.

A pesquisa foi desenvolvida com 12 acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar - *Campus* Alegrete, localizado no município de Alegrete, no estado do Rio Grande do Sul.

O envolvimento de seres humanos é indispensável para a condução desta pesquisa, tornando essencial a observância de todas as normas éticas e legais. Para garantir o cumprimento desses preceitos, o projeto foi avaliado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Franciscana e aprovado com o Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) de número 07889318.7.0000.5306.

As atividades desenvolvidas foram realizadas no turno inverso das aulas dos discentes, à tarde, pois a aplicação não fez parte de nenhuma disciplina em que estivessem matriculados. Tendo o intuito de complementação de sua formação, elaboramos um Projeto de Ensino, dividido em 4 oficinas, que foi encaminhado e aprovado pela Direção de Ensino da Instituição, órgão responsável pelo registro dessas atividades.

Para este artigo, iremos nos concentrar em relatar a Oficina 3, que abordou a exploração do fractal Curva de Peano. Dividimos essa oficina em três partes. A primeira foi destinada ao conhecimento da curva, a segunda teve por objetivo a construção no GeoGebra e a terceira exploramos algumas relações geométricos envolvidas, as quais apresentaremos na secção de “Análise e discussão dos resultados”.

Para essa oficina elaboramos uma sequência de atividades, as quais possibilitaram a coleta dos dados por meio das produções escritas dos acadêmicos. As construções realizadas no GeoGebra foram enviadas para o e-mail do pesquisador, sendo que cada uma foi salva, em seu computador, para posterior análise. Salientamos que os acadêmicos já possuíam conhecimento sobre os comandos do GeoGebra. Também se fez uso do diário de campo, o qual se constituiu em mais um instrumento para análise das atividades aplicadas e foi organizado de maneira a conter, sempre que necessário, transcrições de diálogos com os discentes antes, durante ou depois dos encontros. Para melhorar a organização e facilitar a análise, o diário foi dividido em duas partes, uma descritiva e outra reflexiva, abrangendo as observações e/ou impressões pessoais do pesquisar a respeito de cada encontro.

Para Yin (2005), o emprego de múltiplas fontes de dados, (no nosso caso, produções escritas dos acadêmicos, diário de campo do pesquisador e construções no GeoGebra) permite ter um conjunto mais variado para a realização de uma análise fidedigna. O emprego desses instrumentos possibilita o cruzamento de informações, se necessário, o que, por um lado, garante os diferentes olhares dos investigados no estudo e, por outro, ao pesquisador obter outras perspectivas do mesmo fenômeno, criando situações para uma melhor análise dos dados.

Estruturamos a análise das atividades das oficinas levando em consideração os aspectos matemáticos e cognitivos, pretendendo analisar se o acadêmico compreende, não somente o que a representação semiótica representa, mas como ela representa. Dessa forma, podemos conjecturar sobre a compreensão da Matemática e do problema no desenvolvimento das atividades que envolviam noções de Geometria Fractal.

Para a realização da análise dos dados coletados nas oficinas, categorizamos as respostas dos acadêmicos nos seguintes aspectos: resposta correta; resposta parcialmente correta, quando faltou alguma informação para ser considerada correta; resposta errada, em que o acadêmico não chegou na resposta correta ou parcialmente correta.

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 133-151,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

Segundo Moraes e Galiazzi (2011, p. 22), "[...] a categorização é um processo de comparação constante entre as unidades definidas no momento inicial de análise levando a agrupamentos de elementos semelhantes. Conjunto de elementos de significação próximos constituem categorias."

Portanto, obtidos os dados a partir da aplicação das atividades propostas e manipulados (categorizados), o passo seguinte foi a análise e a interpretação deles, ambos se constituindo na parte principal de nossa pesquisa. Posteriormente, iremos verificar se os objetivos da oficina foram alcançados.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

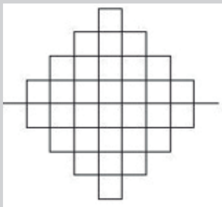
A Oficina 3, realizada em um único encontro, com duração de 5 horas, foi dividida em três atividades: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando a Curva de Peano. Para garantir o anonimato, os 12 discentes foram identificados pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L. Não estava presente nas atividades o Acadêmico D.

Iniciamos a oficina explicando o que iríamos trabalhar e logo começamos a Atividade 1. Antes de mostrarmos a imagem do fractal Curva de Peano, desafiamos os acadêmicos a imaginar e apresentar um esboço a partir da apresentação da definição da Curva de Peano.

Segundo Hilbert e Cohn-Vossen (1990, p. iii, tradução nossa), a imaginação visual pode "[...] iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração [...]". Exploramos a imaginação a partir da visualização que, para Dreyfus (1991), é um processo pelo qual as representações mentais ganham vida. Corroborando com essa ideia, Cifuentes (2010, p. 25) relata: "a visualização é uma forma de pensamento e, portanto, é possível também argumentar através dela".

Dessa forma, apresentamos um RLN e verificamos se houve ou não a conversão para o RF. No Quadro 1, apresentamos como se efetua a construção da Curva de Peano (RLN) e a imagem (RF) do referido fractal.

Quadro 1 - Conversão do RLN para RF na Curva de Peano.

RLN	RF
Para iniciá-la tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimos esse segmento em três partes congruentes. No segmento central, desenhamos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração, obtemos 9 segmentos de comprimento 1/3 cada. Para a segunda iteração, vamos repetir os passos anteriores, assim vamos obter 81 segmentos de comprimento 1/81.	

Fonte: elaborado pelo próprio autor.

Para Roncaglio e Nehring (2019, p. 84), "é fundamental o trabalho com as representações semióticas que sustentam a construção do conhecimento pelos sujeitos, em processo de aprendizagem, uma vez que elas possibilitam o desenvolvimento das funções cognitivas essenciais do pensamento humano". Nesse sentido, estamos estimulando os acadêmicos a realizar suas representações, nesse caso RF, e consequentemente a conversão do RLN para o RF.

VIDYA

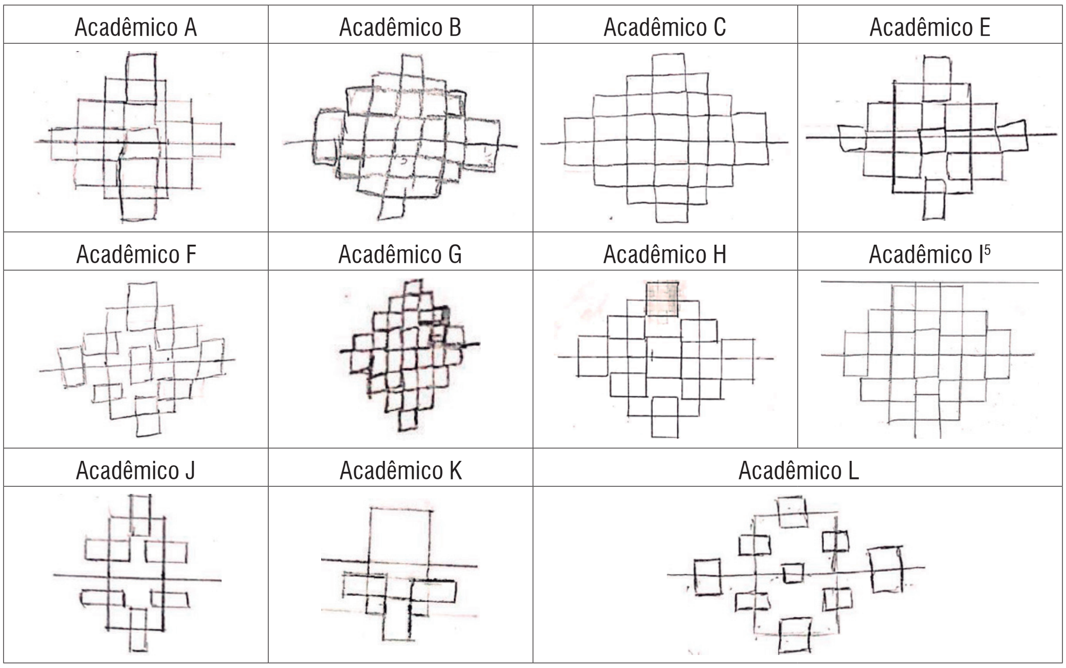
VIDYA, v. 44, n. 2, p. 133-151,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

A coordenação entre esses dois tipos de registros só se dará por meio de duas operações: tratamentos ou conversões. Nesse caso, na Atividade 1, estamos realizando conversão, pois segundo Duval (2009, p. 58), "converter é transformar a representação de um objeto de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro".

Para a realização de uma análise de conversão, é necessário existir uma representação no registro de partida, assim como uma representação terminal ou registro de chegada (Duval, 2009). Como estamos trabalhando com dois tipos de registros: o RLN e o RF, o primeiro é o registro de partida e o segundo, o registro de chegada.

No Quadro 2, apresentamos os esboços dos trabalhos dos acadêmicos. Percebemos que os acadêmicos A, B, C, E, G, H, I conseguiram realizar a conversão do RLN para o RF de forma correta. Os demais discentes realizaram uma representação próxima à ideia da Curva de Peano. Portanto, conseguimos mobilizar representações mentais a partir da imaginação e da visualização, concordando com os estudos de Hilbert e Cohn-Vosse (1990), Dreyfus (1991) e Cifuentes (2010).

Quadro 2 - Esboços apresentados para a Curva de Peano.



Fonte: acervo do autor.

Para finalizar esta primeira atividade, apresentamos a imagem do fractal Curva de Peano e comentamos sobre os esboços apresentados. Os acadêmicos F, J, K e L relataram ter entendido a sua construção, porém não haviam conseguido esboçá-la conforme os demais participantes, por não terem aptidão para o desenho. O Acadêmico K também relatou que não teve tempo suficiente para a realização da atividade. Observando os esboços desses acadêmicos, eles iniciaram a primeira iteração com a construção de forma correta, dividindo um segmento de reta unitário em três partes

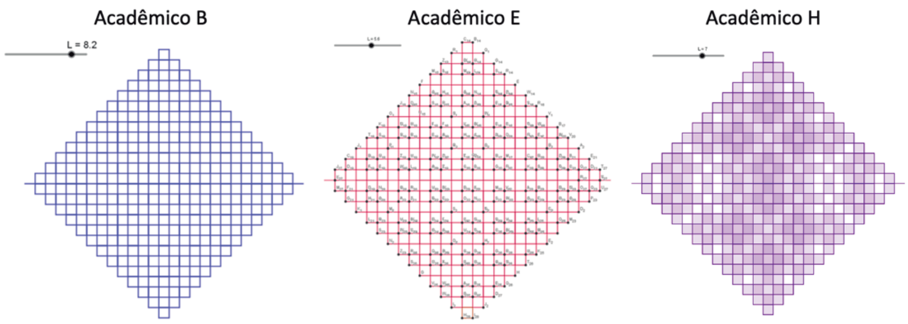
5 O esboço do Acadêmico I, segundo relato dele, ficou incompleto na parte superior devido à falta de espaço disponibilizado.

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 133-151,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

congruentes e no segmento central desenharam um retângulo (dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes). Para a segunda iteração eles deveriam ter feito o mesmo processo anterior, porém, foi nesse passo que eles se equivocaram e não perceberam que os retângulos desenhados teriam alguns de seus vértices ligados a outros vértices de retângulos. Se houvesse essa percepção haveria uma porcentagem (aproximadamente 64%) maior de representações corretas.

Dando continuidade à Oficina 3, iniciamos a Atividade 2 que foi a construção da Curva de Peano no GeoGebra. Todos os presentes têm conhecimento sobre o *software*, porém, em conversa anterior ao início da oficina, eles disseram não se lembrar de todos os comandos. Por isso, resolvemos fazer a construção do fractal Curva de Peano realizando um passo a passo, o que foi uma excelente estratégia, pois, durante a execução, os acadêmicos iam questionando e relembrando os comandos. Explicamos como fazer para os níveis 0 e 1 e eles solicitaram um tempo para tentar realizar os níveis 2 e 3. Todos os participantes concluíram a construção (RF), conforme podemos observar na Figura 3, com as construções dos acadêmicos B, E e H.

Figura 3 - Curva de Peano apresentada pelos Acadêmicos B, E e H.

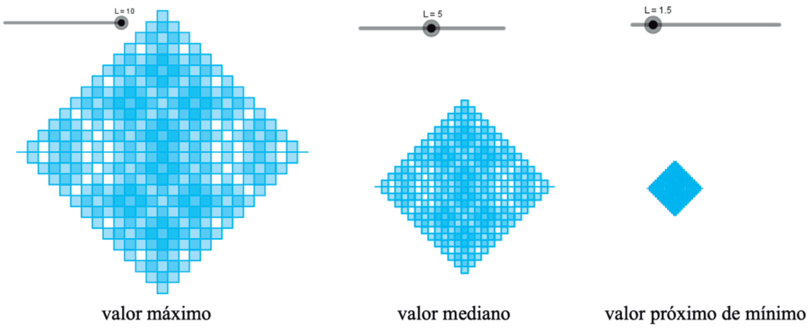


Fonte: acervo do autor.

Notamos que eles tiveram maior facilidade na hora da construção. Isso pode ser devido a dois fatores: o primeiro é por eles já estarem familiarizados com os comandos do GeoGebra; e o segundo, pela construção ser realizada por processos iterativos a partir do nível 1.

Ao final da construção o Acadêmico G percebeu uma propriedade e comentou que, se movimentasse o controle deslizante para um valor máximo, um valor mínimo e um valor mediano, a área da região apresentada na tela seria a de um quadrado de lado L (Figura 4). Foi a partir da visualização que esse discente inferiu um dos futuros questionamentos que faríamos a respeito da Curva de Peano. Isso vem ao encontro da ideia de Cifuentes (2010), quando relata que por meio da visualização é possível argumentar, e esse foi um exemplo prático disso.

Figura 4 - Curva de Peano apresentada pelo Acadêmico G.



Fonte: acervo do autor.

Após a finalização das construções, iniciamos a Atividade 3. Nessa parte da oficina, iríamos fazer questionamentos para que analisassem a construção realizada. O primeiro deles seria referente ao número de segmentos e a área gerada em cada quadrado, ou seja, os acadêmicos, usando os RLN e RF, deveriam observar e realizar um RS desde o nível 0 até chegar ao nível *n*. Portanto, tivemos como registros de partida o RLN e RF e como registro de chegada, o RS. Vejamos, na figura 5, a resposta apresentada pelo Acadêmico J.

Figura 5 - Resposta do Acadêmico J para a primeira questão da Atividade 3 Oficina 3.

a) A partir da construção da Curva de Peano, analisar e preencher o Quadro 1 determinando a medida do lado e o número de segmentos gerados em cada nível até chegar ao nível n. Salientamos que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Tamanho do lado e números de segmentos gerados na Curva de Peano de nível n.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Lado	L	$L/3$	$L/9$	$L/27$	...	$\frac{L}{3^n}$
Número de segmentos	1	9	81	729	...	9^n
Área de cada quadrado gerado	—	$\frac{\ell^2}{9}$	$\frac{\ell^2}{81}$	$\frac{\ell^2}{729}$	...	$\ell^2/9^n = \frac{\ell^2}{3^{2n}}$

Fonte: acervo do autor.

Não houve dificuldade para esse primeiro questionamento e todos chegaram à resposta correta, consequentemente concluímos que houve conversão entre os registros. Em seguida, passamos para o segundo questionamento referente à soma do comprimento dos segmentos da Curva de Peano. Essa questão foi dividida em duas partes, a primeira refere-se ao preenchimento de um quadro e a segunda é relativa à soma do comprimento dos segmentos. Da mesma forma que na questão anterior, os registros de partida foram o RLN e RF e o de chegada, o RS. Vejamos na Figura 6 a resposta do Acadêmico C para a primeira parte do segundo questionamento.

Figura 6 - Resposta do Acadêmico C para a primeira parte da segunda questão da Atividade 3 Oficina 3.

b) Se pensar em um valor para *n* muito elevado, ou seja, quando *n* tende a infinito, o que ocorre com a soma do comprimento dos segmentos, isto é, S_n?

A soma do comprimento dos segmentos na Curva de Peano é dada pelo número de segmentos multiplicado pelo tamanho do seu lado. Para melhor organização preencha o Quadro 2.

Quadro 2 – Soma do comprimento dos segmentos na Curva de Peano.

Nível	Soma dos segmentos
0	$1\ell = \ell$
1	$S_1 = 9 . \frac{\ell}{3} = \frac{9}{3}\ell = 3\ell$
2	$S_2 = 81 . \frac{\ell}{9} = \frac{81}{9}\ell = 9\ell$
3	$S_3 = 729 . \frac{\ell}{27} = \frac{729}{27}\ell = 27\ell$
⋮	⋮
n	$S_n = 9^n . \frac{\ell}{3^n} = \frac{3^{2n}}{3^n}\ell = 3^{2n-n}\ell = 3^n\ell$

Fonte: acervo do autor.

Já na segunda parte, os participantes chegaram à resposta esperada, porém quatro deles responderam usando a notação de limite (RS); dois optaram por escrever (RLN) e cinco atenderam a solicitação por meio da escrita e notação de limite (RLN e RS). Concluímos que houve conversão entre os registros. Na Figura 7, apresentamos a resposta do Acadêmico C que utilizou duas notações para fazer sua justificativa.

Figura 7 - Resposta do Acadêmico C para a segunda questão da Atividade 3 da Oficina 3

$$\lim_{n \to \infty} 3^n \ell = \infty$$

Quanto maior for o valor de n, menor será cada segmento, que tenderá ao infinito quando somado todos segmentos.

Fonte: acervo do autor.

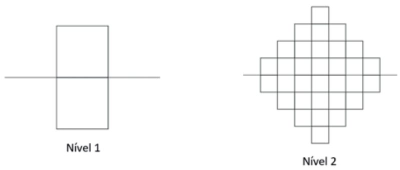
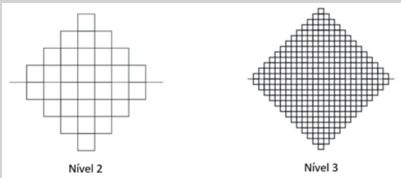
Outra forma de responder seria utilizando a planilha do GeoGebra. Foi mostrado como poderia ser utilizada e apresentamos a solução, comparando com as respostas obtidas pelos discentes. Mostramos que o resultado é o mesmo quando utilizados os dois recursos.

Os próximos três questionamentos foram referentes ao número de segmentos e ao número de quadrados gerados na Curva de Peano entre o nível 0 e o 1; entre o nível 1 e o 2 e entre o nível 2 e o 3. Para facilitar as respostas, foram apresentadas as imagens dos níveis 0, 1 e 2, para ser feita a contagem. Os discentes haviam construído o nível 3 anteriormente. Não houve dificuldades para apresentarem as respostas, como pode ser observado no Quadro 3.

VIDYA

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 133-151,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

Quadro 3 - Respostas apresentadas pelos Acadêmicos E, K e L para o terceiro, quarto e quinto questionamentos da Oficina, respectivamente.

c) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 0 para o nível 1? 	Resposta do Acadêmico E o comprimento do segmento de nível 0 é um segmento de tamanho L E, o nível 1 possui 9 segmentos, ou seja, o tamanho do segmento é $\frac{L}{3}$
d) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 1 para o nível 2? 	Resposta do Acadêmico K Nível 1 9 segmentos $\frac{L}{3}$ comprimento 2 quadrados Nível 2 81 segmentos $\frac{L}{9}$ tamanho 32 quadrados
e) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 2 para o nível 3? 	Resposta do Acadêmico L Nível 2 - 81 segmentos - Comprimento $\frac{L}{9}$ 32 quadrados. Nível 3 - 729 segmentos - Comprimento $\frac{L}{27}$ 338 quadrados.

Fonte: acervo do autor.

Acreditávamos que, para o quinto questionamento, os participantes poderiam ter dificuldades em determinar o número de quadrados gerados na Curva de Peano no nível 3. Porém, quase que imediatamente, foram para a tela do computador e contaram quantos quadrados havia na figura. Novamente, fizeram o uso da visualização para chegar a uma resposta.

Nos cinco primeiros questionamentos tivemos como registro de partida os RLN e RF e como registro de chegada os acadêmicos apresentaram RS e/ou RLN. Essas atividades foram pensadas e elaboradas para que os acadêmicos mobilizassem mais de um tipo de representação, o que é sugerido por Duval (2009) e, a partir delas, chegassem por meio de tratamentos e conversões à resposta correta. Conjecturamos que houve a compreensão dos objetos matemáticos mobilizados nessas atividades.

Nesse contexto, destacamos a relevância dos recursos trazidos pelo GeoGebra para que os estudantes pudessem buscar seus próprios caminhos na direção do conhecimento matemático. Assim, dentro de um ambiente controlado de erro, podem dar vazão às suas ideias sem que passos equivocados tragam maiores consequências. Essa liberdade propiciada ao estudante, de tentar, sem receio de errar, pode contribuir para o seu gosto pela experimentação, que o levará à construção de novas ideias, conceitos e pensamentos. Nesse sentido, Papert (1994) destaca que as construções mentais ocorrem de modo especialmente venturoso quando são apoiadas pela construção mais pública, no mundo concreto. Assim, criam-se possibilidades de exames, discussões e conjecturas. Ainda, o autor ressalta que as TD devem ser utilizadas como instrumentos que auxiliam os estudantes a trabalhar

VIDYA, v. 44, n. 2, p. 133-151,
jul./dez. - Santa Maria, 2024.

e a pensar, tornando-se meios para a realização de projetos, fonte de pesquisa de conceitos e um elemento capaz de trazer ao mundo real construções mentais diversas.

Para finalizar, o sexto e último questionamento foi: se continuarmos as iterações até chegarmos a um nível *n*, em que *n* é um valor muito elevado (*n* tendendo a infinito), o que podemos conjecturar a respeito da área da superfície formada nesse processo? Essa corresponde àquela que o Acadêmico G havia respondido, anteriormente, por meio da visualização.

> *Que cada vez mais vai ser preenchida com os quadradinhos, podendo ser calculada pela área do quadrado (Acadêmico A).*
> *Com n muito elevado, o valor da área da superfície irá tender a ser a área do quadrado (Acadêmico B).*
> *A área vai ser totalmente preenchida, podendo ser calculada pela área do quadrado (Acadêmico C).*
> *A área de um quadrado (Acadêmico E).*
> *Que a área da figura fica preenchida e forma um quadrado, sendo que sua área pode ser calculada por* l^2 *(Acadêmico F).*
> *Ela pode ser calculada pela área do quadrado de lado l (Acadêmico G).*
> *A área vai ficar cada vez mais preenchida, até ficar totalmente, e poderá ser calculada pela área de um quadrado (Acadêmico H).*
> *Quando n tender ao infinito, a área da figura ficará cada vez mais próxima de ser totalmente preenchida, se assemelhando e podendo ser calculada como a área de um quadrado de lado l (Acadêmico I).*
> *Uma área de um quadrado (Acadêmico J).*
> *A área será totalmente preenchida e poderá ser calculada pela área de um quadrado (Acadêmico K).*
> *Vai ficar igual à área de um quadrado (Acadêmico L).*

Podemos observar que todos os discentes chegaram à conclusão de que, quando *n* for muito elevado, o valor da área da superfície tende a ser a área de um quadrado, porém apenas os acadêmicos F, G e I relataram que essa área poderia ser calculada pela medida do lado desse quadrado.

Após terminar a Oficina 3, mostramos no Quadro 4 um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 4 - Quadro resumo da Oficina 3.

<table>
<tr><th colspan="2">Atividades</th><th>Número de alunos que acertaram</th><th>% de acertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 1 (conhecendo a Curva de Peano)</td><td>7</td><td>64</td></tr>
<tr><td colspan="2">Atividade 2 (construção da Curva de Peano)</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Atividade 3 (explorando a Curva de Peano)</td><td>Item a</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item b</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item c</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item d</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item e</td><td>11</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Item f</td><td>11</td><td>100</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor.

O Quadro 4 mostra que na Atividade 1 houve 64% de acertos. Acreditamos ser devido a eles não estarem familiarizados com esse tipo de atividade e ao fato de a visualização e a imaginação desses acadêmicos nunca terem sido exploradas.

Na Atividade 2, devido a eles estarem familiarizados aos comandos do GeoGebra e ao número de passos para realizar cada iteração, percebemos que a construção foi realizada de forma rápida em comparação às construções de outras oficinas realizadas no Projeto de Ensino.

No entanto, para a Atividade 3, como tivemos a preocupação de mobilizar pelo menos dois tipos de registros (RLN e RF) e, consequentemente, tratamentos e conversões entre eles, acreditamos ter sido esse um dos motivos pelos quais todos os acadêmicos chegaram às respostas corretas. Corroborando com essa ideia, Damm (2012) relata que, quando pensamos no processo de ensino e de aprendizagem, devemos não só levar em conta a formação das representações e os tratamentos, mas também a conversão entre os diferentes tipos de registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Também, durante a aplicação da segunda questão (item b) dessa atividade, percebemos que poderíamos ter solicitado aos acadêmicos a utilização da planilha do GeoGebra para chegar à resposta e, dessa forma, incentivar o uso dessa ferramenta.

Ao concluir essa oficina, constatamos que conseguimos alcançar os objetivos propostos, desenvolvendo a parte histórica, a construção e as explorações de relações geométricas da Curva de Peano. Isso foi percebido pelas respostas aos questionamentos apresentados pelos discentes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sequência de atividades apresentada nessa oficina não deve ser única e imutável, pelo contrário, serve de sugestão a ser desenvolvida, pois cada sala de aula tem a sua característica e particularidades. Nesse caso, após o término da oficina, percebemos que poderíamos ter explorado mais o uso da planilha do GeoGebra. Portanto, para uma nova aplicação, recomendamos repensar na atividade do 2º questionamento da Atividade 3, já direcionando o discente a trabalhar com essa ferramenta.

É provável, agora com esse conhecimento da Geometria Fractal, que os acadêmicos em suas futuras práticas pedagógicas, quer no estágio supervisionado, quer após formados, possam reproduzir esse conhecimento na Educação Básica. O professor deve estar constantemente repensando seu fazer pedagógico, buscando formas de estimular a aprendizagem dos discentes. Nesse sentido, pode ser questionado: por que não utilizar as TD como recursos metodológicos, despertando o interesse por essa abordagem? Consideramos importante apresentar e incentivar o uso de *softwares* aos futuros professores, pois, a partir de seu conhecimento, poderão construir sua prática pedagógica.

Para essa pesquisa, optamos pelo uso do GeoGebra como um recurso metodológico para facilitar a visualização das construções obtidas de forma dinâmica na tela do computador. Segundo Leivas (2009, p. 22), a visualização é "[...] um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas geométricos ou analíticos." No decorrer da pesquisa, observamos a importância dessa exploração, destacamos o relato do Acadêmico G, o qual fez uma conjectura a partir da visualização da Curva de Peano sobre a área da região apresentada na tela. Disse o estudante ser a área de um quadrado de lado L, o que, posteriormente, foi comprovado. Destacamos que isso só foi possível devido à utilização do controle deslizante do *software* de GD, pois se a curva fosse construída de forma estática, pensamos que não teria sido possível a realização do que havia sido conjecturado.

Como mencionado na introdução, esse artigo é uma parte da tese que investigou a possibilidade de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com a utilização das TD. Discutimos a respeito dos objetivos relacionados à Oficina 3, os quais foram:

a) desenvolver a parte histórica da Curva de Peano;

b) construir a Curva de Peano utilizando o GeoGebra;

c) explorar relações geométricas envolvidas na Curva de Peano.

Para o objetivo (a), foi apresentado aos participantes a parte histórica e como se dá a construção da Curva de Peano.

Quanto aos objetivos (b) e (c), foram planejadas atividades envolvendo o estudo da Curva de Peano, com o uso da TD (ensino) e, ao mesmo tempo, pensando na forma de coleta dos RRS (aprendizagem). Salientamos a importância dos RRS, pois eles não são somente um sistema de comunicação, mas sim uma forma de organização de informações acerca do objeto matemático representado. Segundo Duval (2009), uma das dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos está na dúvida que se possa ter entre a relação do objeto matemático e sua representação, sendo que a compreensão conceitual do objeto deve passar pela compreensão dos seus diferentes registros de representação e das relações entre esses registros.

Finalizamos com a certeza de que todos os objetivos foram contemplados e que, mediante as análises das respostas apresentadas pelos acadêmicos e análise dos RRS, houve a aprendizagem dessas relações geométricas envolvidas para este grupo focal.

Reforçamos a importância e a necessidade de estudos como o realizado em uma instituição de ensino brasileira, que vão ao encontro das necessidades pedagógicas dos docentes. Para futuros trabalhos e pesquisas, destinadas ao ensino e à aprendizagem de Geometria, recomendamos a exploração de outras geometrias não euclidianas, como, por exemplo, Geometria Esférica, Geometria Hiperbólica, entre outras. Consideramos importante o ensino dessas outras geometrias e mostrar aos discentes que a Geometria Euclidiana não é a única possível e praticável em nosso cotidiano. Por esse viés, o estudo de geometrias não euclidiana pode apresentar novas discussões e reflexões do ponto de vista matemático.

Esperamos com essas reflexões apresentadas contribuir para a inserção da Geometria Fractal na Educação Básica e a utilização dos RRS. Dessa maneira, concluímos com a expectativa de que esta pesquisa seja uma oportunidade para estudantes e professores pensarem sobre essa temática abordada e sua possibilidade de desenvolvimento na sala de aula com o uso das TD.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. B. (2007). Tecnologias Digitais na Educação: o futuro é hoje. In: **Anais eletrônicos do 5º Encontro de Educação e Tecnologias de Informação e Comunicação**, São Paulo, Universidade Estácio de Sá.

ALMEIDA, M. E. (2000). **ProInfo:** Informática e Formação de Professores. (Vol. 1). Brasília: Ministério da Educação.

BACICH, L., NETO, A. T., & TREVISANI, F. M. (2015). **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso.

BAIRRAL, M. A. (2009). **Tecnologias da Informação e Comunicação na formação e educação matemática.** (Vol. 1). Seropédica: EDUR.

BARBOSA, R. M. (2005). **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica.

BORBA, M. C., SILVA, R. S. R., & GADANIDIS, G. (2014). **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica.

BOYER, C. B. (1996). **História da matemática** (2ª ed.) São Paulo: Edgard Blucher.

BREUNIG, R. T., NEHRING, C. M., & POZZOBON, M. C. C. (2010). Registros de Representação Algébricos: proposições de alunos do primeiro ano do ensino médio. In: A**nais do 5º Congresso Internacional de Educação Matemática**, Canoas, Universidade Luterana do Brasil, 1-10.

CIFUENTES, J. C. (2010). Do conhecimento matemático à educação matemática: uma "odisséia espiritual". In S. M. Clareto, A. R. Detoni, & R. M. Paulo (Orgs.), **Filosofia, matemática e educação matemática:** compreensões dialogadas. (p. 113-32). Juiz de Fora: Ed. UFJF.

COELHO, J. B. (2015). **Geometria Fractal:** Um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do Ensino Médio (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Tocantins, Palmas, Brasil.

DAMM, R. F. (2012). Registros de Representação. In S.D.A. MACHADO. **Educação Matemática:** uma (nova) introdução (3ª ed., rev., p. 167-188). São Paulo: EDUC.

DREYFUS, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In: D. TALL (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking** (p. 25-40). New York: Kluwer Academic.

DUVAL, R. (2010). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In S. D. A. MACHADO (Org.), **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica (p. 11-33). Campinas: Papirus.

DUVAL, R. (2009). **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Fisica.

DUVAL, R. (1995). **Sémiosis et pensée humaine:** Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang.

FEDER, J. (1998). **Fractals**. New York: Plenum Press.

GOLDENBERG, M. (1999). **A Arte de Pesquisar** (3ª ed.). Rio de Janeiro: Record.

HENRIQUES, A., & ALMOULOUD, S. A. (2016). Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência e Educação**, 22 (2), 465-487.

HILBERT, D., & Cohn-Vossen, S. (1990). **Geometry and the imagination**. New York: Chelsea Publishing Company.

IWAI, M. M. H. (2015). **Geometria Fractal** (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do ABC, Santo André, Brasil.

KENSKI, V. M. (2012). **Educação e tecnologias:** O novo ritmo da informação. Campinas: Papirus.

LEIVAS, J. C. P. (2009). **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática.** (Tese de doutorado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil.

LÉVY, P., & MORAES, M. C. (2001). **A conexão planetária:** o mercado, o ciberespaço, a consciência. São Paulo: Editora 34.

MACHADO, S. D. A. (Ed.). (2010). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica (7ª ed.). Campinas: Papirus.

MELO, A. L. C. D., & SILVA, G. S. C. (2013). O uso do software geogebra no estudo de funções. In: **Anais eletrônicos do 6º Encontro de Formação de Professores**, Aracaju: UNIT.

MORAES, R., & GALIAZZI, M. C. (2011). **Análise textual discursiva.** Ijuí: Unijuí.

PAPERT, S. (1994). **A máquina das crianças.** Porto Alegre: Artes Médicas.

PEREIRA, T. L. M. (2012). **O uso do software GeoGebra em uma Escola Pública:** interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio (Dissertação de mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, Brasil.

PERLIN, P. (2010). **Geometria Dinâmica:** uma proposta de atividades no estudo de triângulos através do GeoGebra (Monografia de especialização). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, Brasil.

RONCAGLIO, V., & NEHRING, C. M. (2019). **Registros de representação semiótica:** conversão e tratamento em vetores. Curitiba: Appris.

STEWART, I. (1996). **Os Números da Natureza:** a realidade irreal da imaginação matemática. Rio de Janeiro: Rocco.

VALENTE, J. A. (2005). Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: M. E. B. B. P. Almeida & J. M. Moran (Eds.), **Integração das Tecnologias na Educação** (p. 23-31). Brasília: Ministério da Educação

YIN, R. K. (2005). **Estudo de caso:** planejamento e métodos (3ª ed.). Porto Alegre: Bookman.